Prirodoslovno matematiļki fakultet
Sveuļiliġte u Splitu

Klasiļna mehanika

Skripta

Prof. Ģeljko Antunoviĺ

KLASIČNA MEHANIKA

Klasiļna mehanika izuļava problem gibanja materijalnih objekata i predstavlja temelj klasiļne fizike. Tehnologġka primjena zakona klasiļne fizike izazvala je industrijsku revoluciju i omoguĺila razvoj modernog druġtva. U teorijskoj fizici stvaramo matematiļke modele, koje nazivamo fizikalnim teorijama, ļiji je zadatak opisivanje gibanja fizikalnih sustava koji nas zanimaju. Svaka fizikalna teorija je ustvari aproksimativni matematiļki model dijela svemira (fizikalnog sustava) ļije gibanje razmatramo. Toļnost predikcija teorije mora biti jednaka ili bolja od rezolucije najboljih mjernih instrumenata koje imamo na danom stupnju tehnologġkog razvoja. Klasiļna fizika je jedna takva teorija koja se dijeli na

- klasiļnu mehaniku,
- klasiļnu elektrodinamiku i
- klasiļnu statiļku fiziku.

Poļetkom XX stoljeĺa domena primjenjivosti klasiļne fizike znaļajno se smanjila otkriĺem teorije relativnosti i kvantne mehanike. Tako je klasiļna fizika od fundamentalne fizikalne teorije, za koju se vjerovalo da toļno opisuje sve fizikalne sustave (djelove svemira), postala samo aproksimativno toļna teorija gibanja makroskopskih objekata nerelativistiļkim brzinama. Ali, unutar svoje domene valjanosti, klasiļna fizika je izuzetno toļna teorija ļije predikcije se izvrsno slaġu s eksperimentalnim rezultatima. Na primjer, ļak i u ļuvenom eksperimentu rotacije perihelija Merkura koji dokazuje ispravnost Opĺe teorije relativnosti nasuprot Newtonova zakona gravitacije, relativna «pogreġka» klasiļne mehanike je manja od 10^{-7}, a za sve ostale planete «pogreġka» je joġ i puno manja. Povijesno, Newtonova klasiļna mehanika je prva fizikalna teorija koja je utemeljila fiziku kao posebnu znanost. Matematiļka i logiļka struktura klasiļne mehanike pretstavlja model za bilo koju fizikalnu teoriju.

U teorijskoj fizici kaġemo da klasiļna mehanika izuļava problem gibanja (makroskopskih) fizikalnih sustava. Pri tome, pod fizikalnim sustavom podrazumjevamo bilo koji skup (klasiļnih) ļestica. Ļestica je matematiļka idealizacija jako malog tijela, tj. materijalna toļka mase m, bez ikakve unutarnje strukture i ļije su sve tri prostorne dimenzije nula. Klasiļnu ļesticu moġemo zamisliti kao siĺuġno kruto tijelo (kao zrnce praġine mikronskih dimenzija) ļije deformacije i strukturu tijekom gibanja moġemo zanemariti. Danas znamo da se materija sastoji od realnih ļestica ï u razliļitim fizikalnim teorijama to su ili molekule ili atomi ili elementarne ļestice. Elementarne ļestice su najsitniji djeliĺi materije za koje znamo (u svim mjerenjima izgledaju nam kao toļke) i nazivamo ih: kvarkovi, leptoni i Ăgaugeñ bozoni. Takve realne ļestice nazivamo kvantnim ļesticama jer se njihovo gibanje ne moġe objasniti zakonima klasiļne fizike, nego zakonima kvantne fizike (jednadġba gibanja kvantne ļestice je Schrondingerova jednadġba, a ne drugi Newtonov zakon). Ali, fundamentalni teorem kvantne fizike tvrdi da se pri opisu gibanje makropskih sustava (sustava velikog broja kvantnih ļestica) predikcije kvantne i klasiļne fizike nemjerljivo razlikuju (precizno: u limesu beskonaļnog broja kvantnih ļestica predikcije kvantne teorije su identiļne predikcijama klasiļne fizike).

Prema tipu sustava koje izuļava klasiļna mehanika se dijeli na:

- mehaniku sustava ļestica ï sustavi s maksimalno prebrojivo mnogo stupnjeva slobode gibanja i
- mehaniku kontinuuma ï sustavi s neprebrojivo mnogo stupnjeva slobode gibanja (fluidi i elastiļna tijela).

Jednostavnosti radi, razmatraĺemo klasiļnu mehaniku sustava ļestica.

Gibanje je promjena poloģaja ļestice u prostoru i vremenu. Vrijeme je homogen, a prostor homogen i izotropan skup toļaka. Po definiciji, u klasiļnoj fizici uzimamo da je prostor tro-dimenzionalni Euklidski (kvadrat udaljenosti meĽu toļkama dat je poopĺenjem Pitagorina teorema na tri dimenzije) prostor R^3, a vrijeme je jedno-dimenzionalni Euklidski prostor R.

U klasiļnoj mehanici, <u>stanje fizikalnog sustava u jednom trenutku vremena potpuno je odreĽeno poloģajem i brzinama svih ļestica tog sustava</u>.

Klasiļna mehanika, kao i cjelokupna fizika uostalom, bazira se na genijalnoj Newtonovoj realizaciji da interakcije meĽu ļesticama (sile) odreĽuju kako ĺe se ļestica gibati, ģto se moģe matematiļki izraziti jednadģbom gibanja ļestice. Jednadģbe gibanja ļestica su diferencijalne jednadģbe drugog reda po vremenu. Rjeģavanje jednadģbe gibanja ļestice uz poļetne uvjete ï poļetni poloģaj i poļetnu brzinu, onda kompletno odreĽuje putanju ļestice. Na taj naļin se moģe rjeģiti problem gibanja svakog fizikalnog sustava. Osnovna ideja fizike je:

Ako znamo interakcije (sile) među česticama nekog (izoliranog) fizikalnog sustava i stanje sustava u jednom (početnom) trenutku vremena, znat ćemo stanje tog sustava u bilo kojem trenutku vremena (naravno, uspijemo li riješiti jednadžbe gibanja).

Jedna od najvaģnijih karakteristika klasiļne mehanike je postojanje nekoliko razliļitih ekvivaletnih formulacija teorije:

- Newtonova formulacija mehanike,
- Lagrangeov formalizam,
- Hamiltonov formalizam,
- Hamilton-Jacobijeva teorija.

U principu, svaki problem moģe se rjeģiti koriģtenjem bilo koje od ovih formulacija, ali razliļite formulacije prilagoĽene su razliļitim tipovima problema. Npr., gibanje sustava s vezama (constaints) lakģe je rjeģavati Lagrangeovim, nego Newtonovim formalizmom.

Danas se Hamiltonova (kanonska) formulacija klasiļne mehanika smatra prototipom za bilo koju fizikalnu teoriju.

Slijedeĺi povijest, razmotrimo prvo ukratko Newtonovu formulaciju klasiļne mehanike.

1. Newtonova mehanika

Definirajmo prvo neke od osnovnih matematičkih koncepata neophodnih za razmatranje gibanja sustava čestica.

1.1 Koordinatni sustavi

Položaj čestice u bilo kojem trenutku vremena t je točka u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru R^3. Da bi odredili položaj čestice moramo specificirati prostorni koordinatni sustav (prostorni dio referentnog sustava) koji je određen izborom ishodišta i trima međusobno okomitim koordinatnim osima kroz ishodište.

Od različitih mogućih općih ortogonalnih koordinatnih sustava, najčešće se koriste Kartesijev, koji je najjednostavniji, ili cilindrični ili sferni koordinatni sustav. Bazis prostora čine tri jedinična vektora koordinatnih osi sustava S, tj.

$$S : \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\},$$

koji zadovoljavaju uvjete ortonormiranosti i kompletnosti:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{– uvjet ortonormiranosti i}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \hat{e}_i \hat{e}_j = 1 \quad \text{– uvjet kompletnosti.}$$

Vektor položaja ili radijus vektor $\vec{r}$ točke u prostoru je vektor čiji je početak u ishodištu, a kraj u zadanoj točci prostora. U koordinatnom sustavu S radijus vektor točke jednoznačno je određen razvojem po bazisu prostora, tj. svojim komponentama r_i duž koordinatnih osi:

$$\vec{r} = \sum_i \hat{e}_i r_i \quad ; \quad r_i = \vec{r}\,\hat{e}_i . \tag{1.1}$$

Eksplicitno, za Kartezijev sustav (x,y,z) je:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k},$$

za cilindrični sustav (ρ,φ,z) je:

$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z,$$

a, za sferni sustav (r,θ,φ) je:

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r .$$

Ponekad je korisno radijus vektor točke prikazati kao uređenu trojku realnih brojeva ili kao 3×1 matricu na jeziku linearne algebre

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

U svakom trenutku čestica je u nekoj točci prostora. Radij vektor čestice je radij vektor točke u kojoj se nalazi čestica. Gibanje čestice je promjena njenog položaja u prostoru. Matematički to prikazujemo radijus vektorom čestice koji je funkcija vremena $\vec{r}(t)$, što je u bilo kojem ortogonalnom koordinatnom sustavu daje parametarsku (pomoću parametra t) jedanadžbu putanje čestice:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = r_1(t) \\ r_2 = r_2(t) \\ r_3 = r_3(t) \end{cases}.$$

Brzina $\vec{v}$ i akceleracija $\vec{a}$ čestice su prva i druga derivacija po vremenu radijus vektora čestice respektivno, tj.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \;;\; \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}}. \qquad (1.3)$$

Npr. za slobodni pad čestice u blizini površine Zemlje (gibanje duž z-osi pod djelovanjem samo težine čestice) su akceleracija, brzina i jednadžba putanje:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -g\,\hat{k}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath} + (-g\,t + v_{0z})\,\hat{k}$$
$$\vec{r}(t) = (v_{0x}t + x_0)\,\hat{\imath} + (v_{0y}t + y_0)\,\hat{\jmath} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0\right)\hat{k}.$$

Pravac brzine čestice je tangenta na putanju u svakoj točci, tj. $\vec{v} = v\hat{t}$, što se lako vidi iz

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{t}\,\dot{s} = v\,\hat{t},$$

gdje je ds diferencijal duljine luka prostorne krivulje koja je putanja čestice, a $\hat{t}$ je jedinični vektor tangente na putanju čestice

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Akceleracija čestice ima u općem slučaju i tangencijalnu i radijalnu (centripetalnu) komponentu: $\vec{a} = a_t\hat{t} + a_r\hat{n} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{R}\hat{n}$, gdje su $\hat{t}$ i $\hat{n}$ jedinični vektori tangente i glavne normale na krivulju koja je putanja čestice, a R je radijus zakrivljenosti putanje.

Brzina čestice u svakom trenutku ima pravac tangente na putanju, dok pravac akceleracije može tvoriti bilo koji kut u odnosu na putanju.

Za računanje komponenti brzine i ubrzanja čestice, tj. pri deriviranju izraza (1.1) treba voditi računa o derivacijama bazis vektora jer je:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i (\dot{\hat{e}}_i r_i + \hat{e}_i \dot{r}_i)\,. \tag{1.4}$$

Samo u Kartezijevom sustavu su sva tri jedinična vektora koordinatnih osi konstantni vektori čije derivacije su nula, tj.

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

U bilo kojem ortogonalnom koordinatnom sustavu čije su koordinate $\{q_1, q_2, q_3\}$ brzina čestice je:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \hat{e}_i\,.$$

Komponente brzine čestice su:

$$v_i = h_i \dot{q}_i\,, \quad (i = 1,2,3),$$

dok je kvadrata brzine čestice:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \sum_i h_i^{\,2} \dot{q}_i^{\,2}\,, \tag{1.5}$$

gdje su Lameovi koeficijenti $h_i = \left| \frac{d\vec{r}}{dq_i} \right|$. Eksplicitno, Lameovi koeficijenti su:

Kartezijev sustav: $h_x = h_y = h_z = 1$,

cilindrični sustav: $h_\rho = 1$; $h_\varphi = \rho$; $h_z = 1$,

sferni sustav: $h_r = 1$; $h_\theta = r$; $h_\varphi = r\sin\theta$,

što omogućuje računanje u svakom koordinatnom sustavu.

Razmotrimo sad rotaciju koordinatnog sustava.

Neka imamo dva prostorna koordinatna sustava S i S′ koji su zarotirani jedan u odnosu na drugi. Jednostavnosti radi zamislimo da su im ishodišta u istoj točci prostora (prostornom translacijom ishodište jednog koordinatnog sustava može se uvijek premjestiti u točku koja je ishodište drugog sustava). Komponente nekog vektora $\vec{r}$ u dva sustava određene su izrazima:

$$\vec{r} = \sum_i \hat{e}_i r_i = \sum_i \hat{e}_i' r_i'\,. \tag{1.6}$$

Množeći gornju relaciju s $\hat{e}_j'$ i koristeći uvjet ortonormiranosti jediničnih vektora odmah se dobija

$$\vec{r}\,\hat{e}_j' = \sum_i r_i'\hat{e}_i'\hat{e}_j' = r_j' = \sum_i \hat{e}_i\hat{e}_j' r_i = \sum_i R_{ji} r_i \,.$$

Kako gornja relacija vrijedi za proizvoljni vektor, mora vrijediti:

$$r_j' = \sum_i R_{ji} r_i = \sum_i \left(\hat{e}_j'\hat{e}_i\right) r_i \,,$$

ili u vektorskoj notaciji $\vec{r}' = R\,\vec{r}$, gdje je R matrica rotacije. Kako za proizvoljno r_i vrijedi

$$\vec{r} = \sum_j r_j'\hat{e}_j' = \sum_{i,j} R_{ji} r_i \hat{e}_j' = \sum_i r_i \hat{e}_i \,,$$

slijedi da pri rotaciji koordinatnog sustava među bazisnim vektorima dva sustava postoji matrična relacija:

$$\hat{e}_i = \sum_j \hat{e}_j' R_{ji} \;;\quad \hat{e}_i' = \sum_j \hat{e}_j R^T_{ji} \;;\quad R_{ij} = \hat{e}_i'\hat{e}_j . \tag{1.7}$$

Kako pri rotaciji intenzitet vektora ostaje nepromjenjen, vrijedi

$$\begin{aligned} r'^2 = \vec{r}'\vec{r}' &= \sum_i r_i' r_i' = \sum_{i,j,k} r_j R_{ij} R_{ik} r_k = \sum_{i,j,k} r_j \left(R^T\right)_{ji} R_{ik} r_k = \sum_{i,k} r_j \left(R^T R\right)_{jk} r_k = \sum_{i,j} r_i \delta_{ij} r_j \\ &= \sum_i r_i r_i = \vec{r}\,\vec{r} = r^2 \,, \end{aligned}$$

ili u matričnoj notaciji

$$RR^T = R^T R = 1 \quad \text{i} \quad \det R = 1, \tag{1.8}$$

tj. matrica rotacije R je realna ortogonalna 3×3 matrica čiji elementi su kosinusi pravaca koordinatnih osi jednog sustava u odnosu na drugi.

Relacija koja povezuje koordinate vektora $\vec{r}$ u dva sustava je onda:

$$\vec{r} = \sum_i \hat{e}_i r_i = \sum_{i,j} \hat{e}_j' R_{ji} r_i = \sum_j \hat{e}_j' r_j' \quad \Rightarrow \quad r_j' = \sum_i R_{ji} r_i \,.$$

U jednostavnijoj, matričnoj notaciji zadnja relacija je:

$$\vec{r}' = R\,\vec{r} \qquad \text{ili} \qquad \vec{r} = R^T\,\vec{r}' . \tag{1.9}$$

1.2 Galilejeve transformacije

U mehanici postoje samo tri osnovne fizikalne veliļine (svaka druge fizikalna veliļina moģe se izvesti iz njih):

- Duljina, osnovna jedinica metar: m
- Vrijeme, osnovna jedinica sekunda: s
- Masa, osnovna jedinica kilogram: kg.

Kako je svako gibanje relativno, razmatranje problema gibanja bilo kojeg fizikalnog sustava zahtijeva da svaki promatraļ (fiziļar) definira svoj referentni sustava ï njegov prostorni i vremenski koordinatni sustav. U praksi je to obiļno sustav vezan za laboratorij u kome se vrģe mjerenja. Specijalna klasa referentnih sustava u kojima zakoni mehanike imaju naj-jednostavniju formu su inercijalni referentni sustavi.

Definicija: **Inercijalni referentni sustav** Referentni sustav u odnosu na koji je: • prostor homogen i izotropan, • vrijeme homogeno, je inercijalni referentni sustav.

Homogenost znaļi da nema specijalnih toļaka u prostoru ili trenutaka u vremenu, dok izotropnost prostora znaļi ekvivalentnost svih pravaca. Time se osigurava da se bilo koja toļka prostora ili vremena moģe odabrati za ishodiģte, kao i da bilo koji pravac u prostoru promatraļ moģe odabrati za koordinatnu os.

U homogenom i izotropnom prostoru i vremenu, bilo koja dva inercijalna referentna sustava (IRSa) S i S´ mogu se razlikovati samo po 4 elementa:

1. Ishodiģta prostornih sustava su u razliļitim toļkama prostora,
2. Ishodiģta vremenskih sustava su razliļiti vremenski trenutci,
3. Prostorne koordinatne osi nisu paralelne i
4. Jedan sustav se giba konstantnom brzinom $\vec{V}$ u odnosu na drugi!

Ako ģelimo dva proizvoljna IRS-a dovesti do poklapanja, ili prijeĺi iz jednog u drugi IRS, kako se kaģe, dovoljno je napraviti ļetiri prostorno-vremenske transformacije:

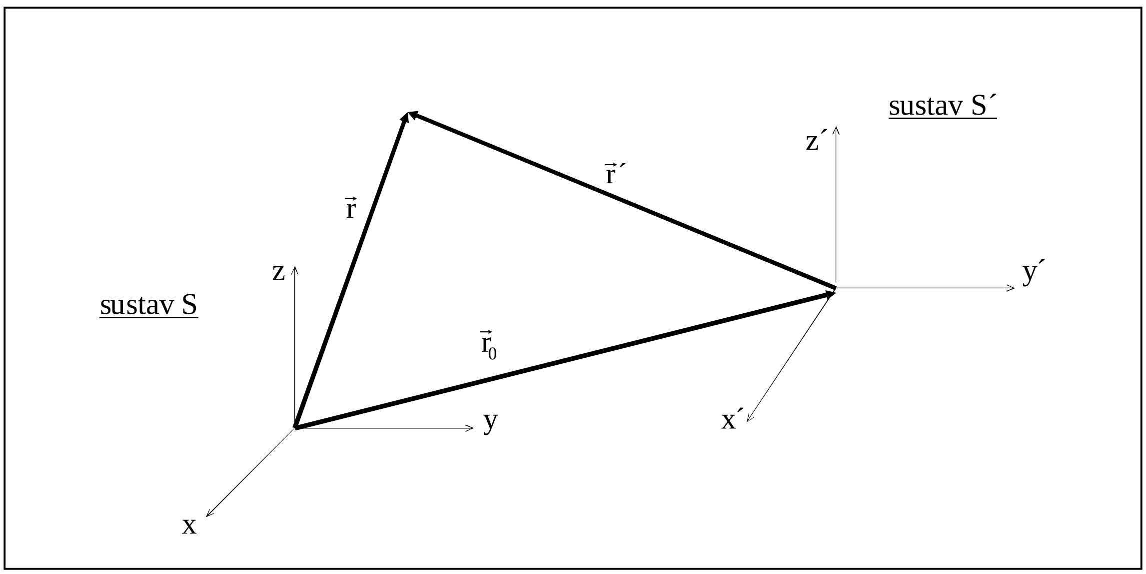
1. Prostornu translaciju svih toļaka u prostoru za vektor OO´ (udaljenost dvaju ishodiģta) da bi ishodiģta prostornih koordinata bila u istoj toļci,
2. Vremensku translaciju da se poklope ishodiģta vremenskih koordinata,
3. Prostornu rotaciju oko neke osi kroz ishodiģta da se poklope koordinatne osi i
4. Specijalnu Galilejevu transformaciju (potisak) odreĽenu brzinom $\vec{V}$.

Skup svih takvih prostorno-vremenskih transformacija tvori grupu koja se naziva Galilejeva grupa. To je 10-parametarska kontinuirana grupa, koja pojednostavljeno govoreći, sadrži četiri podgrupe:

1. Grupu prostornih translacija (3 parametra neophodna da jednoznačno odrede element grupe – tri komponente vektora translacije),
2. Grupu vremenskih translacija (1 parametar),
3. Grupu prostornih rotacija (3 parametra) i
4. Grupu specijalnih Galilejevih transformacija, tj. potisaka (3 parametra).

Transformacije koordinata i vremena kojima se prelazi iz jednog u drugi IRS u klasičnoj mehanici nazivaju se Galilejeve transformacije.

Zamislimo da imamo dva IRS-a. Jedan uvjetno mirni S, čije su prostorno-vremenske koordinate $(\vec{r}, t) = (x,y,z,t)$ i drugi S´ s paralelnim osima, u kojemu su odgovarajuće koordinate $(\vec{r}\,', t') = (x',y',z',t')$. Neka se sustav S´ giba brzinom $\vec{V} = \overrightarrow{\text{const}}.$ u odnosu na S kao na Slici 1.



Slika 1.

Ishodište O´ sustava S´ u S određuje radijus vektor $\vec{r}_0(t) = \vec{V}t + \vec{q}$, gdje je $\vec{q}$ udaljenost dva ishodišta u trenutku $t = 0$. Transformacije iz S u S´ su očito:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - V_x t - q_x \\
y' &= y - V_y t - q_y \\
z' &= z - V_z t - q_z \\
t' &= t + t_0
\end{aligned}
\qquad \text{ili u vektorskom obliku:} \qquad
\begin{aligned}
\vec{r}\,' &= \vec{r} - \vec{V}t - \vec{q} \\
t' &= t + t_0
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Zadnji redak u relaciji (1.10) znači da vrijeme teče istom brzinom i u S i u S´, ali se vremenska ishodišta dva sustava ne poklapaju, po analogiji s prostornim ishodištima. Bez gubitka općenitosti, lako je zamisliti da su napravljene neophodne vremenske ($t_0 = 0$) i prostorne translacije ($\vec{q} = 0$) tako da se ishodišta oba sustava poklapaju u početnom trenutku: $t = t' = 0$. Zato se Galilejeve transformacije najčešće pišu bez ovih konstanti u obliku:

$$x' = x - V_x t$$
$$y' = y - V_y t \qquad\qquad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V} t \qquad (1.11)$$
$$z' = z - V_z t \qquad \text{ili u vektorskom obliku:} \qquad t' = t$$
$$t' = t$$

Dva IRS-a su potpuno ravnopravna, pa je iz (1.11) lako naći inverznu transformaciju iz sustava S´ u sustav S (zamijeniti "crtane" i "necrtane" koordinate te promijeniti $\vec{V}$ u $-\vec{V}$):

$$x = x' + V_x t'$$
$$y = y' + V_y t' \qquad\qquad \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V} t' \qquad (1.11')$$
$$z = z' + V_z t' \qquad \text{ili u vektorskom obliku:} \qquad t = t'$$
$$t = t'$$

Galilejeve transformacije za bilo koje dvije točke u prostoru: $\vec{r}_2\,' = \vec{r}_2 - \vec{V} t$ i $\vec{r}_1\,' = \vec{r}_1 - \vec{V} t$, oduzimanjem daju:

$$\vec{r}\,'_{12} \equiv \vec{r}\,'_2 - \vec{r}\,'_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv \vec{r}_{12}\ , \quad t'_{12} \equiv t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 \equiv t_{12}, \qquad (1.12)$$

ili u infinitezimalnom obliku:

$$d\vec{r}\,' = d\vec{r} \quad \text{i} \quad dt' = dt. \qquad (1.12')$$

Proizilazi da su udaljenost dviju točaka i duljina vremenskih intervala invarijantni pri Galilejevim transformacijama – ova tvrdnja se ponekad naziva apsolutnost prostora i vremena u klasičnoj fizici. Ovo je potpuno u skladu s našim svakodnevnim iskustvom i intuicijom u makrosvijetu – kad specificiramo dimenzije tijela i duljine trajanja vremenskih intervala podrazumijevamo da su to jednoznačne veličine i ne moramo razmišljati gdje, kada i kako su te veličine mjerene.

Za opis gibanja trebaju nam pored položaja još i brzina i akceleracija čestica. Iz relacije (1.12´) slijedi da je d/dt = d/dt´, pa deriviranjem po vremenu iz (1.11) ili (1.11´) dobijamo:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}\,. \qquad (1.13)$$

Kako je $\vec{V} = \overrightarrow{\text{const.}}$ za ubrzanje nalazimo

$$\vec{a}\,' = \vec{a}\,. \qquad (1.14)$$

Izraz (1.13) je zakon slaganja brzina u klasičnoj mehanici – brzina čestice u mirnom sustavu jednaka je zbroju brzine čestice u pokretnom sustavu i brzine samog pokretnog sustava. Jednakost (1.14) pokazuje invarijantnost akceleracija pri Galijevim transformacijama.

Napomena: Na pitanje da li je neki određeni sustav referencije inercijalni ili neinercijalni može se odgovoriti samo eksperimentom – ako važe Newtonovi postulati sustav je inercijalni!

Za svaku ļesticu definira se njen impuls (koliļinu gibanja).

Definicija: **Impuls čestice $\vec{p}$**

Impuls ļestice mase m i brzine $\vec{v}$ je: $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$.

Impuls sustava ļestica je vektorski zbroj impulsa svih pojedinih ļestica.

1.3 Newtonovi postulati

Sir Isaac Newton (1643-1727) je 1687. u svom glavnom djelu: «Philosophiae naturalis principia mathematica» formulirao skup fundamentalnih postulata koji predstavljaju temelj klasiļne mehanike. Iako se najļeģĺe govori o Newtonovim zakonima, logiļki primjereniji termin je postulat, jer se radi o osnovnim tvrdnjama teorije koje ne slijede iz nekih elementarnijih i ļija valjanost se moģe samo usporeĽivati s rezultatima eksperimenata. Za jednu ļesticu (najjednostavniji fizikalni sustav) Newtovi zakoni su:

Newtonovi postulati

Zakon inercije (lex prima)
U inercijalnom referentnom sustavu impuls slobodne ļestice, tj. ļestice na koju je ukupna sila nula, je oļuvan (zakon oļuvanja impulsa)

$$\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}(t) = \text{const.} \tag{1.15}$$

Jednadžba gibanja (lex secunda)
U inercijalnom referentnom sustavu promjena (derivacija po vremenu) impulsa ļestice jednaka je ukupnoj sili koja djeluje na ļesticu.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{uk}. \tag{1.16}$$

Zakon akcije i reakcije (lex tertia) - definicija sile
Sile $\vec{F}_{ij}$ (akcija) i $\vec{F}_{ji}$ (reakcija) kojima ļestice Ăiñ i Ăjñ djeluju jedna na drugu zadovoljavaju

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \tag{1.17}$$

U originalnom Newtonovom djelu definicija ukupne sile (rezultante) je nazvana postulatom ï sila je vektorska veliļina, a zbrajanje sila koje djeluju na ļesticu je uobiļajena operacija zbrajanja vektora koju danas ne nazivamo zakonom.

Princip superpozicije (lex quarta)
Sile su vektori i ukupna sila $\vec{F}_{uk}$ na ļesticu Ăiñ je vektorski zbroj svih sila koje na nju djeluju

$$\vec{F}_{uk} = \sum_j \vec{F}_{ij}. \tag{1.18}$$

Prvi zakon je oļigledno specijalni sluļaj drugog. Newtovi zakoni su formulirani za najjednostavniji fizikalni sustav ï jednu ļesticu. Koristeĺi princip superpozicije napraviĺemo poopĺenje na sustav ļestica.

Drugi Newtonov zakon je jednadġba gibanja ļestice: $\vec{F} = m\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}$ (m = const.). Sile su funkcije samo poloġaja i brzina ļestica (i moġda eksplicitna funkcija vremena), pa je jednadġba gibanja (klasiļne) ļestice:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t), \tag{1.19}$$

obiļna diferencijalna jednadġba II reda (vektorska) ļije rjeġenje putanja je ļestice $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Najvaġnije sile u klasiļnoj fizici su funkcije samo relativne udaljenosti ļestica. To su gravitacijska, elektriļna sila ili elestiļna sila:

$$\vec{F}_{ij} = -G\, m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3}\ ; \quad \vec{F}_{ij} = \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^3}\ ; \quad \vec{F}_{ij} = -k\left[\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| - \vec{r}_0\right].$$

Postoje i kompliciranije sile, kao magnetska sila, koje zavise i od brzina ļestica. Zbog atomistiļke graĽe tvari u klasiļnoj fizici se koriste i razne fenomenoloġke sile koje su rezultat astronomskog broja atomskih/molekularnih interakcija ï sila otpora podloge, napetosti niti, sile trenja i sile uzgona.

Napomena: U II Newtonovom zakonu pojavljuje se «inercijalna» masa m_{in} ļestice, a u Newtonovom zakonu gravitacije «gravitacijska» masa m_{gr} ļestice. Eksperimentalno je utvrĽeno da su ova dva tipa mase proporcionalna ï ako odaberemo sustav jedinica u kome je $m_{in} = m_{gr}$, onda je gravitacijska konstanta $G = (6{,}67259 \pm 0{,}00085)\times 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}. U klasiļnoj fizici nema objaġnjenja za ovu jednakost. Jednakost inercijalne i gravitacijske mase naziva se Princip ekvivalencije. To je bio poļetni korak u Einsteinovom razvoju nove teorije gravitacije ï OpÍe teorije relativnosti (1916.).

TreÍi Newtonov zakon uz princip superpozicije omoguÍuje laku generalizaciju na sustav ļestica. Ako imamo sustav od N ļestica s masama m_i (i = 1,2,....,N) jednadġba gibanja za i-tu ļesticu je:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{\,ext.}, \tag{1.20}$$

gdje je $\vec{F}_i^{\,ext.}$ ukupna spoljaġnja sila na i-tu ļesticu, a $\vec{F}_{ij}$ je unitarnja sila kojom ļestica *j* djeluje na ļesticu *i*. Ako je sustav izoliran, nema spoljaġnjih sila $\vec{F}_i^{\,ext.} = 0$. Tada je desna strana jednadġbe gibanja *i*-te ļestice (1.20) funkcija samo relativnog poloġaja $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ i relativnih brzina ļestica $\vec{v}_{ij} = \dot{\vec{r}}_{ij} = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j$, ali nije eksplicitna funkcija vremena.

KoristeÍi (1.12) ï (1.14) lako se pokazuje invarijantnost Newtonovih postulata, tj. jednadġbi gibanja ļestica (1.20), pri Galilejevim transformacijama.

Kako Galilejeva grupa ima 10 parameta, prema Noether teoremu (dokaz u odjeljku 2.) oļekujemo da Íe izolirani fizikalni sustav imati 10 oļuvanih veliļina! Oļuvane veliļine su naravno: energija, ukupni impuls, ukupni moment impulsa (angularni moment) i zakon gibanja centra mase.

1.4 Zakoni očuvanja

Direktna posljedica II Newtonovog zakona (ili I zakon) je zakon oļuvanja impulsa.

Zakon očuvanja impulsa čestice:

Ako je ukupna sila na ļesticu jednaka nuli, impuls ļestice je oļuvana veliļina.

$$\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = \text{const.} \tag{1.21}$$

Definirajmo rad, snagu i kinetiļku energiju.

Definicija: **Rad** W**, snaga** P **i kinetička energija** T

- Element rada dW sile $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ pri infinitezimalnom pomaku ļestice $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\,dt$ je:

$$dW = \vec{F}\,d\vec{r} = F dr \cos\angle(\vec{F}, d\vec{r})$$

  Pri pomaku ļestice iz toļke $\vec{r}_1$ u toļku $\vec{r}_2$ duģ krivulje C rad sile $\vec{F}$ je:

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2, C) = \int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\dot{\vec{r}}\,dt. \tag{1.22}$$

- Snaga P je rad u jedinici vremena, tj:

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\,\dot{\vec{r}}\,. \tag{1.23}$$

- Kinetiļka energija T ļestice je:

$$T(t) = \frac{\vec{p}^{\,2}(t)}{2m} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2}. \tag{1.24}$$

Kinetiļka energija sustava ļestica je zbroj kinetiļkih energija svake pojedine ļestice.

Iz (1.22) i II Newtonovog zakona odmah slijedi:

Teorem o radu i kinetičkoj energiji:

Rad ukupne sile na ļesticu jednak je promjeni njene kinetiļke energije. Zaista,

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2, C) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{uk}\,\dot{\vec{r}}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}}\,\dot{\vec{r}}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}\right) = T_2 - T_1. \tag{1.25}$$

Specijalno vağna klasa sila koje ne zavise od vremena, niti od brzina ļestica, veĺ samo od poloğaja ļestica, su **konzervativne sile**. Najvağnije sile u klasiļnoj mehanici upravo su konzervativne sile. <u>Ako su sve sile koje djeluju na ļestice nekog fizikalnog sustava konzervativne kağemo da je taj sustav konzervativan</u>. Za konzervativne sustave vaği zakon oļuvanja energije.

Definicija: **Konzervativne sile** Slijedeĺi iskazi su meĽusobno ekvivalentni: 1. Sila $\vec{F}(\vec{r})$ je konzervativna. 2. $\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$. 3. Konzervativna sila $\vec{F}(\vec{r})$ je negativni gradijent skalarnog polja $V(\vec{r})$ koje se naziva potencijal, tako da je: $$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}\,. \qquad (1.26)$$ Ovaj iskaz se najļeğĺe navodi kao definicija konzervativne sile. Potencijal je definiran do na proizvoljnu aditivnu konstantu $\Leftrightarrow$ odabir toļke $\vec{r}_0$. 4. Rad konzervativne sile ne zavisi od puta, veĺ samo od poļetnog i krajnjeg poloğaja: $$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2, C) = W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla V(\vec{r})\,d\vec{r} = -\left[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)\right]. \qquad (1.27)$$ 5. Diferencijal rada konzervativne sile $dW = \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$ je totalni diferencijal.

<u>Napomena</u>: Potencijal je potencijalna energija po ļestici. Potencijalna energija zavisi od poloğaja para ļestica, a potencijal je funkcija poloğaja samo jedne ļestice. Npr. gravitacijska potencijalna energija para ļestica m_1 i m_2 je:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}, \qquad (1.28)$$

a, gravitacijski potencijal $V(\vec{r}_1)$ ļestice Ă1ñ u gravitacijskom polju ļestice Ă2ñ je $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ promatran kao funkcija samo od $\vec{r}_1$, tako da je gravitacijska sila na ļesticu Ă1ñ:

$$\vec{F}_{12} = -\nabla V(\vec{r}_1) = -\nabla_1 U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\,.$$

Zbog antisimetriļnosti vektora relativnog poloğaja ļestica $\vec{r}_{12}$, je naravno:

$$\vec{F}_{21} = -\nabla V(\vec{r}_2) = -\nabla_2 U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{F}_{12}\,.$$

Iz (1.25) i (1.27) odmah slijedi:

Zakon očuvanja energije za česticu:

Ako na ļesticu djeluju samo konzervativne sile, energija ļestice je oļuvana veliļina:

$$E = T + U = \text{const.} \tag{1.29}$$

U sluļaju rotacionog gibanja vaģne su angularne (kutne) veliļine.

Definicija: **Moment impulsa (angularni moment) $\vec{l}$ i moment sile $\vec{M}$**

- Moment impulsa ļestice je: $\vec{l}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)\,.$ (1.30)
- Moment sile $\vec{F}$ je: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\,.$ (1.31)

Mnoģeĺi slijeva s radijus vektorom, II Newtonov zakon daje:

$$\vec{M}(t) = \frac{d\vec{l}(t)}{dt}\,. \tag{1.32}$$

Iz (1.32) odmah slijedi zakon oļuvanja angularnog momenta.

Zakon očuvanja momenta impulsa čestice:

Ako je moment ukupne sile na ļesticu jednak nuli, moment impulsa ļestice je oļuvana veliļina.

$$\vec{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{l} = \text{const.} \tag{1.33}$$

Moment ukupne sile na ļesticu je nula ako je ukupna sila nula ili ako je sila centralna. Sila je centralna ako je paralelna (antiparalelna) radijus vektoru ļestice. Angularni moment ļestice na koju djeluju samo centralne sile je oļuvan.

Najvaģnije sile u klasiļnoj fizici su centralne konzervativne sile ï gravitacijska i elektriļna sila na primjer. Za takve sile je:

$$\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{r} \times \nabla U(\vec{r}) = 0\,.$$

U sfernim koordinatama je: $\vec{r} = r\hat{e}_r$ i $\nabla U = \hat{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, pa zadnja jednadžba daje: $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, što znači da potencijalna energija konzervativne centralne sile zavisi samo od intenziteta radijus vektora: $U = U(r)$. Za takav potencijal (pot. energiju) kažemo da je rotaciono invarijantan ili da je sferno simetričan.

Općenito, potencijalna energija para čestica „i" i „j" koje jedna na drugu djeluju konzervativnim centralnim silama zavisi samo od intenziteta vektora relativnog položaja čestica $\vec{r}_{ij}$, tj. $U_{ij} = U_{ij}(|\vec{r}_{ij}|)$, kao u (1.28). Negativni gradijent ∇_i takve potencijalne energije po komponentama radijus vektora i-te čestice daje konzervativnu centralnu silu $\vec{F}_{ij}$ na i-tu česticu, tj.

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}(r_{ij}) = -\nabla_i U_{ij}\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right). \tag{1.34}$$

koja djeluje duž pravca $\vec{r}_{ij}$.

Svi zakoni očuvanja lako se generaliziraju na sustav čestica.

Za svaki fizikalni sustav postoji jedna točka koja se naziva centar mase sustava.

Definicija: **Centar mase $\vec{r}_C$ sustava čestica**

Radijus vektor $\vec{r}_C$ centra mase sustava N čestica s masama m_i je:

$$\vec{r}_C(t) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t), \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i . \tag{1.35}$$

Na primjer, centar mase sustava dviju čestica je na segmentu pravca određenog tim česticama bliže čestici veće mase.

Za sustav sa kontinuiranom distribucijom mase (neprebrojivo mnogo čestica) gustoće $\rho(\vec{r},t)$ sumacija po česticama u (1.35) prelazi u volumni integral:

$$\vec{r}_C(t) = \frac{1}{M}\int d^3r\, \vec{r}\, \rho(\vec{r},t), \quad M = \int d^3r\, \rho(\vec{r},t) = \text{const.} \tag{1.35´}$$

U problemima u kojima nas zanima samo gibanju sustava kao cjeline, tj. ako možemo zanemariti gibanje jedne čestice u odnosu na drugu, u prvoj aproksimaciji, cijeli sustav čestica možemo smatrati jednom česticom mase M čiji je položaj određem radijus vektorom centra mase $\vec{r}_C$.

Za svaki fizikalni sustav, osnovne fizikalne veličine sustava čestica – kinetička energija i moment impulsa sustava na prirodan način se razlažu na zbroj dva člana, jednog koji predstavlja gibanje centra mase i drugog koji predstavlja gibanje u odnosu na centar mase.

Radijus vektor $\vec{r}_i$ svake ļestice moģemo razloģiti na zbroj radijus vektora centra mase $\vec{r}_C$ i radijus vektor $\vec{r}_i{}'$ u odnosu na koordinatni sustav s ishodiģtem u centru mase:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i{}', \tag{1.36}$$

ģto deriviranjem za brzine ļestica daje:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{r}}_i{}'. \tag{1.37}$$

Prema definiciji (1.35) je:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0 \quad \text{i} \quad \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i{}' = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i{}'\right) = 0,$$

pa je impuls sustava ļestica jednak impulsu centra mase:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{r}}_i{}'\right) = M\dot{\vec{r}}_C .$$

Koristeĺi (1.36) i (1.37), kinetiļka energija sustava je:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{r}}_i{}'\right)^2 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_C^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i{}'^{2} = T_C + T', \tag{1.38}$$

a, angularni moment je:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_C + \vec{r}_i{}'\right) \times \left(\dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{r}}_i{}'\right) = M\vec{r}_C \times \dot{\vec{r}}_C + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}' = \vec{L}_C + \vec{L}'. \tag{1.39}$$

Relacija (1.38) pokazuju da je kinetiļka energija sustava ļestica zbroj kinetiļke energije T_C centra mase i kinetiļke energije T' za gibanje u odnosu na centar mase. Analogan rezultat za angularni moment sustava ļestica je relacija (1.39).

Ako zbrojimo jednadģbe gibanja (1.20) svih ļestica sustava dobijamo:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right) + \sum_i \vec{F}_i^{\,ext.} = \vec{F}^{ext.} \tag{1.40}$$

pa impuls cijelog sustava zavisi samo od vanjskih sila i vrijedi zakon oļuvanja impulsa:

Zakon očuvanja impulsa $\vec{P}$ sustava čestica (I Newtonov zakon):

Ako je ukupna spoljaģnja sila na sustav ļestica nula, impuls $\vec{P}$ fizikalnog sustava je oļuvana veliļina.

$$\vec{F}^{ext.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{const.} \tag{1.41}$$

Prema (1.35) impuls sustava je:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_C \text{ , pa slijedi: } \vec{F}^{ext.} = M\ddot{\vec{r}}_C , \tag{1.42}$$

ģto znaļi da se centar mase giba kao imaginarna ļestica na koju djeluje ukupna spoljaģnja sila i ļija masa je masa cijelog sustava. Ako je sustav izoliran ili ako je ukupna vanjska sila nula, $\ddot{\vec{r}}_C = 0$, te se centar mase sustava ļestica giba konstantnom brzinom $\dot{\vec{r}}_C = \text{const.}$ Iz (1.42) odmah slijedi:

Zakon gibanja centra mase sustava čestica:

Centar mase izoliranog sustava ($\vec{F}^{ext.} = 0$) giba se tako da je

$$M\vec{r}_C - t\vec{P} = \text{const.} \tag{1.43}$$

oļuvana veliļina.

Angularni moment fizikalnog sustava je zbroj angularnih momenata pojedinih ļestica, tj.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i . \tag{1.44}$$

Ukupni moment unutarnjih centralnih sila je nula, jer je za njih $\vec{F}_{ij} \uparrow\downarrow \vec{r}_{ij}$, pa je:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\times\vec{F}_{ij} = 0 ,$$

te je ukupni moment sile na sustav ļestica jednak ukupnom momentu spoljaģnjih sila i prema (1.20) i (1.44) je:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext.} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} . \tag{1.45}$$

Iz (1.45) odmah slijedi:

Zakon očuvanja agularnog momenta (momenta impulsa) $\vec{L}$ sustava čestica:

Ako je ukupni moment spoljaģnjih sila koje djeluju na sustav ļestica nula (i ako su sve unutarnje sile centralne) ukupni moment impulsa $\vec{L}$ fizikalnog sustava je oļuvana veliļina.

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.} \tag{1.46}$$

Pomnoġimo li jednadġbu gibanja i-te ļestice (1.20) njenom brzinom $\dot{\vec{r}}_i$ i zbrojimo po svim ļesticama za konzervativni fizikalni sustav dobijamo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j\right)\vec{F}_{ij} + \sum_i \dot{\vec{r}}_i \vec{F}_i^{ext.} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{\vec{r}}_{ij}\nabla_{ij}U_{ij}\left(\left|\vec{r}_{ij}\right|\right) - \sum_i \dot{\vec{r}}_i \nabla_i U_i^{ext.}(\vec{r}_i) =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}U_{ij}\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_i U_i^{ext.}\right) = -\frac{dU}{dt},$$

gdje je ukupna potencijalna energija sustava ļestica zbroj potencijalnih energija unutarnjih i spoljaġnjih konzervativnih sila:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i.j} U_{ij}(r_{ij}) + \sum_i U_i^{ext.} . \tag{1.47}$$

Gravitacijska, elektriļna ili elestiļna potencijalna energija para ļestica Äijñ su:

$$U_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \;;\quad U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \;;\quad U_{ij} = \frac{1}{2}k\left[\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| - r_0\right]^2 .$$

Gornji izraz odmah daje:

Zakon očuvanja energije E **sustava čestica**:

Energija konzervativnog fizikalnog sustava je oļuvana veliļina.

$$E = T + U = const. \tag{1.48}$$

Konaļno moġemo zakljuļiti da se svaki izolirani konzervativni fizikalni sustav giba tako da postoji 10 oļuvanih veliļina:

Zakoni očuvanja za izolirani konzervativni fizikalni sustav:

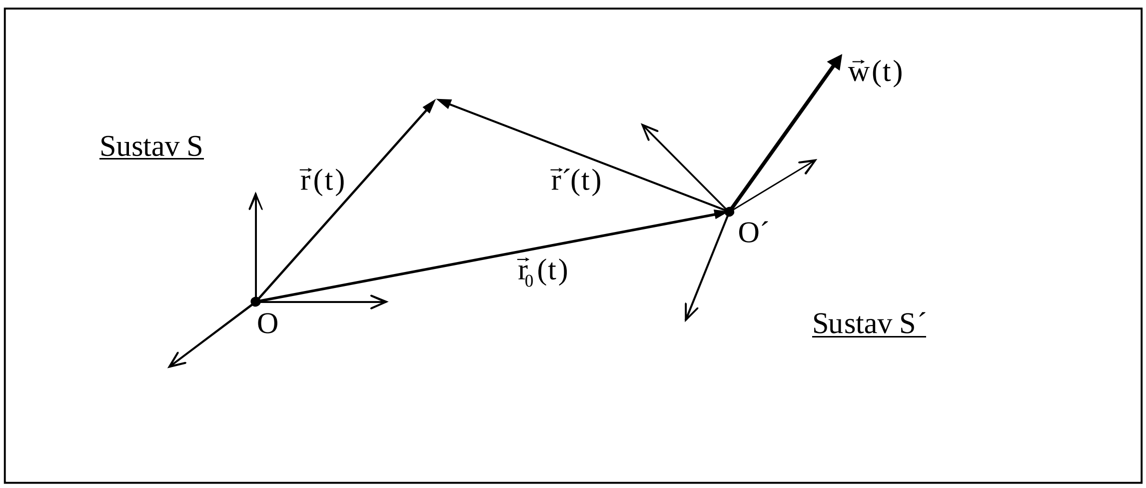
- $\vec{P} = const.$ – oļuvanje impulsa sustava, (1.41)
- $M\vec{r}_C - t\vec{P} = const.$ – gibanje centra mase, (1.43)
- $\vec{L} = const.$ – oļuvanje angularnog momenta, (1.46)
- $E = T + U = const.$ – oļuvanje energije. (1.48)

1.5 Neinercijalni referentni sustavi

Newtonovi zakoni važe u bilo kojem inercijalnom referentnom sustavu. Različiti inercijalni referentni sustavi gibaju se bez akceleracije, znači konstantnom brzinom, jedan u odnosu na drugi. Klasični princip relativnosti zahtijeva da fizikalni zakoni ostaju invarijantni pri promjeni inercijalnog referentnog sustava, što vodi na invarijantnost zakona mehanike pri Galilejevim transformacijama (1.10) kojima se u klasičnoj fizici prelazi iz jednog u drugi inercijalni referentni sustav (iz mirnog u pokretni IRS).

No, nisu svi referentni sustavi inercijalni. Što će se dogoditi ako neki promatrač odabere neinercijalni referentni sustav, tj. precizno, kako izgledaju jednadžbe gibanja fizikalnog sustava u neinercijalnom referentnom sustavu?

Neka imamo jedan inercijalni referentni sustav S i jedan neinercijalni (ubrzani) sustav S´. U općem slučaju ubrzano gibanje sustava S´ u odnosu na S sastoji se od rotacije i translacije. Rotacija neinercijalnog sustava S´ je rotacija oko neke osi koja prolazi kroz njegovo ishodište O´ , a translatorno gibanje sustava S´ u odnosu na S može se opisati kao promjena vektora $\vec{r}_0(t)$ koji spaja ishodišta, kao na Slici 2.



Slika 2.

Razmotrimo prvo slučaj čiste rotacije sustava S´ u odnosu na sustav S. Jednostavnosti radi, a bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da su ishodišta dva sustava u istoj točci, tj. da je $\vec{r}_0(t) = 0$, te kasnije dodati translaciju ishodišta.

Kao što smo već vidjeli u **1.1** dva koordinatna sustava S:$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ i S´:$\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ koji rotiraju jedan u odnosu na drugi povezuje vremenski zavisna (3×3) ortogonalna matrica rotacije R(t) koja zadovoljava relacije (1.7) i (1.8). Deriviranjem po vremenu iz (1.8) slijedi:

$$\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0\,,$$

što znači da je matrica $\Omega = R^T \dot{R}$ realna antisimetrična (3×3) matrica te se može predstaviti u obliku:

$$\Omega = R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

tj.

$$\Omega_{jk} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} w_i \ , \quad w_i \in R \ . \tag{1.49}$$

gdje je ε_{ijk} potpuno antisimetrični tenzor trećeg reda. Množeći (1.49) sa ε_{ljk} i koristeći relaciju: $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kjm} = -2\,\delta_{im}$ lako se invertira relacija (1.49):

$$w_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} \ . \tag{1.50}$$

Pokažimo da je $\vec{w} = \sum_i \vec{e}_i w_i$ vektor trenutne kutne brzine rotacije sustava S´ u odnosu na sustav S. Želimo naći relacije koje povezuju vremenske promjene fizikalnih veličina u dva koordinatna (referentna) sustava. Pri tome nas ne zanima totalna derivacija po vremenu (1.4), već samo vremenska promjena komponenti vektora koju bi izmjerili promatrači u dva sustava (bez uzimanja u obzir promjene bazisnih vektora sustava). Da istaknemo razliku u odnosu na uobičajenu potpunu vremensku derivaciju $\frac{d}{dt}$, takvu vremensku derivaciju označimo sa D , tj. definiramo:

$$D\vec{r} = \sum_i \vec{e}_i \dot{r}_i \quad ; \quad D'\vec{r} = \sum_i \vec{e}_i{}' \dot{r}_i{}' \ , \tag{1.51}$$

gdje su r_i i $r_i{}'$ komponente radijus vektora proizvoljne točke u dva sustava.

Prema (1.7) i (1.9) je

$$D'\vec{r} = \sum_i \vec{e}_i{}' \dot{r}_i{}' = \sum_{i,j} \vec{e}_i{}' \left(R_{ij} \dot{r}_j + \dot{R}_{ij} r_j \right) = \sum_j \vec{e}_j \dot{r}_j + \sum_{k,i,j} \vec{e}_k R^T{}_{ki} \dot{R}_{ij} r_j =$$
$$= D\vec{r} + \sum_{k,j} \vec{e}_k \Omega_{kj} r_j = D\vec{r} - \sum_{k,i,j} \vec{e}_k \varepsilon_{kij} w_i r_j = D\vec{r} - \vec{w} \times \vec{r} \ ,$$

tj. vrijedi:

Coriolisov teorem

Vremenska derivacija proizvoljnog vektora $\vec{r}$ u sustavu S´ koji rotira trenutnom kutnom brzinom $\vec{w}$ u odnosu na inercijalni sustav S je:

$$D'\vec{r} = D\vec{r} - \vec{w} \times \vec{r} \ . \tag{1.52}$$

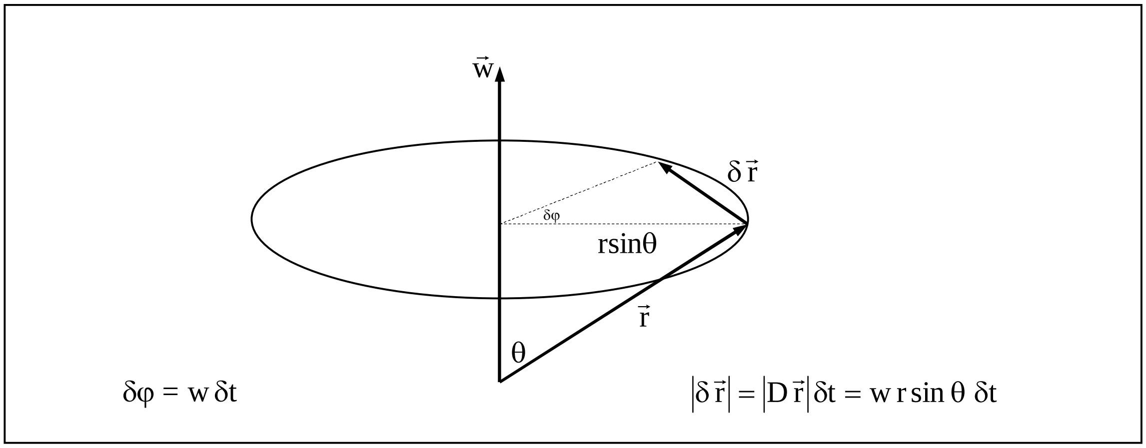
<u>Posljedica</u>: Vremenska derivacija trenutne kutne brzine rotacije ne zavisi od referentnog sustava, tj.

$$D'\vec{w} = D\vec{w} \ . \tag{1.53}$$

Znaļenje Coriolisovog teorema postaje oļigledno ako za $\vec{r}$ odaberemo konstantni vektor u sustavu S´ tj. uzmemo:

$$D'\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad D\vec{r} = \vec{w} \times \vec{r}\,. \tag{1.54}$$

U inercijalnom sustavu S infinitezimalna promjena $\delta\vec{r}$ vektora $\vec{r}$ za vrijeme δt je onda: $\delta\vec{r} = \vec{w} \times \vec{r}\,\delta t$ ġto je vektor okomit i na $\vec{w}$ i na $\vec{r}$ i predstavlja rezultat rotacije vektora $\vec{r}$ oko pravca paralelnog s pravcem $\vec{w}$ za kut $|\vec{w}|\,\delta t$ kao na Slici 3.,



Slika 3.

pa je jasno da je $\vec{w} = \dot{\varphi}$ trenutna kutna brzina rotacije neinercijalnog sustava S´.

Lako je ukljuļiti i translatorno gibanje sustava S´ jer je prema Slici 2. za proizvoljnu toļku u prostoru: $\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0(t)$.

Kako je sustav S inercijalni u njemu vaġe Newtonovi zakoni, tj. jednadġba gibanja ļestice je:

$$m\,D^2\vec{r} = \vec{F}\,. \tag{1.55}$$

Coriolisov teorem (1.52) onda daje:

$$\frac{\vec{F}}{m} = D^2\vec{r} = D^2\vec{r}\,' + D^2\vec{r}_0 = D\left(D'\vec{r}\,' + \vec{w}\times\vec{r}\,'\right) + D^2\vec{r}_0 =$$

$$= D'\left(D'\vec{r}\,' + \vec{w}\times\vec{r}\,'\right) + \vec{w}\times\left(D'\vec{r}\,' + \vec{w}\times\vec{r}\,'\right) + D^2\vec{r}_0 =$$

$$= D'^2\vec{r}\,' + \left(D'\vec{w}\right)\times\vec{r}\,' + 2\vec{w}\times D'\vec{r}\,' + \vec{w}\times\left(\vec{w}\times\vec{r}\,'\right) + D^2\vec{r}_0\,.$$

Iz ovog izraza lako je iġļitati kako glasi II Newtonov zakon u neinercijalnom sustavu S´:

Jednadžba gibanja čestice u neinercijalnom referentnom sustavu:

Neka su $\vec{r}$ i $\vec{r}\,'$ radijus vektori ļestice u inercijalnom sustavu S i u neinercijalnom sustavu S´ koji se ubrzano giba u odnosu na S. Jednadġbe gibanje ļestice u dva sustava su:

$$m\,D^2\,\vec{r} = \vec{F} \tag{1.56}$$

$$m\,D'^2\,\vec{r}\,' = \vec{F} + \vec{F}_T + \vec{F}_F + \vec{F}_C + \vec{F}_L\,, \tag{1.57}$$

gdje su dodatne inercijalne sile:

- $\vec{F}_T = -m\,D^2\vec{r}_0$ – translaciona sila,
- $\vec{F}_F = -m\,\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}\,')$ – centrifugalna sila,
- $\vec{F}_C = -2m\,\vec{w}\times D'\vec{r}\,'$ – Coriolisova sila i
- $\vec{F}_L = -m(D'\vec{w})\times\vec{r}\,'$ – linearna sila.

U opĺem sluļaju, u neinercijalnom referentnom sustavu u jednadġbi gibanja ļestice pojavljuju se 4 dodatne inercijalne sile (pseudo sile) koje su rezultat odabira ubrzanog referentnog sustava, a ne rezultat interakcija s drugim ļesticama. Zakoni fizike jednostavniji su u inercijalnim sustavima referencije.

Klasični princip relativnosti zahtijeva da II Newtonov zakon, tj. jednadžba gibanja čestice, bude form-invarijantan (ima istu formu) u bilo kojem inercijalnom referentnom sustavu. Prema (1.57) taj zahtjev je ekvivalentan uvjetima: $\vec{F}_T = \vec{F}_F = \vec{F}_C = \vec{F}_L = 0$, ġto je ispunjeno ako vrijedi:

$$D^2\,\vec{r}_0 = 0\,, \quad \vec{w} = 0\,. \tag{1.58}$$

Najopĺenitije rješenje je:

$$\vec{r}_0(t) = \vec{V}\,t + \vec{q}\,, \quad R(t) = R\,, \qquad \vec{V},\,\vec{q},\,R = \text{const.}\,, \tag{1.59}$$

ġto znaļi da u opĺem sluļaju, inercijalni sustav S´ moġe samo gibati konstantnom brzinom u odnosu na sustav S i/ili biti zarotiran za fiksni kut. Ako dodatno, sila $\vec{F}$ ne zavisi eksplicitno od vremena, ġto je uvijek sluļaj u izoliranom fizikalnom sustavu, vremensko ishodiġte sustava S´ moġe se translirati do poklapanja sa sustavom S.

Tako se dobija najopĺenitiji oblik prostorno-vremenskih transformacija koje tvore Galilejevu grupu:

Galilejeva grupa

Najopĺenitije transformacije kojima se u klasiļnoj mehanici prelazi iz jednog u drugi inercijalni referentni sustav su:

$$r_i \to r_i' = R_{ij}\, r_i + V_i\, t + q_i \;, \quad t \to t' = t + t_0 \quad , \tag{1.60}$$

gdje je:

$$R\,, \vec{V}\,, \vec{q}\,, t_0 = \text{const.}\;; \quad RR^T = 1 \;\; ; \quad \det R = 1\,. \tag{1.61}$$

Ove transformacije tvore 10 parametarsku Lie grupu koju nazivamo Galilejeva grupa. Transformacije (1.10) ne ukljuļuju rotacije (R = 1) i predstavljaju specijalni sluļaj takozvanih «pravih» (proper) Galilejevih transformacija kojima se prelazi u pokretni IRS.

Newtonovi zakoni su form-invarijantni u svim inercijalnim referentnim sustavima, tj. kaģemo da je Newtonova mehanika Galileo invarijantna.

Najvaģnije sile u klasiļnoj fizici su gravitacijske, elektriļne i elastiļne sile koje su konzervativne centralne sile. Ako na ļesticu djeluju samo takve sile, prema (1.34), ukupna sila na ļesticu je negativni gradijent rotaciono (tj. sferno) simetriļnog potencijala V(r) = $V\left(|\vec{r}|\right)$:

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\,. \tag{1.62}$$

Druga vaģna klasa potencijala su homogeni potencijali (potencijalne energije).

Definicija: **Homogeni potencijal**

Homogeni potencijal je rotaciono invarijantni potencijal oblika

$$V(r) = V\left(|\vec{r}|\right) = \alpha |\vec{r}|^k \;, \quad k \in R\,. \tag{1.63}$$

Za ļesticu na koju djeluje konzervativna centralna sila opisana homogenim potencijalom je:

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{r}\,\dot{\vec{r}}\right) = m\left(\dot{\vec{r}}^2 + \vec{r}\,\ddot{\vec{r}}\right) = 2T + \vec{r}\,\vec{F}\,. \tag{1.64}$$

Usrednjavanje po vremenu za interval τ daje:

$$\frac{m}{\tau}\left[\vec{r}(\tau)\dot{\vec{r}}(\tau) - \vec{r}(0)\dot{\vec{r}}(0)\right] = 2\langle T\rangle + \langle \vec{r}\,\vec{F}\rangle \;, \quad \langle T\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T\,dt\,.$$

Ako je gibanje ļestice periodiļno s periodom τ, tj. ako je: $\vec{r}(\tau)=\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(\tau)=\dot{\vec{r}}(0)$, vaģi virijalni teorem:

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle \vec{r}\,\vec{F}\rangle . \tag{1.65}$$

Za konzervativne centralne sile $\vec{F}=-\nabla V(r)$, koje su odreĽene homogenim potencijalom (1.63) je:

$$\langle \vec{r}\,\vec{F}\rangle = -\frac{\alpha}{\tau}\int_0^\tau dt\,\vec{r}\,\nabla|\vec{r}|^k = -\frac{\alpha}{\tau}\int_0^\tau dt\,k|\vec{r}|^k = -k\langle V\rangle ,$$

pa vaģi:

Virijalni teorem za homogeni potencijal

Za ļesticu koja se giba pod djelovanjem centralnih sila koje su opisane homogenim potencijalom (1.63) je:

$$\langle T\rangle = \frac{k}{2}\langle V\rangle . \tag{1.66}$$

<u>Napomena</u>: Virijalni teorem vaģi i opĺenitije, ne samo za periodiļno, veĺ i za bilo kakvo ograniļeno gibanje ļestice (za svako vezano stanje), tj. ako poloģaj i brzina ļestice ostaju konaļni kad $\tau\to\infty$.

Homogeni potencijali oblika (1.63) imaju joģ jedno vaģno svojstvo. Oni su invarijantni ne samo pri rotacijama, veĺ i pri transformacijama skale (konformnim transformacijama).

Konformne transformacije za homogene potencijale

Jednadģba gibanja ļestice na koje djeluje sila opisana homogenim potencijalom (1.63)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla V(r) = -\alpha k|\vec{r}|^{k-2}\vec{r} , \tag{1.67}$$

invarijantna je pri konformnim transformacijama (transformacijama skale) oblika:

$$\vec{r}\to\lambda\,\vec{r}\,' , \quad t\to\lambda^{\frac{2-k}{2}}\,t' . \tag{1.68}$$

Kako je: $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \lambda^{k-1}\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2}$ i $\nabla V(r) = \lambda^{k-1}\nabla' V(r')$, zaista vrijedi i: $m\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2} = -\nabla' V(r')$.

Ako su T i T´ odreĽeni vremenski intervali (periodi titraja, na primjer), a odgovarajuĺe udaljenosti (npr. amplitude gibanja) R i R´ za dva tipa gibanja ļestice koji su povezani konformnom transformacijom (1.68), onda vrijedi:

$$V(r) = \alpha|\vec{r}|^k \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^{2-k}. \tag{1.69}$$

Za gravitacijske i elektriļne sile je: k = – 1, pa odmah slijedi:

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^3, \tag{1.70}$$

ġto znaļi da je III Keplerov zakon direktna posljedica konformne invarijantnosti Newtonovog zakona gravitacije.

Na kraju rezimirajmo kako se prema Newtonovom receptu u klasiļnoj fizici rjeġava problem gibanja bilo kojeg fizikalnog sustava:

Osnovni problem dinamike

Neka imamo sustav od N (klasiļnih) ļestica masa m_i (i = 1,2, ...,N). Ako znamo:

- sve sile koje djeluju na sustav, tj. znamo ukupnu silu $\vec{F}_i = \vec{F}_i\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t\right)$ na i-tu ļesticu, i
- mehaniļko stanje sustava u trenutku t = 0, tj. poļetni poloġaj $\vec{r}_{i_0}$ i poļetnu brzinu $\dot{\vec{r}}_{i_0}$ svih ļestica sustava,

onda rjeġavanjem jednadġbi gibanja sustava:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i, \quad (i = 1,2, ...,N),$$

nalazimo mehaniļko stanje sustava svakom trenutku, tj. znamo poloġaj svake ļestice $\vec{r}_i(t)$ u bilo kojem trenutku vremena t.

1.6 Linearni harmonički oscilator

Kao primjer razmotrimo najvažniji sustav u teorijskoj fizici – linearni harmonički oscilator (LHO). Jednodimenzioni linearni harmonički oscilator je čestica mase m na koju djeluje elastična sila $F_{el.} = -\,k\,x$, gdje je $k > 0$ konstanta sile (konstanta opruge), a x je elongacija čestice, tj. udaljenost od stabilnog ravnotežnog položaja čestice $x = 0$. Smjer takve restitucione sile uvijek je ka ravnotežnom položaju. Naravno, na česticu mogu djelovati i dodatne sile, od kojih su najvažnije: sila otpora proporcionalna brzini čestice $F_{tr.} = -\,\eta\,\dot{x}$ i prinudna, vremenski zavisna sila. Najjednostavniju realizaciju LHO predstavlja čestica vezana za idealnu oprugu konstante k.

Elastična sila je konzervativna i elastična potencijalna energija čestice je: $U = \frac{1}{2}k\,x^2$, tako da je: $\vec{F}_{el.} = -\nabla U = -\frac{dU}{dx}\vec{i} = -k\,\vec{x}$. Jednadžba gibanja je: $m\,\ddot{x} = F_{el.} + F_{tr.}$, tj:

$$\ddot{x} + 2\gamma\,\dot{x} + \omega_0^{\,2} x = 0\,,\ \text{gdje je}:\ \ \gamma = \frac{\eta}{2m}\,;\ \ \omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}\,. \tag{1.71}$$

- Razmotrimo prvo slučaj kad nema sile otpora $\gamma = 0$. Jednadžba gibanja je:

$$\ddot{x} + \omega_0^{\,2} x = 0\,, \tag{1.72}$$

gdje je svojstvena frekvencija oscilatora $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Obična linearna diferencijalna jednadžba II reda s konstantnim koeficijentima (1.72), rješava se smjenom $x(t) = e^{\lambda t}$, koja daje kvadratnu jednadžbu: $\lambda^2 + \omega_0^{\,2} = 0$ za parametar λ sa rješenjem: $\lambda_{1,2} = \pm i\,\omega_0$. Opće rješenje jednadžbe gibanja je:

$$x(t) = C_1\,e^{i\omega_0 t} + C_2\,e^{-i\omega_0 t} \quad \text{ili} \quad x(t) = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t\,, \tag{1.73}$$

gdje su $C_{1,2}$ ili $A_{1,2}$ neodređene konstante. Odabirom: $A_1 = A\cos\varphi$ i $A_2 = -A\sin\varphi$, opće rješenje (1.73) može se napisati u obliku prostog harmoničkog titranja:

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right), \tag{1.74}$$

gdje je A amplituda (maksimalna elongacija), a φ početna faza, koje se određuju iz početnih uvjeta:

početnog položaja: $x\,(t=0) = A\cos\varphi$ i početne brzine: $\dot{x}\,(t=0) = -\,A\sin\varphi$.

Gibanje čestice je periodično osciliranje oko ravnotežnog položaja kutnom frekvencijom ω_0, tj. period titraja je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{1.75}$$

- Ako na oscilator djeluje i nekonzervativna sila otpora $F_{tr.} = -\eta\,\dot{x}$, opće rješenje jednadžbe gibanja (1.71) je: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, gdje je: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^{\,2}}$. Gibanje ovakvog prigušenog harmoničkog oscilatora je aperiodično, tj. rješenje je linearna kombinacija realnih opadajućih eksponencijalnih funkcija u slučaju jakog ($\gamma > \omega_0$) i kritičnog ($\gamma = \omega_0$) prigušenja. Samo u slučaju slabog prigušenja ($\gamma < \omega_0$) gibanje je kvazi-periodično titranje:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{1.76}$$

sa eksponencijalno opadajućom amplitudom $A(t) = Ae^{-\gamma t}$ i kvazi-periodom:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}}. \tag{1.77}$$

- Ako na oscilator djeluje još i neka prinudna sila $F_{pr.} = f(t)$ ovisna o vremenu jednadžba gibanja je:

$$m\,\ddot{x} + 2\gamma m\,\dot{x} + m\omega_0^{\,2}x = f(t), \tag{1.78}$$

što je nehomogena obična linearna diferencijalna jednadžba II reda. Metod Greenove funkcije je najjednostavniji način rješavanja svake nehomogene linearne diferencijalne jednadnadžbe. Opće rješenje (1.78) može se napisati u obliku:

$$x(t) = x_h(t) + \int dt'\,G(t,t')f(t'), \tag{1.79}$$

gdje je $x_h(t)$ opće rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe, a pomoćna Greenova funkcija $G(t,t')$ daje partikularno rješenje nehomogene jednadžbe. Iz (1.79) i (1.78) lako se vidi da je Greenova funkcija rješenje jednadžbe:

$$m\,\ddot{G}(t,t') + 2\gamma m\,\dot{G}(t,t') + m\omega_0^{\,2}G(t,t') = \delta(t-t'). \tag{1.80}$$

Fourierov transform omogućuje da se gornja jednadžba transformira u algebarsku. Kako je:

$$\delta(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\; e^{i\omega(t-t')}, \text{ definirajmo: } G(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\; g(\omega)e^{i\omega(t-t')}, \tag{1.81}$$

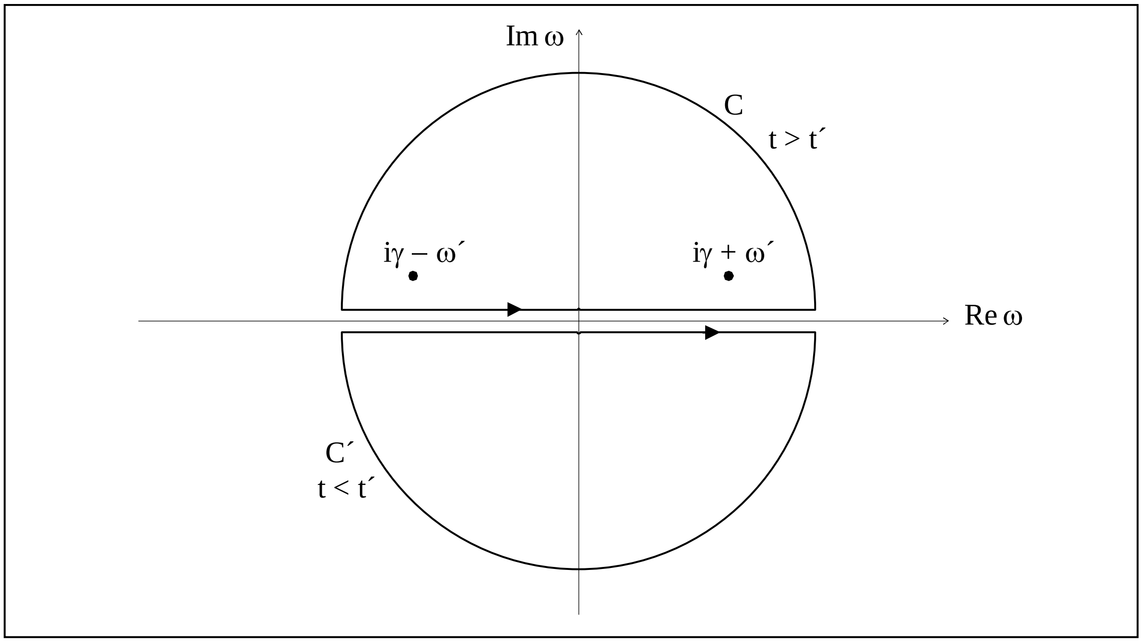
što uvrštavanjem u (1.80) za Fourierov transform g(ω) Greenove funkcije daje:

$$g(\omega) = -\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^{\,2}} = -\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\omega - i\gamma + \omega')(\omega - i\gamma - \omega')}, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}, \tag{1.82}$$

pa je Greenova funkcija:

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi m}\int d\omega\; \frac{e^{i\omega(t-t')}}{(\omega - i\gamma + \omega')(\omega - i\gamma - \omega')}. \tag{1.83}$$

Integral (1.83) raļuna se kompleksnom ω-integracijom po zatvorenim konturama C i C´ sa Slike 4. koristeĺi Cauchy-ev teorem o reziduima kompleksne funkcije.



Slika 4.

Pri integraciji se mora voditi raļuna o slijedeĺem:

- Podintegralna funkcija u (1.83) ima dva pola prvog reda za $ɤ_0^2 \neq ɔ^2$, a jedan pol drugog reda za $ɤ_0^2 = ɔ^2$ u gornjoj kompleksnoj poluravnini ($\mathrm{Im}\,\omega = \varepsilon > 0$).

- Za $t - t´ > 0$, za integraciju moramo odabrati zatvorenu konturu C, osiguravajuĺi da doprinos integralu sa polukruġnice teġi nuli u limesu kad radijus kruġnice $R \to Đ$. Analogno, za $t - t´ < 0$ biramo zatvorenu konturu C´, ġto osigurava da je zadovoljen uvjet kauzalnosti:

$$G(t,t´) = 0 \quad \text{za} \quad t < t´ ,$$

(stanje sustava u trenutku t zavisi samo od njegove proġlosti t´< t).

- Raļunajuĺi rezidue nalazi se Greenova funkcija priguġenog harmoniļkog oscilatora:

– Slabo priguġenje: $ɤ_0^2 > ɔ^2$,

$$G(t,t´) = \frac{1}{mɤ} e^{-ɔ(t-t´)} \sin[ɤ´(t-t´)], \quad ɤ´ = \sqrt{ɤ_0^2 - ɔ^2}, \qquad (1.84)$$

– Jako priguġenje: $ɤ_0^2 < ɔ^2$,

$$G(t,t´) = \frac{1}{mɤ} e^{-ɔ(t-t´)} \mathrm{sh}[ɤ´(t-t´)], \quad ɤ´ = \sqrt{ɔ^2 - ɤ_0^2}, \qquad (1.85)$$

– Kritiļno priguġenje: $ɤ_0^2 = ɔ^2$,

$$G(t,t´) = \frac{t-t´}{m} e^{-ɔ(t-t´)}. \qquad (1.86)$$

Razmotrimo sad kompliciraniji slučaj gibanja u dvije dimenzije. Dvodimenzioni linearni harmonički oscilator je čestica mase m na koju djeluje elastična sila: $\vec{F}_{el.} = -k\vec{r} = -kx\vec{i} - ky\vec{j}$, gdje jednostavnosti radi uzimamo: $k_x = k_y = k$. Jednadžba gibanja je:

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\right) = -k\vec{r}\ , \quad \text{tj.} \quad \begin{matrix} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{matrix}\ ,$$

sa rješenjem:

$$\begin{matrix} x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ y(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{matrix}\ . \tag{1.87}$$

Konstante A, B, φ_1, φ_2 određuje se iz početnih uvjeta. Eksplicitna jednadžba putanje dobija se eliminacijom vremena. Uvodeći novu konstantu $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ lako se dobija:

$$y = \frac{B}{A}x\cos\varphi \pm \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\ .$$

Kvadriranjem dobijemo kvadratnu funkciju dviju varijabli:

$$B^2x^2 - 2AB\cos\varphi\, xy + A^2y^2 = A^2B^2\sin^2\varphi\ , \tag{1.88}$$

koja predstavlja jednadžbu konusnih presjeka: elipse, parabole i hiperbole. Iz (1.87) je očigledno da su obe koordinate ograničene: $|x| \le A$, $|y| \le B$, što znači da je putanja dvodimenzionalnog harmoničkog oscilatora:

- Kružnica za $A = B$ i $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$,
- Segment pravca za $\varphi = 0, \pm\pi$ i proizvoljno A i B,
- Elipsa za sve ostale vrijednosti φ, A i B.

Razmotrimo na kraju i trodimenzionalni slučaj.

Izotropni linearni harmonički oscillator je čestica mase m na koju djeluje sila:

$$\vec{F}_{el.} = -k\vec{r} = -kr\vec{e}_r\ . \tag{1.89}$$

Izvor sile je u ishodištu koje je ravnotežni položaj čestice. Za t = 0 početni položaj i početna brzina čestice neka su: $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$.

Prema II Newtonovom zakonu u početnom trenutku je i ubrzanje čestice kolinearno s $\vec{r}_0$, pa čestica uvijek ostaje u početnoj ravnini određenoj s $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$ (ako su kojim slučajem $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$ kolinearni gibanje je jednodimenziono duž pravca određenog tim vektorima).

Da je gibanje izotropnog linearnog harmoničkog oscilatora u dvije dimenzije u početnoj ravnini, može se vidjeti i na slijedeći način.

Sila je konzervativna i centralna (uvijek usmjerena k ishodištu), tj. može se izvjesti iz potencijala koji zavisi samo od r :

$$\vec{F} = -\nabla U(r), \quad \text{gdje je:} \quad U(r) = \frac{1}{2} k\, r^2 . \tag{1.90}$$

pa važe zakoni o očuvanja energije i angularnog momenta, tj:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} k \vec{r}^2\right) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}\, \ddot{\vec{r}} + \frac{1}{2} k \vec{r}\, \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m(-k\vec{r})\dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} k \vec{r}\, \dot{\vec{r}} = 0 ,$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times (-k\vec{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} = \vec{r}_0 \times \vec{p}_0 = \vec{l}_0 ,$$

što znači da su vektori $\vec{r}$ i $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = m\vec{v}$ uvijek okomiti na konstantni vector $\vec{l}_0$, tj. $\vec{r}$ i $\vec{v}$ su uvijek u ravnini okomitoj na $\vec{l}_0$.

Odaberimo referentni sustav tako da je angularni moment duž z-osi, pa je gibanje u xy-ravnini ($\theta = \frac{\pi}{2}$ u sfernim koordinatama):

$$l_0 = l_z = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l_0}{m r^2} , \tag{1.91}$$

što se lako pokazuje polazeći od $l_z = m(xv_y - yv_x)$.

Ukupna energija oscilatora je onda:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l_0^{\,2}}{2m r^2} + \frac{1}{2} k r^2 = \text{const.} \geq 0 . \tag{1.92}$$

Za svaku pozitivnu vrijednost energije, udaljenost r od ishodišta je konačna, što znači da na putanji mora postojati točka povrata (turning point) $\vec{r}_{pov.}$ gdje je radijalna komponenta brzine nula $\dot{r}_{pov.} = 0$, tako da je energija oscilatora:

$$E = \frac{l_0^{\,2}}{2m\, r_{pov.}^{\;2}} + \frac{1}{2} k\, r_{pov.}^{\;2} . \tag{1.93}$$

Bez gubitka općenitosti možemo uzeti da je oscilator u početnom trenutku u točci povrata, tj. da je $\vec{r}_0 = \vec{r}_{pov.}$ (to je ustvari odabir pravca x-osi koordinatnog sustava).

Zakon očuvanja energije (1.92) za radijalnu komponentu brzine daje diferencijalnu jednadžbu prvog reda:

$$\frac{dr}{dt} = \left[\frac{2E}{m} - \frac{l_0^{\,2}}{m^2 r^2} - \omega_0^{\,2} r^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

gdje je svojstvena frekvencija oscilatora: $\omega_0^{\,2} = \dfrac{k}{m}$. Separacijom varijabli i integracijom od t = 0 do nekog trenutka t je:

$$t = \int_{r_0}^{r(t)} dr \left[\frac{2E}{m} - \frac{l_0^{\,2}}{m^2 r^2} - \omega_0^{\,2} r^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.94}$$

Smjenom $x = r^2$ gornji integral se svodi na kanonski oblik:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}\,, \text{ gdje je: } c = -\omega_0^{\,2} \;\text{ i }\; \Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{l_0^{\,2}}{2mr_0^{\,2}} - \frac{1}{2} k r_0^{\,2}\right)^2 \geq 0,$$

što daje:

$$\frac{1}{2}\int dx \left[\frac{2E}{m} x - \frac{l_0^{\,2}}{m^2} - \omega_0^{\,2} x^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\omega_0} \arcsin\left[\frac{m\omega_0^{\,2} x - E}{\left(E^2 - l_0^{\,2}\omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Koristeći gornji izraz dobijemo rješenje jednadžbe gibanja oscilatora:

$$2\omega_0 t = \arcsin\left[\frac{m\omega_0^{\,2} r^2(t) - E}{E - m\omega_0^{\,2} r_0^{\,2}}\right] - \arcsin[-1],$$

i kako je $\arcsin[-1] = -\dfrac{\pi}{2}$, parametarska jednadžba putanje oscilatora u (r,φ) ravnini je:

$$r(t) = \left[\frac{E}{m\omega_0^{\,2}} - \left(\frac{E}{m\omega_0^{\,2}} - r_0^{\,2}\right)\cos 2\omega_0 t\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.95}$$

Period oscilatora je $T = \dfrac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, a putanja je elipsa čije karakteristike zavise od očuvanih veličina E i $\vec{l}_0$. Ako je npr. φ-komponenta brzine jednaka svojstvenoj frekvenciji oscilatora, tj. $l_0 = m\omega_0 r_0^{\,2}$, iz izraza za energiju i putanju dobijamo:

$$r(t) = \left(\frac{E}{m\omega_0^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{l_0}{m\omega_0^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}} = r_0\,,$$

ġto znaļ i da je putanja kruģnica radijusa $\left(\frac{E}{m\omega_0^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ako je $l_0 > m\omega_0 r_0^{\,2}$, onda je $\frac{E}{m\omega_0^{\,2}} > r_0^{\,2}$, ġto znaļ i da r(t) oscilira izmeĽu:

$$r_{min} = r_0 \qquad\qquad \text{za} \quad t = n\frac{\pi}{\omega_0}\,,$$

i

$$r_{max} = \left[\frac{2E}{m\omega_0^{\,2}} - r_0^{\,2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{za} \quad t = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega_0}\,.$$

Da se dobije jednadġba putanje u Kartezijevim koordinatama prvo iz (1.91), (1.92) i (1.93) treba pokazati da je:

$$\frac{E}{m\omega_0^{\,2}} = \frac{1}{2} r_0^{\,2}\left[1 + \frac{\tilde{u}_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\right], \tag{1.96}$$

te iz jednadġbe putanje u polarnim koordinatama (1.95) dobiti:

$$r^2(t) = r_0^{\,2}\left[1 + \frac{\tilde{u}_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\,\mathrm{tg}^2\omega_0 t\right]\cos^2\omega_0 t\,. \tag{1.97}$$

Iz (1.91) i (1.95) diferencijalna jednadġba za azimutalni kut φ je:

$$d\varphi = \frac{l_0}{m}\,\frac{1}{\frac{E}{m\omega_0^{\,2}} - \left(\frac{E}{m\omega_0^{\,2}} - r_0^{\,2}\right)\cos 2\omega_0 t}\,dt\,,$$

ġto zbog (1.96) daje:

$$d\varphi = \frac{\omega_0 l_0}{2E}\,\frac{dx}{1 - \varepsilon\cos x}\,,$$

gdje je: $\varepsilon = 1 - \frac{m\omega_0^{\,2} r_0^{\,2}}{E}$ i $x = 2\omega_0 t$.

Koristeĺi tabliļni integral: $\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{arctg}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, \text{tg}\frac{x}{2}\right]$, dobijamo:

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \frac{ɤ_0 l_0}{E\sqrt{1-Ŭ^2}} \text{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+Ŭ}{1-Ŭ}}\, \text{tg}\frac{x}{2}\right],$$

gdje je:

$$1+Ŭ = 2 - \frac{mɤ_0^2 r_0^2}{E} \quad ; \qquad 1-Ŭ = \frac{mɤ_0^2 r_0^2}{E} \quad ; \qquad E\sqrt{1-Ŭ^2} = ɤ_0 l_0 \,,$$

te:

$$\text{tg}[\varphi(t) - \varphi_0] = \frac{ũ_0}{ɤ_0} \text{tg}ɤ_0 t \,. \tag{1.98}$$

Kako je: $\sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$ i $\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x}$, iz (1.97) i (1.98) slijedi:

$$\cos^2[\varphi(t) - \varphi_0] = \frac{1}{1 + \frac{ũ_0^2}{ɤ_0^2}\text{tg}^2 ɤ_0 t} = \frac{r_0^2 \cos^2 ɤ_0 t}{r^2(t)}$$

$$\sin^2[\varphi(t) - \varphi_0] = \frac{\frac{ũ_0^2}{ɤ_0^2}\text{tg}^2 ɤ_0 t}{1 + \frac{ũ_0^2}{ɤ_0^2}\text{tg}^2 ɤ_0 t} = \frac{ũ_0^2 r_0^2 \sin^2 ɤ_0 t}{ɤ_0^2 r^2(t)} \,,$$

ģto daje:

$$\frac{r^2(t)}{r_0^2} \cos^2[\varphi(t) - \varphi_0] = \cos^2 ɤ_0 t \tag{1.99}$$

$$\frac{r^2(t)}{\frac{r_0^2 ũ_0^2}{ɤ_0^2}} \sin^2[\varphi(t) - \varphi_0] = \sin^2 ɤ_0 t \,. \tag{1.100}$$

Na kraju, zbog x = rcosφ i y = r sinφ, zadnje dvije relacije daju jednadģbu putanje izotropnog linearnog harmoniļkog oscilatora u Kartezijevim koordinatama:

$$\frac{x^2(t)}{r_0^{\,2}} + \frac{y^2(t)}{\frac{r_0^{\,2}\tilde{u}_0^{\,2}}{\gamma_0^{\,2}}} = 1, \tag{1.101}$$

što predstavlja jednadžbu elipse čija je velika poluos:

$$a = \frac{1}{2}\left(r_{max} + r_{min}\right) = \frac{r_0}{2}\left(1 + \frac{\tilde{u}_0}{\gamma_0}\right),$$

a ekscentricitet:

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{\tilde{u}_0 - \gamma_0}{\tilde{u}_0 + \gamma_0}.$$

Fundamentalni značaj linearnog harmoničkog oscilatora za sva grane fizike posljedica je teorema koji tvrdi da je gibanje bilo kojeg fizikalnog sustava u okolici položaja stabilne ravnoteže ekvivalentno gibanju ansambla neovisnih linearnih harmoničkih oscilatora. Teorem ćemo razmatrati u Poglavlju 6. o malim oscilacijama.

2. Lagrangeov formalizam

Newtonova formulacija mehanike zahtijeva poznavanje svih sila koje djeluju na fizikalni sustav. Za sustave ļija dinamika je ograniļena vezama (constraints) to ļesto nije lako. Tipiļan primjer je gibanje po nekoj podlozi ï znamo da na ļesticu (tijelo) mora djelovati sila reakcije (otpor podloge) koja osigurava da ļestica ostaje u kontanktu s podlogom, ali ne znamo napisati izraz za tu silu kao funkciju poloģaja i brzina ļestica. U drugoj polovici XVII stoljeĹa u radovima d´Alemberta i Lagrangea nastala je nova, opĹenitija formulacija mehanike specijalno prilagoĽenja rješavanju problema gibanja sustava s vezama. Temelj te nove formulacije su Lagrangeove jednadģbe gibanja koje se formuliraju u prikladno odabranom prostoru (konfiguracijski prostor) ļiji bazis ļine generalizirane koordinate fizikalnog sustava. Lagrangeov formalizam omoguĹio je razvoj i drugih formulacija mehanike (Hamiltonov formalizam), znatno je olakġao apstraktnu analizu problema gibanja fizikalnih sustava i uveo u teorijsku fiziku novi standard analitiļkog formuliranja teorija koji vaģi i u modernoj fizici.

2.1 Veze, sile reakcije, d´Alembertov princip, Lagrangeove jednadžbe

Razmatramo fizikalni sustav od N ļestica masa m_i i radijus vektora $\vec{r}_i$, (i = 1,2,...,N) ļije gibanje je ograniļeno vezama.

<u>Veza (constraint) je bilo kakvo a priorno ograniļenje poloģaja i/ili brzine ļestica</u>.

Pojednostavljeno reļeno ï ako je gibanje ļestice ograniļeno bar jednom vezom, tada postoji bar jedna toļka u prostoru i/ili bar jedna vrijednost brzine koju ļestica nikako ne moģe dostiĹi tijekom gibanja. To znaļi da za svaku vezu na ļesticu mora djelovati neka sila, nazivamo je silom reakcije $\vec{R}$, koja osigurava da ļestica tijekom gibanja ne naruġi vezu.

U Newtonovoj formulaciji mehanike sile reakcije su problem, jer znamo kakav efekt te sile imaju na gibanje ļestica, ali ne znamo (prije nego rješimo problem) kako sile reakcije izraziti kao funkciju poloģaja i brzina ļestica. Za sustave ļije je gibanje ograniļeno vezama Newtonova jednadģba gibanja za i-tu ļesticu je:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i , \tag{2.1}$$

gdje je ukupna aktivna sila na i-tu ļesticu rastavljena na poznati $\vec{F}_i = \vec{F}_i\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$ i nepoznati ļlan ï ukupnu silu reakcije na i-tu ļesticu $\vec{R}_i$. Da bi rješili problem, prvo moramo iz poznavanja veza, tj. naļina kako se sustav giba, odrediti sve sile reakcije $\vec{R}_i$ i tek onda moģemo rješavati Newtonove jednadģbe gibanja. Lagrange je za neke tipove veza uspio reformulirati problem tako da se nepoznate sile reakcije $\vec{R}_i$ uopĹe ne pojavljuju u jednadģbama gibanja i stoga ih ne moramo ni odreĽivati.

Precizno, Lagrange je naġao rješenje problema gibanja sustava s holonomnim vezama (plus eventualno i homogenim linearnim diferencijalnim vezama), ġto upravo i jesu fizikalno najvaģniji sluļajavi. U najopĹenitijem sluļaju gibanja sustava s proizvoljnim vezama, problem je toliko kompliciran da ne postoji opĹe rješenje ï odvojeno se mora razmatrati svaki pojedini problem.

Definicija: **Holonomne veze i broj stupnjeva slobode gibanja n**

Holonomnom vezom se naziva bilo koje ograniļenje koje se moġe prikazati jednadġbom koja ukljuļuje poloġaje ļestica i vrijeme, ali ne i brzine ļestica. Ako je gibanje sustava N ļestica ograniļeno sa k holonomnih veza, znaļi da postoji k jednadġbi oblika:

$$f_l\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t\right) = 0, \quad l = 1,2,....,k. \tag{2.2}$$

Poloġaj sustava N ļestica odreĽen je s 3N koordinata, ali kako meĽu njima postoji k jednadġbi veza (2.2), samo 3N – k komponenti radijus vektora ļestica su linearno nezavisne.

<u>Broj nezavisnih komponenti radijus vektora poloġaja ļestica sustava n naziva se broj stupnjeva slobode gibanja sustava</u>, tj.

$$n = 3N - k. \tag{2.3}$$

Sve veze koje ograniļavaju, pored poloġaja, i brzine ļestica ili se ne mogu izraziti algebarskim jednadġbama (nego nejednadġbama, diferencijalnim ili integralnim jednadġbama, na primjer) su neholonomne.

Veze koje eksplicitno zavise od vremena nazivaju se reonomne. Stacionarne ili skleronomne veze ne zavise eksplicitno od vremena.

Gibanje po podlozi je primjer holonomne veze.

<u>Primjer 1.</u> Gibanje ļestice po sferi radijusa R.

Ako za ishodiġte Kartezijevog koordinatnog sustava odaberemo centar sfere, tada koordinate ļestice moraju zadovoljavati:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

ġto je stacionarna holonomna veza. Od 3 Kartezijeve koordinate ļestice samo dvije su linearno nezavisne i moġemo odabrati bilo koje dvije. Odaberemo li kao nezavisne (x,y), jednadġbu veze moġemo napisati kao:

$$z = R^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Bez obzira koje dvije Kartezijeve koordinate odaberemo za nezavisne, sve tri se eksplicitno pojavljuju u jednadġbi veze, tj. jednadġba veze ograniļava variranje svake Kartezijeve koordinate ļestice tijekom njenog gibanja po sferi, tj. $|x| \le R$, $|y| \le R$, $|z| \le R$. BuduĹi da veza utjeļe na moguĹe vrijednosti svake od tri Kartezijeve koordinate one oļigledno nisu najbolji izbor za opis gibanja ovakve ļestice.

Ali, ako umjesto Kartezijevog (x,y,z), za koordinate ļestice koristimo sferni koordinatni sustav (r,θ,φ) jednadġba veze je jednostavno:

$$r - R = 0.$$

Jednadžba veze fiksira vrijednost sferne koordinate $r = R$, dok uopće ne utječe na moguće vrijednosti dviju nezavisnih sfernih koordinata čestice θ i φ. Sferne koordinate su bolji izbor za opis gibanja ove čestice.

<u>Primjer 2.</u> Gibanje dviju čestica spojenih krutim štapom po horizontalnoj podlozi.

Odaberemo li horizontalnu podlogu za xy-ravninu koordinatnog sustava, za koordinate čestica $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$, $(i = 1,2)$ važe 3 stacionarne holonomne veze:

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = 0; \qquad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - d^2 = 0,$$

gdje je d duljina štapa. Sustav očigledno ima $n = 2 \times 3 - 3 = 3$ stupnja slobode gibanja.

Svih 6 Kartezijevih koordinata čestica eksplicitno se pojavljuju u jednadžbama veza. Među tih 6 koordinata važe 3 relacije – samo tri od 4 Kartezijeve koordinate (x_1,x_2,y_1,y_2) su nezavisne. Odaberemo li recimo (x_1,x_2,y_2) kao nezavisne, onda jednadžbe veza možemo napisati u obliku:

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = 0; \qquad y_1 = y_2 + \sqrt{d^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2}\,.$$

No, opet imamo isti problem. Kako god napisali jednadžbe veza u Kartezijevim koordinatama i koje god 3 odabrali kao nezavisne, svih 6 koordinata dviju čestica eksplicitno se pojavljuju u jednadžbama veza, što znači da veze utječu na variranje tih koordinata tijekom gibanja sustava.

Odaberemo li cilindrični koordinatni sustav (ρ,φ,z) za koordinate čestica $\vec{r}_i = \rho_i\hat{e}_{\rho_i} + z_i\hat{k}$, $(i = 1,2)$ i opet horizontalnu podlogu za xy-ravninu, jednadžbe veza su:

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = 0; \qquad \rho_1^{\,2} + \rho_2^{\,2} - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - d^2 = 0\,.$$

Samo 3 od cilindričnih koordinata dviju čestica $(\rho_1,\rho_2,\varphi_1,\varphi_2)$ su nezavisne dok je četvrta određena zadnjom od gornjih relacija, ali i dalje se svih 6 cilindričnih koordinata dviju čestica eksplicitno pojavljuju u jednadžbama veza.

Ipak, i u ovom primjeru postoji (i to ne samo jedan) skup od 6 koordinata takav da se u jednadžbama veza eksplicitno pojavljuju samo 3 od njih, dok preostale 3 potpuno slobodno variraju tijekom gibanja sustava.

Prvo, umjesto radijus vektora čestica $\{\vec{r}_1,\vec{r}_2\}$ definirajmo nove varijable: $\{\vec{r}_C,\vec{r}\}$ – radijus vektor centra mase $\vec{r}_C$ i vektor relativnog položaja $\vec{r}$ relacijama:

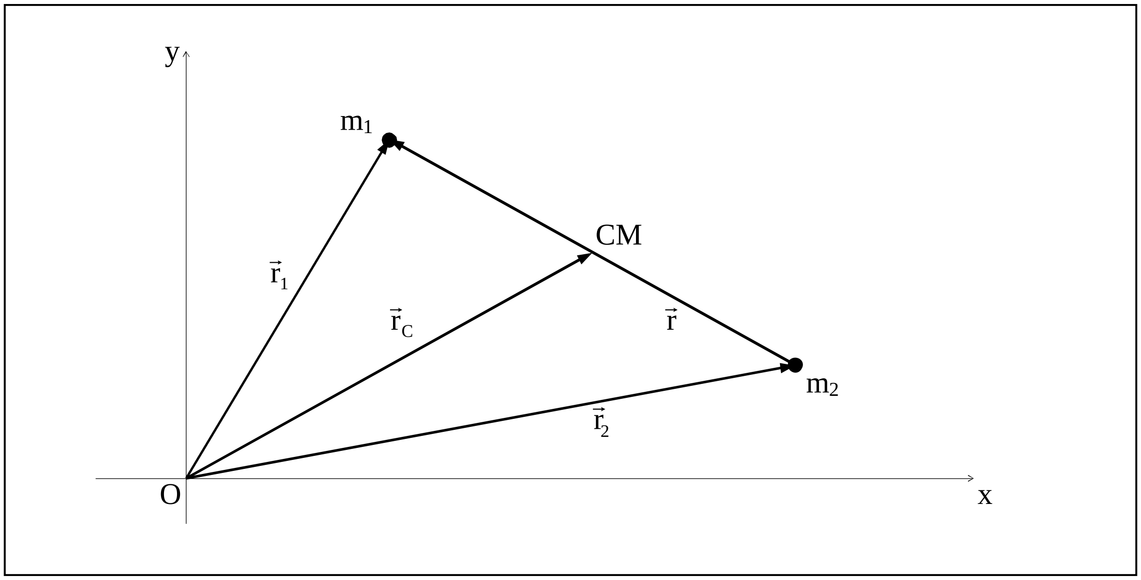
$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \;; \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,. \tag{2.4}$$

Veza koja fiksira duljinu štapa u novim varijablama sad je jednostavno: $r = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = d$.

Jednostavnosti radi, bez gubitka općenitosti, uzmimo da su mase čestica jednake, tako da je:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_C + \frac{1}{2}\vec{r} \ ; \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_C - \frac{1}{2}\vec{r} \ .$$

kao na Slici 5. Zbog gornjih relacija, jasno je da su položaji obe čestice jednoznačno određeni ako znamo $\{\vec{r}_C, \vec{r}\}$.



Slika 5.

Odaberimo sad za varijable $\{\vec{r}_C, \vec{r}\}$ cilindrične koordinate (ρ_C,φ_C,z_C) i (ρ,φ,z) tako da je: $\vec{r}_C = \rho_C \hat{e}_{\rho_C} + z_C \hat{k}$ i $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{k}$. Jednadžbe tri holonomne veza u ovim koordinatama su:

$$z_C = 0; \qquad z = 0; \qquad \rho - d = 0,$$

tako da se 3 nezavisne koordinate sustava $(\rho_C,\varphi_C,\varphi)$ uopće ne pojavljuju u jednadžbama veza. Jasno je da smo za 3 nezavisne koordinate mogli odabrati i (x_C,y_C,φ), jer je položaj sustava u xy-ravnini jednoznačno određen položajem centra mase (centra štapa) i kutom φ štapa u odnosu na x-os.

Za svaki sustav N čestica na koji djeluje k holonomnih veza uvijek je moguće pronaći takav skup 3N – k nezavisnih koordinata koje (uz poznavanje jednadžbi veza) jednoznačno određuju položaj sustava, tj. položaj svih čestica sustava, a ne pojavljuju se eksplicitno u jednadžbama veza, što znači da te koordinate potpuno slobodno variraju tijekom gibanja sustava. Takav skup n = 3N – k veličina nazivamo **generaliziranim koordinatama** fizikalnog sustava.

Defnicija: **Generalizirane koordinate q_j**

Generalizirane koordinate sustava N ļestica ļije je gibanje ograniļeno sa k holonomnih veza (2.2), je bilo koji skup od n = 3N ï k linearno nezavisnih veliļina q_j, (j = 1,2,...,n), definiranih preko radijus vektora ļestica sustava:

$$q_j = q_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t\right), \tag{2.5}$$

koje jednoznaļno odreĽuju bilo koji moguĺi poloġaj sustava i ļije variranje nikako nije ograniļeno jednadġbama veza (2.2).

Znaļi, poznavanje generaliziranih koordinata (q_1,q_2,...,q_n), uz poznavanje jednadġbi veza (2.2), ekvivalentno je poznavanju poloġaja $\vec{r}_i$, (i = 1,2,....,N) svih ļestica sustava,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_n, t\right). \tag{2.6}$$

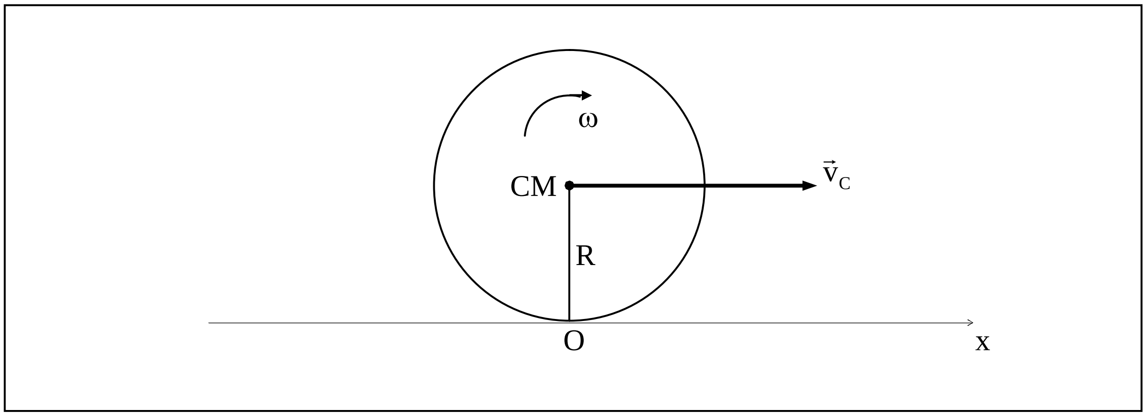
Napomena: Generalizirane koordinate q_j su realne funkcije vremena $q_j(t)$ i ne moraju biti koordinate neke od ļestica sustava – npr. koordinate centra mase u Primjeru 2., niti moraju biti koordinate nekog opĺeg koordinatnog sustava (iako najļeġĺe jesu) ï npr. preĽeni put ļestice, niti moraju imati dimenzije duljine ï npr. kut. Prednost generaliziranih koordinata je ġto omoguĺavaju rjeġavanje problema dinamike u prostoru ļija geometrija je prilagoĽena fizikalnom sustavu ļije gibanje razmatramo. Taj n-dimenzionalni prostor ļije osi su generalizirane koordinate q_j naziva se konfiguracijski prostor fizikalnog sustava. Zahtjev da veze ne ograniļavaju varijaciju generaliziranih koordinata osigurava da svaka toļka konfiguracijskog prostora odgovara jednom i samo jednom moguĺem poloġaju (koji je u skladu s vezama) fizikalnog sustava. No, skup generaliziranih koordinata za neki fizikalni sustav nije jednoznaļno odreĽen ï za svaki fizikalni sustav postoji ustvari beskonaļno mnogo razliļitih skupova generaliziranih koordinata. Pametan odabir generaliziranih koordinata daje jednostavnije jednadġbe i omoguĺuje lakġe rjeġavanje problema gibanja fizikalnog sustava.

Sve veze nisu holonomne. Najvaġniji sluļaj neholonomnih veza u klasiļnoj mehanici je «kotrljanje bez klizanja».

Primjer 3. Kotrljanje diska radijusa R bez klizanja po horizontalnoj podlozi.

Zamislimo disk koji se giba po horizontalnoj podlozi, na primjer, kotaļ automobila.

Uvjet kotrljanja bez klizanja je ustvari veza koja ograniļava brzinu kotaļa ï toļka kotaļa O u kontaktu s mirujuĺom podlogom ne smije klizati, tj. mora imati trenutnu brzinu nula, kao na Slici 6.



Slika 6.

Disk rotira oko trenutne horizontalne osi kroz toļku O kutnom brzinom $\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$, pa je brzina centra mase $v_C = \dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = \omega R = R\frac{d\varphi}{dt}$, gdje je φ kut rotacije diska. Ovo je diferencijalna jednadġba neholonomne veze, koja se mnoġeĺi sa dt moġe prikazati kao homogena linearna relacija meĽu diferencijalima koordinata centra mase x_C i kuta rotacije φ diska, tj.

$$dx_C - R d\varphi = 0\ .$$

Ovakve «kotrljanje bez klizanja» veze pripadaju klasi jednostavnih neholonomnih veza, tzv. homogenim linearnim diferencijalnim vezama, koje se mogu inkorporirati u Lagrangeov formalizam metodom mnoġitelja veza (Lagrange multipliers).

Definicija: **Homogene linearne diferencijalne veze**

Ako je gibanje sustava od N ļestica ograniļeno sa k holonomnih veza (2.2) i joġ i sa r homogenih linearnih diferencijalnih veza, sve generalizirane koordinate q_j nisu viġe nezavisne jer meĽu njima postoji r neintegrabilnih diferencijalnih relacija:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} dq_j + a_{st} dt = 0\ , \quad s = 1,2,....,r\ . \tag{2.7}$$

Mehaniļko stanje sustava u jednom trenutku odreĽeno je poloġajem i brzinom svih ļestica fizikalnog sustava $\{\vec{r}_i(t), \dot{\vec{r}}_i(t)\}$ u Newtonovoj formulaciji mehanike. Ali, u analitiļkoj, tj. Lagrangeovoj formulaciji klasiļne mehanike <u>stanje fizikalnog sustava u nekom trenutku vremena t potpuno je odreĽeno vrijednostima generaliziranih koordinata i generaliziranih brzina</u> $\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}$.

Prema (2.6), brzine ļestica su:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \tag{2.8}$$

odakle slijedi:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}. \tag{2.9}$$

Ako nema trenja (sustave u kojima postoje sile trenja razmatrat ćemo kasnije), sile otpora podloge su okomite na podlogu. Takve sile reakcije nazivamo idealnim silama reakcije. Ukupna idealna sila reakcije $\vec{R}_i$ na i-tu česticu, koja osigurava valjanost svih holonomnih veza f_l (2.2) tijekom gibanja sustava, je zbroj komponenti duž pravaca $\nabla_i f_l$,

$$\vec{R}_i = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \nabla_i f_l, \quad l = 1,2,...,k, \tag{2.10}$$

gdje ∇_i označava gradijent po komponentama vektora $\vec{r}_i$. Rad takvih idealnih sila reakcije na svakom mogućem infinitezimalnom pomaku sustava $\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i d\vec{r}_i$ je nula, jer su idealne sile reakcije okomite na moguće pomake čestica sustava. Razliku dva moguća pomaka i-te čestice sustava u istom vremenskom intervalu dt nazivamo virtualnim pomakom $\delta\vec{r}_i$, tj.:

$$\delta\vec{r}_i = d'\vec{r}_i - d\vec{r}_i,$$

što znači da je rad idealnih sila reakcije na bilo kojem virtualnom pomaku sustava nula:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0. \tag{2.11}$$

Tvrdnja (2.11) je osnova d´Alembertova (ili d´Alembert-Lagrangeova) principa koji je polazni postulat iz kojega se izvode Lagrangeove jednadžbe.

d´Alembertov princip:

Sustav N čestica na koji djeluje k idealnih holonomnih veza (2.2) giba se tako da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \delta\vec{r}_i = 0. \tag{2.12}$$

Pretpostavimo li vrijede Newtonovi zakoni, onda iz (2.1) i (2.11) direktno slijedi gornji izraz, što je dokaz da iz Newtonove formulacije slijedi Lagrangeova.

d´Alembertov princip je pogodna polazna osnova za razmatranje gibanja sustava s vezama jer je ekvivalentan Newtonovim zakonima, a ne sadrži eksplicitno sile reakcija. Sve jednadžbe koje izvedemo iz (2.12) neće zahtijevati poznavanje sila reakcije! Lagrangeove jednadžbe gibanja slijede iz d´Alembertova principa ako svaki član u (2.12) prepišemo pomoću novih nezavisnih varijabli – generaliziranih koordinata q_j sustava.

Generalizirana sila Q_j pridružena generaliziranoj koordinati q_j po definiciji je:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{2.13}$$

Za konzervativni sustav je $\vec{F}_i = -\nabla_i U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N)$, pa su konzervativne generalizirane sile:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \tag{2.14}$$

gdje je potencijalna energija sustava $U = U(q_1,q_2,....,q_n)$. Veličine Q_j nazivamo generalizirane sile jer imaju dimenzije sile samo ako odgovarajuća generaliziran koordinata q_j ima dimenzije duljine, ali produkt $Q_j\,\delta q_j$ uvijek ima dimenzije rada. Zbog (2.14) prelazak na generalizirane koordinate q_j očuvava podjelu fizikalnih sustava na konzervativne-nekonzervativne.

Općenitiji slučaj su potencijalne sile $Q_j^{\,p}$ koje se po definici dobijaju deriviranjem iz generalizirane potencijalne energije $\tilde{U}$ koja zavisi i od generaliziranih koordinata q_j i od generaliziranih brzina $\dot{q}_j$ prema:

$$Q_j^{\,p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial q_j}. \tag{2.15}$$

Svaka generalizirana sila Q_j uvijek se može rastaviti na zbroj jedne potencijalne $Q_j^{\,p}$ i jedne nepotencijalne Q_j^* komponente:

$$Q_j = Q_j^{\,p} + Q_j^*. \tag{2.16}$$

Virtualni pomak i-te čestice izražen preko generaliziranih koordinata je:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \tag{2.17}$$

gdje se $\delta q_j = d'q_j - dq_j$ naziva varijacija generalizirane koordinate q_j.

Koristeći (2.13), (2.17) i (2.9), te

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j},$$

iz d'Alembertovog principa odmah dobijamo:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta q_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) = 0\,, \tag{2.18}$$

ġto, zbog (2,14) i zbog linearne nezavisnosti varijacija generaliziranih koordinata, za fizikalno najvaġniji sluļaj konzervativnih sustava daje:

Lagrangeove jednadžbe za konzervativne sustave

Jednadġbe gibanja konzervativnog fizikalnog sustava sa n stupnjeva slobode na koji djeluje k idealnih holonomnih veza (2.2), opisanog Lagrangianom L:

$$L = L\left(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n\right) = T - U, \tag{2.19}$$

Gdje je T kinetiļka, a U potencijalna energija sustava su:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \quad j = 1,2,...,n. \tag{2.20}$$

Lagrangeove jednadġbe (2.20) ļine sustav n obiļnih diferencijalnih jednadġbi II reda ļijim rjeġavanjem, uz 2n poļetnih uvjeta q_{j_0} i $\dot{q}_{j_0}$, dobijamo poloġaj sustava u svakom trenutku $q_j(t)$. Kad traġimo parcijalne derivacije Lagrangiana u (2.20) generalizirane koordinate q_j i generalizirane brzine $\dot{q}_j$ smatramo nezavisnim varijablama.

Opĺenitije, ako generalizirane sile imaju potencijalne i nepotencijalne komponente, prema (2.15) i (2.16), je:

Lagrangeove jednadžbe

Fizikalni sustav sa n stupnjeva slobode opisan Lagrangianom

$$L = T - \tilde{U} = L\left(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t\right), \tag{2.21}$$

gdje je T kinetiļka, a $\tilde{U}$ generalizirana potencijalna energija sustava, na koji djeluje k idealnih holonomnih veza (2.2), giba se tako da vaġe Lagrangeove jednadġbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j\,*, \quad j = 1,2,...,n. \tag{2.22}$$

Ako je sustav potencijalan na desnoj strani je $Q_j^* = 0$.

Primjer 4. Lorentzova sila

Lorentzova sila na ļesticu naboja e u elektriļnom $\vec{E}(\vec{r},t)$ i magnetskom $\vec{B}(\vec{r},t)$ polju:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}, \tag{2.23}$$

je potencijalna sila koja zavisi od brzine ļestice $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ i moġe se dobiti deriviranjem iz generaliziranog potencijala:

$$\tilde{U}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right) = e\Phi(\vec{r},t) - e\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r},t), \tag{2.24}$$

gdje su skalarni i $\Phi(\vec{r},t)$ vektorski $\vec{A}(\vec{r},t)$ potencijali definirani relacijama:

$$\vec{E} = -\nabla\bar{u} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}. \tag{2.25}$$

Odaberimo za generalizirane koordinate $q_j = r_j$, $(j = 1,2,3)$ Kartezijeve koordinate nabijene ļestice. Koristeĺi za totalnu derivaciju po vremenu $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\nabla$, formule (2.15), (2.24) i (2.25) za komponente potencijalne generalizirane sile $Q_j^P = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{r}_j}\right) - \frac{\partial\tilde{U}}{\partial r_j}$ daju:

$$Q_j^{\,p} = d_t\left(-eA_j\right) - e\partial_j\bar{u} + e\sum_{m=1}^{3}\dot{r}_m\partial_j A_m = -e\partial_j\bar{u} - e\partial_t A_j - e\sum_{m=1}^{3}\dot{r}_m\partial_m A_j + e\sum_{m=1}^{3}\dot{r}_m\partial_j A_m =$$

$$= e\left(-\partial_j\Phi - \partial_t A_j\right) + e\sum_{m=1}^{3}\dot{r}_m\left(\partial_j A_m - \partial_m A_j\right) = eE_j + e\sum_{m=1}^{3}\dot{r}_m\sum_{n=1}^{3}\mathring{U}_{jmn}B_n = eE_j + e\sum_{m,n=1}^{3}\mathring{U}_{jmn}\dot{r}_m B_n =$$

$$= eE_j + e\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right)_j = F_j \quad \text{u skladu sa (2.23).}$$

U gornjim relacijama koriste se skraĺenice:

$$d_t \equiv \frac{d}{dt}\;;\quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}\;;\quad \partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial r_m}.$$

Prema tome, za fizikalno vaġan sustav ļestice mase m i naboja e u spoljaġnjem elektromagnetskom polju Lagrangian je:

$$L = L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right) = T - \tilde{U} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - e\Phi(\vec{r},t) + e\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r},t), \tag{2.26}$$

gdje eksplicitna zavisnost Lagrangiana od vremena znaļi da sustav nije izoliran (ne ukljuļuje naboje koji su izvori elektromagnetskih potencijala Φ i A).

U najopćenitijem slučaju, ako je gibanje sustava N čestica ograničeno sa k holonomnih (2.2) i r neholonomnih veza (2.7), jednadžbe gibanja sustava su:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^{r} \lambda_s a_{sj} = Q_j{}^*, \quad j = 1,2,\ldots,n = 3N - k,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\dot{q}_j + a_{st} = 0, \quad s = 1,2,\ldots,r, \tag{2.27}$$

gdje je $L = T - \tilde{U} = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$ Lagrangian sustava, a λ_s su množitelji veza.

Jednadžbe (2.27) tvore sustav od n + r običnih diferencijalnih jednadžbi II reda za n generaliziranih koordinata $q_j(t)$ i r nepoznatih množitelja veza $\lambda_s(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$.

Gornje jednadžbe slijede iz poopćenja izraza (2.18) za slučaj kad postoji i r neholonomnih veza (2.7):

$$\sum_{j=1}^{n} \delta q_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{s=1}^{r} \lambda_s a_{sj} \right) = 0, \tag{2.28}$$

gdje je funkcija Lagrangeovih multiplikatora λ_s da osiguraju da koeficijenti uz r zavisnih varijacija generaliziranih koordinata δq_j budu nula.

Primjer 5. Lagrangeovi multiplikatori

Umjesto općeg dokaza, metod multiplikatora veza ilistrirajmo na jednostavnom primjeru. Neka imamo diferencijalnu jednadžbu:

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0. \tag{2.29}$$

Ako su x, y i z linearno nezavisne varijable jedino rješenje je:

$$P = 0 \qquad Q = 0 \qquad R = 0.$$

Ali, ako među 3 varijable x, y, z postoji jedna diferencijalna veza oblika:

$$A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz = 0. \tag{2.30}$$

samo su dvije varijable, recimo x i y, linearno nezavisne. Za diferencijal dz iz jednadžbe veze slijedi:

$$dz = -\frac{A}{C}dx - \frac{B}{C}dy,$$

što zamjenom u polaznu jednadžbu daje $\left(P - \frac{RA}{C}\right)dx + \left(Q - \frac{RB}{C}\right)dy = 0$, sa rjeġenjem: $$P-\frac{RA}{C}=0, \qquad Q-\frac{RB}{C}=0 .$$

Ako problem ġelimo rjeġiti metodom mnoġitelja veza, svaka veza se prvo pomnoġi s neodreĽenim Lagrangeovim multiplikatorom λ:

$$\lambda A + \lambda B + \lambda C = 0$$

i potom pridoda poļetnoj jednadġbi, ġto daje:

$$(P+\lambda A)dx+(Q+\lambda B)dy+(R+\lambda C)dz=0 . \tag{2.31}$$

Lagrangeov multiplikator se odredi iz uvjeta da je koeficijent uz diferencijal zavisne varijable nula:

$$\lambda=-\frac{R}{C},$$

ġto gornju jednadġbu prevodi u jednadġbu u kojoj se pojavljuju samo diferencijali nezavisnih varijabli:

$$(P+\lambda A)dx+(Q+\lambda B)dy=0 ,$$

sa rjeġenjem:

$$P + \lambda A = 0 \qquad Q + \lambda B = 0.$$

Uvrġtavanjem vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora u ovo rjeġenje opet naravno dobijamo:

$$P-\frac{RA}{C}=0 \qquad Q-\frac{RB}{C}=0 .$$

UvoĽenjem mnoġitelja veza promjenili smo originalnu jednadġbu (2.29) u jednadġbu koja sadrġi dodatne ļlanove (2.31) u kojoj su koeficijenti uz diferencijale svih varijabli, i nezavisnih i zavisnih, nula. Uvjeti iġļezavanja koeficijanata uz diferencijale zavisnih varijabli upravo odreĽuju vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora.

Kao i u sluļaju holonomnih veza, da bi se sustav gibao u skladu sa r neholonih veza tipa (2.7) moraju djelovati neke sile reakcije $\vec{R}_i'$. Ako zamislimo da su to aktivne sile koje djeluju na naļin da gibanje sustava ostane nepromjenjeno, sve neholonomne veze bile bi eliminirane i umjesto (2.28) dobili bi:

$$\sum_{j=1}^{n}\delta q_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j-Q_j'\right)=0 , \tag{2.32}$$

gdje su Q_j' dodatne generalizirane sile koje osiguravaju vaģenje neholonomnih veza. Poredeĺi (2.28) i (2.32) vidimo da Lagrangeovi multiplikatori odreĽuju generalizirane sile ļije djelovanje osigurava vaģenje neholonomnih veza (2.7), tj.

$$Q_j' = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s a_{sj} \,. \tag{2.33}$$

Primjer 6. Ekvivalentnost Lagrangeove i Newtonove formulacije mehanike.

Veĺ smo vidjeli da iz II Newtonovog zakona u sluļaju idealnih holonomnih veza slijedi d´Alembertov princip, pa onda i Lagrangeove jednadģbe koje smo iz njega izveli. Ako nema veza, pa prema tome ni sila reakcije, iz Lagrangeovih jednadģbi za sustav N ļestica slijede Newtonove jednadģbe. Odaberemo li Kartezijeve koordinate ļestica za generalizirane koordinate, Lagrangian je:

$$L = T - U = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t\right), \tag{2.34}$$

pa je u vektorskoj notaciji:

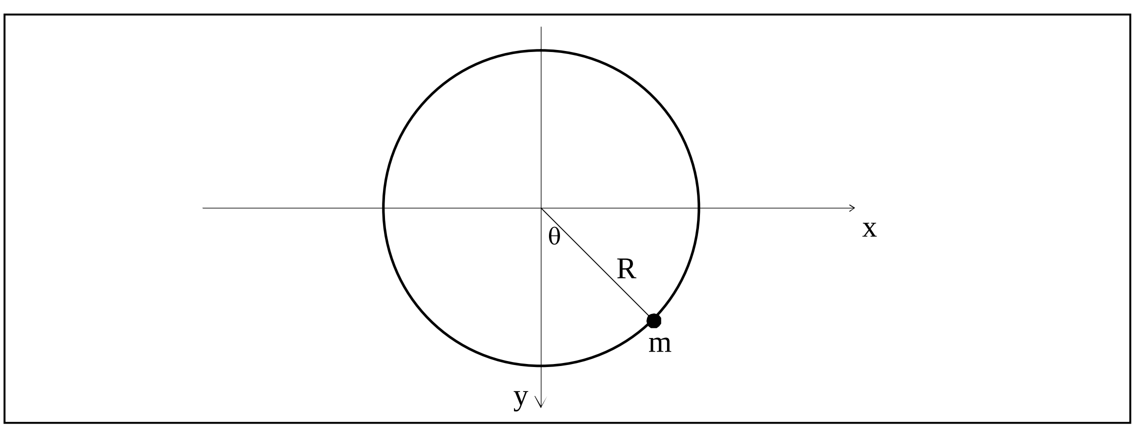
$$\nabla_{r_i} L = -\nabla_{r_i} U = \vec{F}_i \,, \quad \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{r}_i} L = m_i \ddot{\vec{r}}_i \,,$$

i Lagrangeove jednadģbe zaista daju:

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{r}_i} L = \nabla_{r_i} L \quad \Leftrightarrow \quad m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \,.$$

Primjer 7. Matematiļko njihalo

Kao primjer konzervativnog sustava sa idealnim holonomnim vezama razmotrimo matematiļko njihalo – ļesticu koja se giba po kruģnici u vertikalnoj ravnini Slika 7. Na ļesticu djeluje teģina – gravitacijska sila Zemlje i neka sila reakcije koja prisiljava ļesticu da ostane na vertikalnoj kruģnici radijusa R (napetost niti $\vec{T}$, na primjer).



Slika 7.

Gibanje čestice ograničavaju dvije idealne holonomne veze – čestica mora ostati u vertikalnoj z = 0 ravnini i na kružnici radijusa R. Jednadžbe veza su:

$$z = 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 = R^2,$$

pa matematičko njihalo ima samo jedan stupanj slobode n = 1. Za generaliziranu koordinatu odaberimo otklon njihala od ravnotežnog položaja θ. Gravitacijska sila na česticu je $+ mg\hat{j}$, te je potencijalna energija U(y) = – mgy + C. Odaberimo konstantu C tako da U = 0 u ravnotežnom položaju njihala, tj. U(y) = mgy – mgR. Čestica ima samo θ-komponentu brzine, pa su kinetička i potencijalna energija izražene preko generalizirane koordinate θ:

$$T = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 \qquad\qquad U(\theta) = mgR(\cos\theta - 1),$$

i Lagrangian njihala je:

$$L = L\left(\theta, \dot{\theta}\right) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 - mgR\left(\cos\theta - 1\right). \tag{2.35}$$

Lagrangeova jednadžba (2.20) za matematičko njihalo je:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0\,. \tag{2.36}$$

Množeći sa $\dot{\theta}$ lako je integrirati (2.36) i dobiti:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\left(\cos\theta + C\right), \tag{2.37}$$

prvi integral jednadžbe gibanja (2.36), što je naravno zakon očuvanja energije njihala:

$$E = T + U = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + mgR\left(1 - \cos\theta\right) = \text{const.} \tag{2.38}$$

Izrazi (2.37) i (2.38) su identični ako za konstantu integracije odaberemo: $C = \dfrac{E}{mgR} - 1$.

Vrijednost konstante E (ili C) određuju tip gibanja matematičkog njihala:

- $C > 1 \;\Leftrightarrow\; E > 2mgR \;\Rightarrow\; \dot{\theta}^2 > 0$ – konstantna rotacija,
- $C = 1 \;\Leftrightarrow\; E = 2mgR \;\Rightarrow\; \dot{\theta}^2 \geq 0$ i $\dot{\theta} = 0$ samo za $\theta = \pi$ – asimtotska rotacija,
- $-1 < C < 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < E < 2mgR \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = 0$ za $\alpha = \pm \arccos C$ – titranje između $-\alpha$ i $+\alpha$,
- $C = -1 \;\Leftrightarrow\; E = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{\theta} = \theta = 0$ – mirovanje u stabilnom ravnotežnom položaju,
- $C < -1 \;\Leftrightarrow\; E < 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{\theta}^2 < 0$ – nefizikalni slučaj.

Fizikalno interesantan sluļaj je oscilatorno gibanje za 0 < E < 2mgR.

U aproksimaciji malih osilacija je $\theta \approx 0$, tj. $\sin\theta \approx \theta$ i jednadģba gibanja njihala postaje:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0,$$

ista kao i za linearni harmoniļki oscilator (1.72), sa rjeģenjem:

$$\theta(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi),$$

gdje je kutna frekvencija: $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$, a period malih oscilacija njihala:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{2.39}$$

Amplituda α i poļetna faza φ odreĽuju se iz poļetnih uvjeta:

$$\theta_0 = \alpha\cos\varphi \quad \text{i} \quad \dot{\theta}_0 = -\omega\alpha\sin\varphi.$$

U opĺem sluļaju, odaberemo li za konstantu $C = -\cos\alpha$, gdje je α amplituda njihala, prvi integral jednadģbe gibanja (2.37) moģe se napisati u obliku:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}},$$

ģto je diferencijalna jednadģba I reda koja dozvoljava separaciju varijabli:

$$\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt = \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

sa rjeģenjem:

$$\sqrt{\frac{g}{R}}\,t = \int_0^{\theta}\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}}, \quad k = \sin\frac{\alpha}{2}, \tag{2.40}$$

gdje smo, bez gubitka opĺenitosti, odabrali da je $t = 0$ kad je ļestica u ravnoteģnom poloģaju. Smjenom varijabli: $\sin\frac{\theta}{2} = k\,u$, $\cos\frac{\theta}{2}d\left(\frac{\theta}{2}\right) = k\,du$, $d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{k\,du}{\sqrt{1-k^2u^2}}$, rjeģenje jednadģbe gibanja matematiļkog njihala postaje:

$$\sqrt{\frac{g}{R}}\,t=\int_0^u \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-k^2u^2\right)}}\,. \tag{2.41}$$

Izraz na desnoj strani u (2.41) je dobro definirana funkcija gornje granice u, tj. kuta θ. Integral se naziva eliptički integral prve vrste i ne može se izraziti pomoću elementarnih funkcija, već samo numerički računati – postoje numeričke tabele i kompjuterski programi.

Fizikalno najinteresantniji karakteristika njihala je njegov period T. Ako njihalo u $t = 0$ krene iz ravnotežnog položaja $\theta = 0$, u položaj amplitude $\theta = \alpha$ dospije u trenutku $t=\frac{T}{4}$, pa iz (2.41) za period njihala slijedi:

$$T=4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-k^2u^2\right)}}$$

ili smjenom $u = \sin x$:

$$T=4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,. \tag{2.42}$$

Razvijelimo li podintegralnu funkciju u red: $\left(1-k^2\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}x$, i integriramo član po član, što je moguće jer red uniformno konvergira, koristeći:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\sin^{2n}x=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2},$$

za period njihala konačno dobijamo:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}=$$

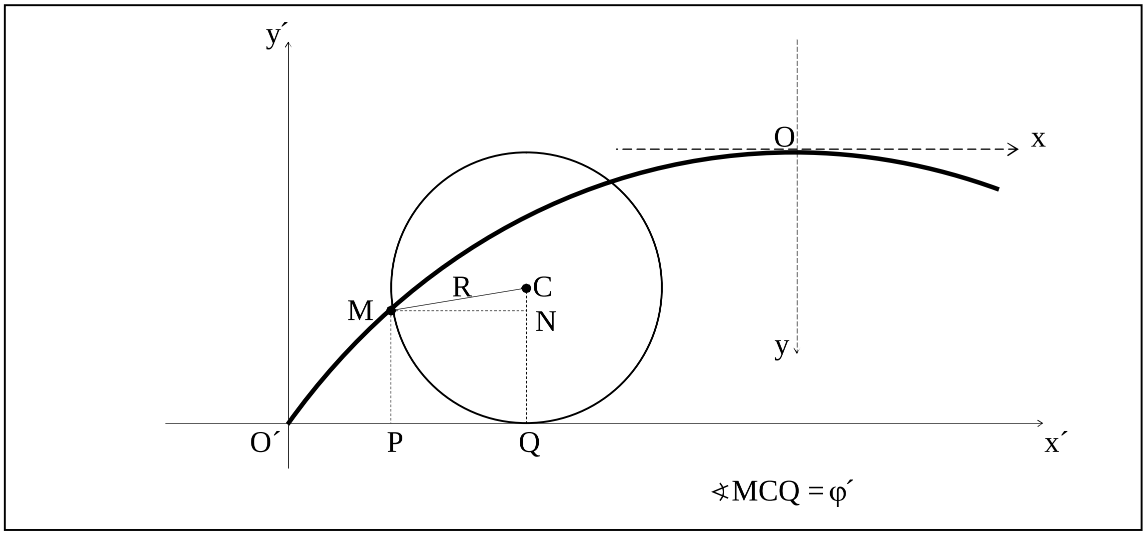
$$=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta}{2}+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\frac{\theta}{2}+\ldots\right].$$

Period matematičkog njihala ovisi o amplitudi α. Samo prvi član u gornjem redu je ne ovisi o α i isti je kao i u slučaju malih oscilacija. No, zavisnost je slaba (red brzo konvergira), jer je npr. čak i za $\alpha=\frac{\pi}{3}$, drugi član u redu je $\frac{1}{16}$-prvog, a treći je $\frac{9}{1024}$-prvog, itd.

Pogledajmo sad na jednostavnom primjeru kako odabir generaliziranih koordinata utječe na jednadžbe gibanja sustava.

Primjer 8. Cikloidno njihalo

Sustav koji nazivamo cikloidno njihalo je ļestica koja se bez trenja giba po cikloidi u vertikalnoj ravnini ï jedina razlika u odnosu na matematiļko njihalo je putanja ļestice, cikloida umjesto kruġnice. Cikloida je krivulja koju opisuje toļka na rubu kotaļa radijusa R koji se bez klizanja giba po horizontalnoj podlozi kao na Slici 8.



Slika 8.

Koordinate proizvoljne toļke M, ļiji je poļetni poloġaj u ishodiġtu O´, cikloide prema slici su:

$$x' = O'P = O'Q - PQ = O'Q - R\sin\varphi',$$

$$y' = PM = QC - NC = R - R\cos\varphi'.$$

gdje je φ' kut rotacije kotaļa.

Uvjet kotrljanja bez klizanja zahtijeva: $O'Q = \text{luk}\,(MQ) = R\varphi'$, pa su parametarske jednadġbe cikloide:

$$x' = R(\varphi' - \sin\varphi'), \quad y' = R(1 - \cos\varphi'). \tag{2.43}$$

Jasno je da za cikloidno njihalo trebamo obrnutu cikloidu po kojoj ļestica moġe oscilirati. Jednadġbe takve cikloide, najjednostavnije je naĺi ako jednadġbe (2.43) prevedemo u xOy koordinatni sustav s centrom u poloġaju stabilne ravnoteġe ļestice O. Smjenama:

$$x = x' - \pi R, \qquad y = -y' + 2R, \qquad \varphi' = \varphi + \pi,$$

dobijamo parametarske jednadġbe cikloide u vertikalnoj ravnini:

$$x = R(\varphi + \sin\varphi), \qquad y = R(1 - \cos\varphi), \tag{2.44}$$

po kojoj se ļestica giba.

Sustav ima jedan stupanj slobode gibanja i za generaliziranu koordinatu moģemo odabrati kut rotacije ű . Kako je iz (2.44):

$$\dot{x} = R(ũ + ũ\cos ű), \qquad \dot{y} = Rũ\sin ű ,$$

kinetiļka energija ļestice je:

$$T = 2mR^2ũ^2\cos^2\frac{ű}{2} .$$

Kao i u sluļaju matematiļkog njihala biramo da minimum gravitacijske potencijalne energije ļestice nula u poloģaju stabilne ravnoteģe $\varphi = 0$, pa je: U = mgy = mgR(1 – cos ű), tj.

$$U = 2mgR\sin^2\frac{ű}{2} ,$$

te je Lagrangian:

$$L = L(ű, ũ) = T ï U = 2mR^2ũ^2\cos^2\frac{ű}{2} - 2mgR\sin^2\frac{ű}{2} . \tag{2.45}$$

Jednadģba gibanja cikloidnog njihala $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial ũ}\right) - \frac{\partial L}{\partial ű} = 0$ je onda:

$$űcos\frac{ű}{2} - \frac{1}{2}\left(ũ^2 + \frac{g}{R}\right)\sin\frac{ű}{2} = 0 , \tag{2.46}$$

komplicirana nelinearna diferencijalna jednadģba II reda.

Ali, odaberemo li za generaliziranu koordinatu s elongaciju ļestice, tj. duljinu luka cikloide koja je preĽeni put ļestice mjeren od ravnoteģnog poloģaja, iz izraza za kinetiļku energiju:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2mR^2ũ^2\cos^2\frac{ű}{2} ,$$

slijedi: ds = $2R\cos\frac{ű}{2}dű$, pa se integracijom dobija veza nove i stare generalizirane koordinate:

$$s = 4R\sin\frac{ű}{2} . \tag{2.47}$$

Lagrangian cikloidnog njihala kao funkcija nove koordinate s je jednostavna

$$L = L(s, \dot{s}) = T ï U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{8R}mgs^2 , \tag{2.48}$$

kvadratna funkcija generalizirane koordinate s i generalizirane brzine $\dot{s}$ (kao jednodimenzioni LHO za koji je: $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$), koja daje jednadǵbu gibanja cikloidnog njihala:

$$\ddot{s} + \varkappa^2 s = 0\,, \qquad \varkappa^2 = \frac{g}{4R}\,. \tag{2.49}$$

Znaļi, gibanje cikloidnog njihala je prosto harmoniļko titranje: $s(t) = s_m \cos(\omega t + \alpha)$, sa amplitudom s_m , poļetnom fazom α i periodom:

$$T = \frac{2'}{\varkappa} = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}\,. \tag{2.50}$$

Cikloidno njihalo je izohrono ï period ne zavisi od amplitude njihala.

Zamjena generaliziranih koordinata cikloidnog njihala $\varphi \leftrightarrow s$ je primjer opĺeg svojstva form-invarijantnosti Lagrangeovih jednadǵbi. Lagrangeove jednadǵbe vaģe u bilo kojem sustavu generaliziranih koordinata, tj. precizno:

Invarijantnost Lagrangeovih jednadžbi pri koordinatnim transformacijama

Lagrangeove jednadǵbe su invarijantne pri proizvoljnoj transformaciji generaliziranih kordinata: $q_j \to Q_j(q,t)$. Znaļi, ako vaģi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \qquad j = 1,2,....,n, \tag{2.51}$$

vaģiĺe i Lagrangeove jednadǵbe za transformirani Lagrangian:

$$L'\left(Q,\dot{Q},t\right) = L\left[q(Q,t), \dot{q}(Q,\dot{Q},t), t\right]. \tag{2.52}$$

Zaista, kako je: $\dot{q}_j = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \dot{Q}_m + \frac{\partial q_j}{\partial t}$, vaģi: $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_m}$, pa je:

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial Q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial Q_j}\,; \qquad \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{\partial q_m}{\partial Q_j}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}\right) = \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)\right] \frac{\partial q_m}{\partial Q_j} + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_m}{\partial Q_j}\right).$$

Lagrangeove jednadġbe koje daje novi L' Lagrangian (2.52) su onda:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}\right)-\frac{\partial L'}{\partial Q_j}=\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_m}\right]\frac{\partial q_m}{\partial Q_j}+\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_m}{\partial Q_j}\right)-\frac{\partial \dot{q}_m}{\partial Q_j}\right].$$

Prvi ļlan na desnoj strani je nula po pretpostavci (2.51), a drugi je nula jer je:

$$\frac{\partial \dot{q}_m}{\partial Q_j}=\frac{\partial}{\partial Q_j}\frac{dq_m}{dt}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 q_m}{\partial Q_j \partial Q_l}\dot{Q}_l+\frac{\partial^2 q_m}{\partial Q_j \partial t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_m}{\partial Q_j}\right),$$

ġto znaļi da zaista vrijedi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j}\right)-\frac{\partial L'}{\partial Q_j}=0\,.$$

Napomenimo na kraju kako se u Lagrangeov formalizam uvode sile trenja ili opĺenitije sile otpora sredstva. Sile otpora sredstva su rezultat ogromnog broja kompliciranih, uglavnom elektromagnetskih interakcija, izmeĽu atoma (molekula) ï znaļi kvantno mehaniļkih interakcija, materijalnih objekata u relativnom gibanju. Ukupna sila otpora zavisi od vrste atoma, oblika i stanja povrġine tijela, relativne brzine, itd. Zato se za silu otpora koriste razliļiti aproksimativni, fenomenoloġki izrazi prilagoĽeni tipu sustava koji se razmatraju.

Sile otpora $\vec{F}_{tr.}$ su najļeġĺe nepotencijalne i koriste se Lagrangeove jednadġbe (2.22). Na primjer u hidrodinamici je ļesto sila otpora proporcionalna brzini ļestice (Stokesov zakon), tj. $\vec{F}_{tr.}=-d_x\dot{x}\,\vec{i}-d_y\dot{y}\,\vec{j}-d_z\dot{z}\,\vec{k}$, gdje u opĺem sluļaju koeficijent trenja moġe zavisiti od pravca koordinatne osi. Takva sila trenja moġe se derivirati iz disipativne funkcije sustava F:

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_x v_{i_x}{}^2+d_y v_{i_y}{}^2+d_z v_{i_z}{}^2\right),\tag{2.53}$$

kao negativni gradijent po komponentama brzine ļestive:

$$\vec{F}_{tr.,i}=-\nabla_{v_i}F.$$

Ukupni rad protiv sila trenja je onda:

$$dW_{tr.}=-\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{tr.,i}\,d\vec{r}_i=-\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{tr.,i}\,\vec{v}_i\,dt=2F\,dt,\tag{2.54}$$

ġto znaļi da disipativna funkcija predstavlja dvostruku snagu disipacije mehaniļke energije fizikalnog sustava uslijed sila trenja.

Komponente generalizirane sile Q_j* koju pridruġujemo silama trenja su prema (2.13) i (2.9):

$$Q_j^* = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{tr,i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \nabla_{v_i} \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \nabla_{v_i} \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} . \qquad (2.55)$$

Umjesto (2.22), Lagrangeove jednadģbe sada postaju:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0 , \qquad j = 1,2,....,n. \qquad (2.56)$$

Ako djeluju sile trenja (proporcionalne brzini ļestice), da bi se dobile jednadģbe gibanja, pored Lagrangiana L, treba poznavati i disipativnu funkciju sustava $\mathcal{F}$.

2.2 Zakoni očuvanja

U Lagrangeovoj formulaciji mehanike moģe se pokazati veza izmeĽu prostorno-vremenskih simetrija fizikalnog sustava i zakona oļuvanja. Povezanost simetrija Lagrangiana (ili Hamiltonijana) fizikalnog sustava i zakona oļuvanja poznata je kao Noether teorem (Emmi Noether 1918.) i ima veliki znaļaj u poopĺenju klasiļne mehanike na teoriju polja (teoriju gibanja sustava sa neprebrojivo mnogo stupnjeva slobode). Noether teorem u osnovi tvrdi da za svaku grupu kontinuiranih transformacija generaliziranih koordinata q_j i brzina $\dot{q}_j$ koje ostavljaju invarijantnim Lagrangian sustava postoji jedna oļuvana fizikalna veliļina.

Razmotrimo osnovne prostorno-vremenske transformacije fizikalnih sustava: vremenske translacije, prostorne translacije i prostorne rotacije. Klasiļni princip relativnosti zahtijeva da u bilo kojem IRS-u (referentni sustav u kome su prostor i vrijeme su homogeni i izotropni), ove transformacije koje su podgrupe Galilejeve grupe, budu transformacije simetrije svakog izoliranog fizikalnog sustava.

Lagrangian izoliranog konzervativnog sustava sa N ļestica je:

$$L = L\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) = T \text{ ï } U = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} U_{ij}\left(r_{ij}\right), \qquad (2.57)$$

gdje je U potencijalna energija unutarnjih sila kao u (1.47) koje zavise od relativne udaljenosti ļestica: $r_{ij} = \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|$.

- <u>Vremenske translacije $\Rightarrow$ oļuvanje energije</u>

Da bi infinitezimalna vremenska translacija:

$$t \to t' = t + \delta t, \qquad \text{ŭ}\vec{r}_i = \text{ŭ}\dot{\vec{r}}_i = 0 , \qquad (2.58)$$

bila simetrija Lagrangiana (2.57) mora vrijediti:

$$\delta L = L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t+\delta t\right) - L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right) = \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0\,, \tag{2.59}$$

tj., Lagrangian ne smije eksplicitno zavisiti od vremena. Potpuna vremenska derivacija Lagrangiana je:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \nabla_{r_i} L + \sum_{i=1}^{N} \ddot{\vec{r}}_i \nabla_{\dot{r}_i} L\,,$$

pa iz Lagrangeovih jednadžbi:

$$\nabla_{r_i} L - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{r}_i} L = 0\,, \tag{2.60}$$

slijedi:

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{r}_i} L \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad L - \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{r}_i} L = \text{const.}\,, \tag{2.61}$$

što je zakon očuvanja energije, jer je:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{r}_i} L = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{r}_i} T = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = 2T\,,$$

pa vrijedi:

$$E = T + U = \text{const.} \tag{2.62}$$

Posljedica invarijantnosti Lagrangiana pri vremenskim translacijama je zakon očuvanja energije sustava.

- Prostorne translacije $\Rightarrow$ očuvanje impulsa

Da bi infinitezimalna prostorna translacija:

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i^{\,\prime} = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i\,, \qquad \delta t = 0, \tag{2.63}$$

bila simetrija Lagrangiana (2.57) zbog zahtjeva:

$$\delta L = L\left(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t\right) - L\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t\right) = \delta\vec{r}_i \cdot \sum_{i=1}^{N} \nabla_{r_i} L = 0\,,$$

mora biti:

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla_{r_i} L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \nabla_{\dot{r}_i} L = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^{N} p_i = \text{const.} \tag{2.64}$$

Iz invarijantnosti Lagrangiana pri prostornim translacijama slijedi zakon oļuvanja impulsa sustava.

- <u>Prostorne rotacije $\Rightarrow$ oļuvanje angularnog momenta</u>

Da bi infinitezimalna rotacija za kut $d\vec{\varphi}$:

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i , \qquad \delta\dot{\vec{r}}_i = \delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{r}}_i , \qquad \delta t = 0. \tag{2.65}$$

bila transformacija simetrije, mora vaģiti:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \delta\vec{r}_i \cdot \nabla_{\vec{r}_i} L + \sum_{i=1}^{N} \delta\dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{\vec{r}}_i} L = 0 .$$

Kako je kut rotacije $d\vec{\varphi}$ proizvoljan iz Lagrangeovih jednadģbi (2.60) slijedi zakon oļuvanja momenta impulsa (angularnog momenta):

$$\delta\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i \right) = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i = \text{const.} \tag{2.66}$$

- <u>Specijalne Galilejeve transformacije $\Rightarrow$ zakon centra mase</u>

U sluļaju specijalnih Galilejevih transformacija koje prevode jedan IRS u drugi koji se giba konstantnom brzinom $\vec{V}$:

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \vec{V} t , \qquad \vec{V} = \text{const.} , \qquad \delta t = 0. \tag{2.67}$$

transformirani Lagrangian je:

$$L' = L + \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i + \frac{1}{2} V^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \, . \tag{2.68}$$

Promjena Lagrangiana (2.57) pri specijalnim Galilejevim transformacijama (2.67) je:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_C \right) \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_C \cdot \vec{V} \right) + \text{const.} . \tag{2.69}$$

Iako, δL nije nula, za Lagrangian (2.57) svejedno kaģemo da je invarijantan pri transformacijama (2.67), jer transformirani Lagrangian L' u (2.68) daje iste Lagrangeove jednadģbe kao i originalni Lagrangian L. Lagrangiani koji se razlikuju samo do na aditivnu konstantu ili totalnu vremensku derivaciju proizvoljne funkcije $f(q,t)$ generaliziranih koordinata i vremena (ali, ne generaliziranih brzina) su ekvivalentni jer daju iste Lagrangeove jednadģbe, u skladu s (2.52). Zaista, ako je:

$$\delta L = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\delta L = \frac{\partial f}{\partial q_j},$$

imamo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\delta L\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\delta L = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{df}{dt} = 0\,.$$

Za promjenu Lagrangiana pri transformacijama (2.67) moģemo prema (2.60) pisati i:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left(\delta\vec{r}_i \cdot \nabla_{r_i} L + \delta\dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_{\dot{r}_i} L\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{V} t \cdot \dot{\vec{p}}_i + \vec{V} \cdot \vec{p}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}\, t \cdot \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right). \tag{2.70}$$

Poredeĺ i (2.69) i (2.70) dobijamo zakon gibanja centra mase:

$$M\,\vec{r}_C - t\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \text{const.} \tag{2.71}$$

U Lagrangeovoj formulaciji, kao i u Newtonovoj, vaģe isti zakoni oļuvanja. Ali, Lagarngeova formulacija pokazuje da postoji intimna veza izmeĽu kontinuiranih prostorno-vremenskih transformacija simetrije fizikalnih sustava i osnovnih zakona oļuvanja energije, impulsa, angularnog momenta i centra mase koji vrijede za gibanje izoliranih fizikalnih sustava.

Veza zakona oļuvanja i transformacija simetrije fizikalnih sustava postaje najoļiglednija u najkompletnijoj formulaciji klasiļne mehanike ï Hamiltonovoj (kanonskoj) formulaciji koju ĺemo sada razmotriti.

3. Hamiltonov formalizam

Hamilton (1805-1865) je razvio aksiomatsku formulaciju klasične mehanike baziranu na ekstremalnom varijacionom principu koja određuje ne samo položaj, već kompletno mehaničko stanje sustava u generaliziranim koordinatama. Poseban značaj Hamiltonovog formalizma je mogućnost generalizacije na grane fizike izvan mehanike – statističku fiziku, kvantnu mehaniku, teoriju polja, itd. U modernoj fizici se za svaku fizikalnu teoriju zahtijeva i Hamiltonova formulacija. Najbolja ilustracija značaja ove formulacije je naziv koje mnogi autori daju Hamiltonovoj formulaciji teorije i Hamiltonovim jednadžbama gibanja – kanonska formulacija i kanonske jednadžbe gibanja (grčki: kanōn – pravilo, propis).

3.1 Hamiltonov princip

Svaki fizikalni sustav u Hamiltonovom formalizmu opisan je Hamiltonijanom H sustava čije poznavanje je ekvivalentno poznavanju Lagrangiana sustava. Osnovni postulat teorije je Hamiltonov princip (ili princip minimalnog djelovanja) koji se formulira preko funkcionala djelovanja (akcije) fizikalnog sustava.

Djelovanje (akcija) I[**q**] fizikalnog sustava opisanog Lagrangianom $L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = T - U$, (j = 1,2,....,n), definira se kao integral po vremenu Lagrangiana sustava između početnog t_1 i krajnjeg trenutka t_2, tj.:

$$I[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\right]. \tag{3.1}$$

Funkcional je matematički objekt koji zavisi od oblika funkcije/a. Djelovanje I[**q**] zavisi od putanje sustava $q_j(t)$ u (3.1) između dviju fiksnih konfiguracija $q_j(t_1)$ i $q_j(t_2)$ u početnom i krajnjem trenutku. Simbol **q** je skraćenica koja označava skup svih generaliziranih koordinata q_j.

Hamiltonov princip

Djelovanje (akcija) fizikalnog sustava opisanog Lagrangianom $L = L\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t\right)$ ima ekstrem (minimum) duž stvarne putanje sustava, tj. varijacija djelovanja je nula duž stvarne putanje sustava:

$$\delta I[\mathbf{q}] = 0. \tag{3.2}$$

Varijacija akcije δI se definira kao $\delta I = \left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_j}\right|_{\varepsilon_j = 0} \varepsilon_j$, gdje je ε_j infinitezimalni parametar koji razlikuje moguće putanje q_j. Kao i u analizi realnih funkcija, iščezavanje prve derivacije je potreban uvjet ekstrema. Dodatnim traženjem druge derivacije može se pokazati da duž stvarne putanje djelovanje fizikalnog sustava ima minimum.

Kako je Lagrangian invarijantan pri koordinatnim transformacijama u konfiguracijskom prostoru (2.52), Hamiltonov princip vrijedi u bilo kojem sustavu generaliziranih koordinata.

Hamiltonov princip je specijalni slučaj matematičkog problema računa varijacija koji su riješili Euler i Lagrange:

Varijacioni problem sa fiksnim krajnjim točkama:

Problem je naći funkcije $y_i\,(x)$ za koje funkcional S[**y**] definiran izrazom:

$$S[y_1,y_2,....,y_n] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f\left(y_1,....,y_n, y_1',....,y_n',t\right), \tag{3.3}$$

ima ekstrem, uz fiksne rubne uvjete:

$$y_i\,(x_1) = y_i^{(1)} = \text{const.}\,; \quad y_i\,(x_2) = y_i^{(2)} = \text{const.}, \tag{3.4}$$

gdje je: $y_i' = \dfrac{dy_i}{dx}$, (i = 1,2,...,n).

Rješenje ćemo naći za slučaj n = 1 jer je generalizacija na proizvoljni broj stupnjeva slobode n očigledna. Tražimo rješenje varijacionog problema

$$\delta S[y] = \delta\left[\int_{x_1}^{x_2} dx\, f\left(y, y', x\right)\right] = 0. \tag{3.5}$$

Neka je rješenje gornjeg varijacionog problema funkcija y = y(x). Prozvoljnu funkciju η(x,ε) koja zadovoljava rubne uvjete, tj. prolazi fiksnim točkama (x_1,y_1) i (x_2,y_2), kao na Slici 9. parametrizirajmo pomoću realnog parametra ε(x) koji je njeno odstupanje od stvarnog rješenja y(x). Funkcional S[y] čiju varijaciju tražimo zavisi od proizvoljne takve funkcije η(x,ε) definirane kao:

$$\eta(x,\varepsilon) = y(x) + \delta y(x) = y(x) + \varepsilon h(x), \tag{3.6}$$

koja zadovoljava fiksne rubne uvjete:

$$h(x_1) = h(x_2) = 0. \tag{3.7}$$

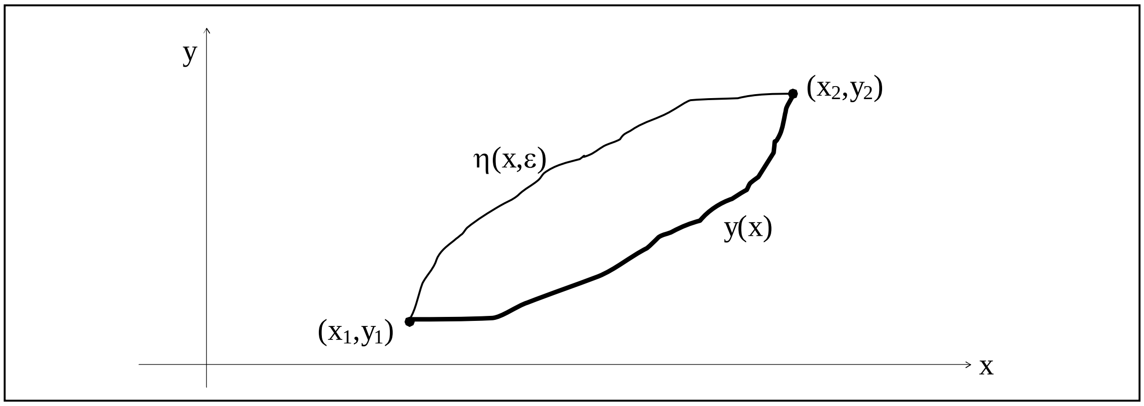
Za infinitezimalne vrijednosti parametra ε, razvojem u Taylorov red je: S[η] = S[y] + δS + ... , poslije parcijalne integracije varijacija funkcionala S je:

$$\delta S = \left.\frac{dS[\eta]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon = \varepsilon\int_{x_1}^{x_2} dx\left.\left[\frac{\partial f}{\partial \eta}h + \frac{\partial f}{\partial \eta'}h'\right]\right|_{\varepsilon=0} = \varepsilon\int_{x_1}^{x_2} dx\, h\left.\left[\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \eta'}\right]\right|_{\varepsilon=0} + \varepsilon\left[h\left.\frac{\partial f}{\partial \eta'}\right|_{\varepsilon=0}\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \varepsilon\int_{x_1}^{x_2} dx\, h\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right),$$

zbog uvjeta (3.7). Da bi funkcional S imao ekstrem mora biti $\delta S = 0$, ġto znaļi da traġena funkcija y mora zadovoljavati Euler-Lagrangeovu jednadġbu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0\,. \tag{3.8}$$



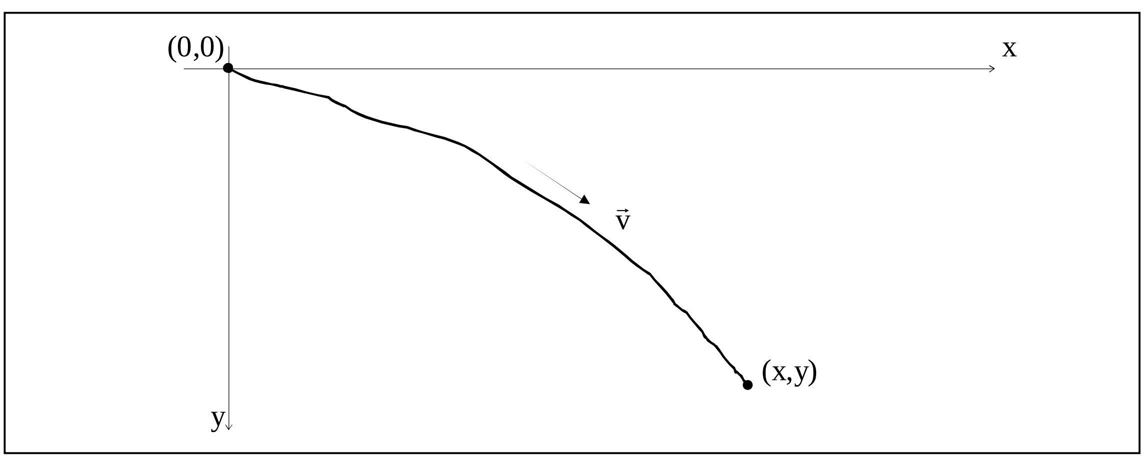
Slika 9.

U sluļaju n stupnjeva slobode, za svaku funkciju y_i mora vaġiti po jedna Euler-Lagrangeova jednadġba, tj. potreban uvjet da funkcional S[**y**] (3.3) ima ekstrem je:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0\,, \quad (i = 1,2,....,n). \tag{3.9}$$

<u>Primjer 1.</u> Brahistohrona krivulja (grļki: brachys ï kratak; chronos ï vrijeme, trajanje)

Kao primjer Euler-Lagrangeovih jednadġbi razmotrimo klasiļni problem nalaġenja krivulje u vertikalnoj ravnini duġ koje se mora gibati ļestica koja pod utjecajem teġine iz mirovanja padne u zadanu toļku za najkraĺe vrijeme (poznati problem u matematici ļijom analizom je Bernoulli postavio temelje varijacijskog raļuna).



Slika 10.

Odaberemo li koordinatni sustav tako da je poļetna toļka ishodiġte, kao na Slici 10., vrijeme dt za koje ļestica prijeĽe put ds $=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+y'^2}$ po krivulji je: dt = $\frac{ds}{v}$. Zakon oļuvanja energije daje: $E_1 = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$, tj. v = $\sqrt{2gy}$, pa je: dt $=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$. Integracijom je funkcional t[y] koji treba minimizirati:

$$t[y] = \int_0^x dx \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,. \tag{3.10}$$

Uvjet $\delta t[y] = 0$ daje Euler-Lagrangeovu jednadġbu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0\,,\ \text{gdje je: } f(y, y', x) = \left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

koju je najlakġe rjeġiti ako iskoristimo ļinjenicu da f ne zavisi eksplicitno od x, ġto znaļi da je $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, tj. vaġi: $\frac{df}{dx} = y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} = y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \left(\frac{d}{dx}y'\right)\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$, pa je:

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.},\ \text{ili eksplicitno: } dx = \sqrt{\frac{y}{y-C}}\,dy\,.$$

Smjenom $y = C\sin^2\frac{ű}{2}$ zadnja jednadġba postaje: $dx = C\sin^2\frac{ű}{2}dű$, koja se odmah integrira u jednaġbu brahistohrone:

$$x = \frac{C}{2}(ű - \sin ű), \qquad y = \frac{C}{2}(1-\cos ű)\,. \tag{3.12}$$

Izaberemo li konstantu integracije C = 2R, gornje jednadġbe postaju identiļne jednadġbama cikloide (2.43). Najkraĺe vrijeme potrebno ļestici da stigne u krajnju toļku je ļetvrtina perioda (2.50) odgovarajuĺeg cikloidnog njihala $t = \frac{T}{4} = ´\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Lagrangeove jednadġbe za konzervativni sustav sa idealnim holonomnim vezama oļuto su Euler-Lagrangeove jednadġbe (3.9) koje osiguravaju vaġenje Hamiltovog principa, tj. ispunjenje uvjeta ekstrema (minimuma) akcije (3.2):

$$\delta I[\mathbf{q}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,, \qquad (j = 1,2,...,n). \tag{3.13}$$

Ġtoviġe, vaġi ekvivalentnost d´Alembertovog (2.12) i Hamiltovog principa (3.2). Zaista,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \delta\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \delta W + \delta T\,, \tag{3.14}$$

gdje je δT promjena kinetiļke energije pri virtuelnom pomaku sustava $\delta\vec{r}_i$. Ako integriramo (3.14) po vremenu od t_1 do t_2 , zbog fiksnih rubnih uvjeta:

$$\delta\vec{r}_i(t_2) = \delta\vec{r}_i(t_1) = 0\,, \tag{3.15}$$

dobijamo:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\delta W + \delta T\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left[\dot{\vec{r}}_i(t_2)\cdot\delta\vec{r}_i(t_2) - \dot{\vec{r}}_i(t_1)\cdot\delta\vec{r}_i(t_1)\right] = 0\,. \tag{3.16}$$

Ako je sustav konzervativan vaģi:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{N}\delta\vec{r}_i\cdot\nabla_i U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N\right) = -\delta U\,, \tag{3.17}$$

tako da je:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\delta W + \delta T\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta\left(T - U\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta L = 0\,.$$

Kako su krajnje toļke fiksne, moģemo zamjeniti redoslijed integracije i varijacije i dobiti:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\,L = 0\,. \tag{3.18}$$

I u opĺenitijem sluļaju, kad postoje i nepotencijalne komponente generaliziranih sila (2.16) polazeĺi od Hamiltonovog principa u obliku:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta\left(T + W\right) = 0\,, \tag{3.19}$$

i djeleĺi ukupan rad aktivnih sila na virtuelnom pomaku sustava na rad potencijalnih i rad nepotencijalnih komponenti:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j^{\,p}\,\delta q_j + \sum_{j=1}^{n} Q_j^{*}\,\delta q_j\,,$$

te koristeĺi:

$$\delta T = \sum_{j=1}^{n}\delta q_j\left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right),$$

dobijamo Lagrangeove jednadġbe (2.22). U svim sluļajevima iz Hamiltonovog principa slijede iste jednadġbe gibanja kao i u Lagrangeovoj formulaciji.

VeĆ smo vidjeli, kao u relaciji (2.52) ili specifiļnom primjeru (2.69), da Lagrangian fizikalnog sustava nije jednoznaļno odreĽen. Hamiltonov princip (3.2) omoguĆuje da se precizno odredi kolika je nejednoznaļnost Lagrangiana.

Ako djelovanju (akciji) I[**q**] fizikalnog sustava dodamo konstantu neĆemo promjeniti jednadġbe gibanja ï Lagrangeove jednadġbe, koje slijede iz uvjeta $\delta I[\mathbf{q}] = 0$.

Definicija: **Baždarne (gauge) transformacije**

Ako je fizikalni sustav opisan Lagrangianom $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, tada bilo koji ekvivalentni Lagrangian L´ iz klase funkcija:

$$L' = \alpha L + \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t), \tag{3.20}$$

gdje je α realna konstanta, a proizvoljna funkcija f smije zavisiti od generaliziranih koordinata q_j i vremena, ali ne i od generaliziranih brzina $\dot{q}_j$, daje iste Lagrangeove jednadġbe, tj. istu putanju sustava.

Ovakve transformacije koje mijenjaju Lagrangian sustava $L \to L'$, bez utjecaja na fiziku, nazivaju se baġdarnim (gauge) transformacijama.

Zaista, pri gauge transformaciji (3.20) akcija sustava se promjeni samo u I´:

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\text{Ǔ}L + \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) \right] = \text{Ǔ}I + \text{const.},$$

zbog fiksnih rubnih uvjeta: $\delta q_j(t_2) = \delta q_j(t_1) = 0$.

Baġdarne transformacije su vaġne u elektrodinamici i kvantnoj mehanici, a osobito u kvantnoj teoriji polja ï teorije elementarnih ļestica su gauge teorije, tj. teorije kvantnih polja koja imaju svojstva lokalne gauge simetrije.

Najpoznatiji primjer teorije koja posjeduje gauge simetriju je klasiļna elektrodinamika. Gauge transformacija (3.20) u elektrodinamici je transformacija elektromagnetskih potencija ū i $\vec{A}$, oblika:

$$\text{ū} \to \text{ū}' = \text{ū} - \frac{\partial \text{ş}}{\partial t}; \qquad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \text{ş}, \tag{3.21}$$

gdje je $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ proizvoljno skalarno polje. Transformacije (3.21) nemaju fizikalnog efekta jer ostavljaju invarijantnim elektromagnetska polja:

$$\vec{E} = -\nabla \text{ū} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

ģto znaļi da ne mijenjaju elektromagnetske sile na nabijene ļestice, ali mijenjaju Lagrangian. Na primjer, Lagrangian ļestice naboja e u elektromagnetskom polju (2.26), transformacijama (3.21) prelazi u:

$$L' = L + e\frac{\partial \text{ş}}{\partial t} + e\dot{\vec{r}}\,\nabla \text{ş} = L + e\frac{d}{dt}\text{ş}\left(\vec{r}, t\right), \tag{3.22}$$

u skladu sa (3.20).

3.2 Hamiltonove (kanonske) jednadžbe

Da bi se odredio poloģaj ļestice u trenutku t + dt, u prvoj aproksimaciji, treba poznavati i poloģaj i brzinu ļestice u trenutku t, jer je: $\vec{r}_i(t + dt) = \vec{r}_i(t) + \dot{\vec{r}}_i(t)\,dt$, ģto znaļi da je mehaniļko stanje sustava odreĽeno poloģajem i brzinom ļestica u jednom trenutku. U Lagrangeovoj formulaciji svakom stupnju slobode gibanja odgovara jedna generalizirana koordinata q_j, a mehaniļko stanje sustava je odreĽeno sa 2n vrijednosti generaliziranih koordinata i generaliziranih brzina $\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}$. Sustav je opisan Lagrangianom L = $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ koji se smatra funkcijom 2n + 1 nezavisne varijable, iako je $\dot{q}_j$ derivacije od q_j. Postoji n jednadģbi gibanja ï Lagrangeovih jednadģbi (diferencijalne jednadģbe II reda), ali 2n poļetnih uvjeta neophodnih da se odredi poļetno stanje sustava.

U Hamiltonovoj formulaciji uklanja se gornja asimetrija. Gibanje sustava N ļestica sa n stupnjeva slodode odreĽeno je sa 2n jednadģbi gibanja ï Hamiltonovih (kanonskih) jednadģbi, koje su obiļne diferencijalne jednadģbe I reda. Partikularno rjeģenje Hamiltonovih jednadģbi zahtijeva poznavanje poļetnih vrijednosti svih 2n kanonskih varijabli ï generaliziranih koordinata q_j i njima pridruģenih generaliziranih momenata p_j.

Definicija: **Generalizirani moment p_j**

Generalizirani moment (impuls) pridruģen generaliziranoj koordinati q_j je:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad (j = 1,2,....,n). \tag{3.23}$$

<u>Mehaniļko stanje sustava sa n stupnjeva slobode u trenutku t odreĽeno je vrijednostima 2n kanonskih varijabli $\{q_j(t), p_j(t)\}$, tj. jednom toļkom u faznom prostoru fizikalnog sustava (2n dimenzionalni prostor ļiju bazu ļine kanonske varijable)</u>.

Prijelaz sa Lagrangeove na Hamiltonovu formulaciju (i obratno), zahtijeva invertiranje jednadžbi (3.23), tako da se n generaliziranih brzina $\dot{q}_j$ izrazi preko kanonskih varijabli q_j i p_j, tj.:

$$(3.23) \;\; \Rightarrow \;\; p_j = p_j\left(q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...,\dot{q}_n,t\right) \;\; \Leftrightarrow \;\; \dot{q}_j = \dot{q}_j\left(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n,t\right), \tag{3.24}$$

što je uvijek moguće ako sustav nije degeneriran, tj. ako je ispunjen uvjet:

$$\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\right| \neq 0. \tag{3.25}$$

<u>Napomena:</u> Prijelaz sa Lagrangeove na Hamiltonovu formulaciju moguć je i za degenerirane sustave, one za koje ne važi (3.25), kao što je pokazao P.A.M. Dirac 1950. Takav, kompliciraniji slučaj, nema veliki značaj u klasičnoj mehanici, ali ima u kvantnoj teoriji polja – primjeri su kvantna elektrodinamika i teorija gravitacije. Vidi npr. A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim: «Constrained Hamiltonian Systems», 1976.

U Hamiltonovom formalizmu fizikalni sustav je opisan Hamiltonianom H:

Definicija: **Hamiltonijan H sustava**

Hamiltonian fizikalnog sustava sa n stupnjeva slobode je:

$$H = H(q_j,p_j,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L, \tag{3.26}$$

gdje je L = T – U = $L\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t\right)$ Lagrangian sustava. Hamiltonian je funkcija 2n + 1 nezavisne varijable – n parova konjugiranih kanonskih varijabli (q_j,p_j) i eventualno eksplicitna funkcija vremena ako sustav nije izoliran.

U matematici se transformacija (3.26), tj. $L\left(q_j,\dot{q}_j,t\right) \rightarrow H\left(q_j,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},t\right)$, naziva Legendreovom transformacijom. Koristeći definicije (3.26) i (3.23) i Lagrangeove jednadžbe, lako je naći Hamiltonove jednadžbe:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} = \dot{q}_j\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{p}_j\,,$$

tj. za gibanje fizikalnog sustava vrijede:

Hamiltonove (kanonske) jednadžbe

Za holonomni konzervativni sustav sa n stupnjeva slobode Hamiltonove (kanonske) jednadģbe su:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (j = 1,2,....,n). \tag{3.27}$$

Hamiltonove jednadģbe za fizikalni sustav sa n stupnjeva slobode gibanja ļine sustav od 2n obiļnih diferencijalnih jednadģbi I reda.

Iz definicije Hamiltonijana (3.26) veza izmeĽu vremenskih derivacija Hamiltonijana i Lagrangiana je:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.28}$$

Znaļi, ni Lagrangian, ni Hamiltonian, konzervativnog (ili opĺenitije potencijalnog) sustava sa stacionarnim holonomnim vezama ne zavise eksplicitno od vremena.

Lagrangian ļestice konzervativnog sustava na koju ne djeluju veze je $L\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)$ = T – U = $\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$. Ļestica ima n = 3 stupnja slobode gibanja.

Ako su generalizirane koordinate ļestice Kartezijeve koordinate, pridruģeni generalizirani momenti su:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

odgovarajuĺe komponente impulsa ļestice ï zato se generalizirani momenti ponekad nazivaju generalizirani impulsi.

Ako su generalizirane koordinate ļestice njene cilindriļne koordinate: L = T ï U = $= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho,\varphi,z)$, pridruģeni generalizirani momenti su:

$$p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z},$$

a u sluļaju sfernih koordinata je: $T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$, generalizirani momenti su:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}.$$

Hamiltonove jednadžbe moguće je dobiti i direktno iz Hamiltonovog principa (3.2). Fiksni rubni uvjeti zahtijevaju $\delta q_j(t_2) = \delta q_j(t_1) = 0$, pa je:

$$0 = \delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - H\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{n}\left(p_j \delta\dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j \right).$$

Kako je:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, p_j \delta\dot{q}_j = \int_{t_1}^{t_2} dt\, p_j \frac{d}{dt}\left(\delta q_j\right) = \left(p_j \delta q_j\right)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{p}_j\, \delta q_j = -\int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{p}_j\, \delta q_j\ ,$$

dobija se:

$$0 = \delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_j\right].$$

Linearna nezavisnost kanonskih varijabli – generaliziranih koordinata q_j i generaliziranih momenata p_j, osigurava linearnu nezavisnost njihovih varijacija δq_j i δp_j, pa odmah slijede Hamiltonove jednadžbe (3.27).

Donja tabela prikazuje usporedbu glavnih karakteristika Lagrangeove i Hamiltonove formulacije klasične mehanike:

Formulacija	Varijable	Funkcija	Jednadžbe gibanja
Lagrangeova	$\left(q_j, \dot{q}_j\right)$	$L = T - U$	$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$
Hamiltonova	$\left(q_j, p_j\right)$	$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$	$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}\ ;\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

Iako su sve formulacije klasične mehanike ekvivalentne, najvažnije teorijske prednosti Hamiltonove (kanonske) formulacije koje olakšavaju prijelaz na kvantnu fiziku su:

- Jednak broj 2n, početnih uvjeta neophodnih za partikularno rješenje jednadžbi gibanja i nezavisnih kanonskih varijabli (q_i,p_i), za svaki stupanj slobode gibanja po jedan par, koje opisuju stanje sustava,

što osigurava da su

- Jednadžbe gibanja fizikalnog sustava diferencijalne jednadžbe prvog reda po vremenu i
- Olakšava vizualizaciju gibanja fizikalnog sustava kao gibanje točke u faznom prostoru.

3.3 Zakoni očuvanja

Hamiltonove jednadġbe odmah daju zakon oļuvanja momenta:

Zakon očuvanja momenta p_j:

Ako Hamiltonian H ne zavisi od generalizirane koordinate q_j, pridruġeni moment p_j je oļuvan:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const.} \tag{3.29}$$

Takvu koordinatu nazivamo cikliļnom.

Potpuna vremenska derivacija Hamiltoniana je prema (3.27):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{3.30}$$

ġto odmah daje:

Zakon očuvanja Hamiltoniana H:

Ako Hamiltonian H (ili Lagrangian L) sustava ne zavisi eksplicitno od vremena, onda je Hamiltonian oļuvana veliļina:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{const.} \tag{3.31}$$

Za konzervativni sustav sa holonomnim stacionarnim vezama Hamiltonian ne zavisi od vremena, pa je (3.31) zakon oļuvanja energije za takav sustav. Zaista, za konzervativni sustav je $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$, pa je: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, te vrijedi:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T,$$

tako da je:

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - U) = T + U = E.$$

Zakon očuvanja energije

<u>Za konzervativni sustav sa holonomnim stacionarnim vezama Hamiltonian sustava H jednak je ukupnoj energiji sustava koja je oļuvana veliļina</u>:

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = T + U = E = \text{const.} \qquad (3.32)$$

<u>Primjer 2.</u> Hamiltonove jednadģbe za ļesticu na koju djeluje konzervativna sila.

Ako su koordinate ļestice na koju djeluje konzervativna sila Kartezijeve, Lagrangian sustava je L = T ï U = $\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-U(x,y,z)$, pa su generalizirani momenti $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, tj. $\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}$, te je Hamiltonian ļestice:

$$H(\vec{r},\vec{p}) = T + U = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + U(\vec{r}) = E.$$

Kinetiļka energija ļestice je $T = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$. Hamiltonove jednadģbe su:

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i, \qquad (i = 1,2,3),$$

ili eksplicitno:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{m} & \dot{p}_x &= F_x \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m} & \dot{p}_y &= F_y \;, \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m} & \dot{p}_z &= F_z \end{aligned}$$

sustav 6 obiļnih diferencijalnih jednadģbi prvog reda ļije opÍe rjeģenje su kanonske varijable $q_i(t)$ i $p_i(t)$. Iz 6 poļetnih uvjeta $q_i(0)$ i $p_i(0)$, dobija se partikularno rjeģenje koje predstavlja putanju ļestice u faznom prostoru.

Eliminacijom momenata iz gornjih jednadģbi dobijaju se 3 diferencijalne jednadģbe II reda: $m\ddot{r}_i = F_i$, koje su Lagrangeove/Newtonove jednadģbe gibanja ļestice.

<u>Primjer 3.</u> Hamiltonian linearnog harmoniļkog oscilatora.

Za jednodimenzioni linearni harmoniļki oscilator Lagrangian je:

$$L(x,\dot{x}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 .$$

Generalizirani moment je $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, pa je prema (3.26) Hamiltonian LHO:

$$H(x,p) = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E.$$

Hamiltonove jednadġbe su: $\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -kx .$

Eliminiramo li moment odmah dobijamo jednadġbu gibanja LHO (1.72): $\ddot{x} + \omega_0^{\,2} x = 0 .$

<u>Primjer 4.</u> Hamiltonian ļestice u spoljaġnjem elektromagnetskom polju.

Vidjeli smo u <u>Primjeru 4.</u> Poglavlja 2. da je Lagrangian ļestice mase m i naboja e u spoljaġnjem elektromagnetskom polju:

$$L = L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = T - \tilde{U} = \frac{1}{2}m\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - e\,\Phi(\vec{r},t) + e\,\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r},t), \qquad (2.26)$$

pa su generalizirani momenti:

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}. \qquad (3.33)$$

Prema (3.26) Hamiltonian je: $H = \vec{p}\,\dot{\vec{r}} - L = \vec{p}\,\dot{\vec{r}} - \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + e\Phi - e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}$, pa eliminacijom brzine konaļno dobijamo:

$$H = H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\Phi \; . \qquad (3.34)$$

Lako se uvjeriti da iz (3.34) slijede Hamiltonove jednadġbe koje su potpuno ekvivalentne Lagrangeovim, tj. Newtonovim jednadġbama gibanja ļestice na koju djeluje Lorentzova sila (2.23).

Hamiltonijan (3.34) je primjer Ăprincipa minimalne supstitucijeñ koji tvrdi da: ako je Hamiltonian ļestice bez naboja $H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + U$, onda se Hamiltonian (energija) takve nabijene ļestice naboja e u elektromagnetskom polju dobija dodavanjem elektriļne potencijalne energije eΦ i jednostavnom supstitucijom $\vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}$.

3.4 Poissonove zagrade

Najopĺenitija formulacija jednadģbi gibanja u analitiįkoj mehanici je u obliku Poissonovih zagrada.

Bilo koja fizikalna veliįina F u mehanici se moģe napisati kao funkcija 2n kanonskih varijabli (q_i,p_i) i vremena t: F = $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$. Jednadģba gibanja takve dinamiįke veliįine F je:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial F}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right). \tag{3.35}$$

Zadnji įlan je operator koji povezuje F i Hamiltonian H.

Definicija: **Poissonova zagrade**

Poissonova zagrada {F,G} dvije dinamiįke veliįine $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ i $G(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ je po definiciji:

$$\{F,G\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right). \tag{3.36}$$

Lako se dokazuju osnovna svojstva Poissonovih zagrada:

1. $\{G,F\} = -\{F,G\}$, – antikomutativnost,
2. $\{aF + bG,H\} = a\{F,H\} + b\{G,H\}$, – linearnost i distributivnost,
3. $\{F,GH\} = \{F,G\}H + G\{F,H\}$,
4. $\frac{\partial}{\partial t}\{F,G\}=\left\{\frac{\partial F}{\partial t},G\right\}+\left\{F,\frac{\partial G}{\partial t}\right\}$,
5. $\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=0$ – Jacobi identitet.

Za svaku fizikalnu veliįinu F, specijalan znaįaj ima njena Poissonova zagrada s Hamiltonian-om H fizikalnog sustava, jer je prema (3.35):

Definicija: **Jednadžbe gibanja**

Diferencijalna jednadģba koja odreĽuje vremensku promjenu bilo koje dinamiįke veliįine $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ naziva se jednadģbom gibanja te fizikalne veliįine i jednaka je:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H\}. \tag{3.37}$$

Jednadģbe gibanja izraģene u obliku Poissonovih zagrada istiļu Hamiltonian (energiju) H fizikalnog sustava kao najvaģniju dinamiļku veliļinu sustava.

Dinamiļka veliļina $F(\mathbf{q},\mathbf{p})$, koja ne zavisi eksplicitno od vremena, je oļuvana veliļina, ako i samo ako je:

$$\{F,H\} = 0. \tag{3.38}$$

Ģtoviģe, vaģi Poissonov teorem: ako su $F(\mathbf{q},\mathbf{p})$ = const. i $G(\mathbf{q},\mathbf{p})$ = const. dvije oļuvane veliļine, tada je i njihova Poissonova zagrada oļuvana veliļina: {F,G} = const.

Dokaz lako slijedi iz Jacobi identiteta.

Za najjednostavnije dinamiļke veliļine, same kanonske varijable je:

Hamiltonove jednadžbe

Hamiltonove jednadģbe sustava opisanog Hamiltonijanom $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ su:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \ , \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \ . \tag{3.39}$$

Fundamentalne Poissonove zagrade samih kanonskih varijabli su prema definiciji (3.36):

$$\{q_i, p_j\} = \breve{u}_{ij} \ , \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \ . \tag{3.40}$$

3.5 Analogija sa kvantnom mehanikom

Hamiltonova formulacija klasiļne mehanike preko Poissonovih zagrada omoguĺuje jednostavan prijelaz na kvantnu mehaniku, tj. kvantizaciju sustava koji imaju klasiļan analogon.

Neka je sustav N klasiļnih ļestica sa n stupnjeva slobode gibanja opisan Hamiltonijanom $H(q_i,p_i,t)$. Konjugirane kanonske varijable (q_i,p_i), (i = 1,2,....,n), potpuno odreĽuju mehaniļko stanje sustava u nekom trenutku t. Jednadģba gibanja bilo koje dinamiļke varijable $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ je onda:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}. \tag{3.37}$$

U kvantnoj mehanici fizikalne veliļine (observable) su linearni Hermitski operatori. Kvantizacija sustava od N kvantnih ļestica sa n stupnjeva slobode gibanja znaļi zamjenu dinamiļke veliļine $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ iz klasiļne fizike, analogom kvantno mehaniļkom observablom $\breve{\mathbf{F}}$, reprezentiranom linearnim Hermitskim operatorom $\breve{\mathbf{F}}(\breve{\mathbf{q}},\breve{\mathbf{p}},t)$.

To znači da je kvantni sustav opisan kvantnim Hamiltonijanom $\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}_i, \hat{p}_i, t)$. Jednadžba gibanja, koja se naziva Heisenbergova jednadžba, bilo koje observable je:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{F}, \hat{H}\right], \tag{3.41}$$

gdje je $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ Planckova konstanta, a komutator operatora $\hat{F}$ i $\hat{H}$ je po definiciji:

$$\left[\hat{F}, \hat{G}\right] = \hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}.$$

Poredeći (3.41) i (3.37) vidimo da se prijelaz sa Hamiltonove formulacije klasične mehanike u Heisenbergovu formulaciju kvantne mehanike vrši formalnom smjenom:

$$F \rightarrow \hat{F}, \quad \{F,H\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{F}, \hat{H}\right]. \tag{3.42}$$

Specijalno, Heisenbergove jednadžbe za generalizirane koordinate $\hat{q}_i$ i momente $\hat{p}_i$ su:

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{q}_i, \hat{H}\right], \quad \frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{p}_i, \hat{H}\right], \tag{3.43}$$

u skladu s Hamiltonovim jednadžbama klasične mehanike (3.39).

<u>Napomena:</u> Kvantna i klasična fizika razllikuju se u matematičkom karakteru dinamičkih veličina kojima se opisuje gibanje fizikalnog sustava. U klasičnoj fizici mjerljive fizikalne veličine su kontinuirane i derivabilne realne funkcije. U kvantnoj fizici mjerljive fizikalne veličine (observable) su matematički kompliciraniji objekti – linearni Hermitski operatori koji djeluju u prostoru stanja fizikalnog sustava. Klasična i kvantna mehanika bitno se razlikuju i u opisu stanja fizikalnog sustava u nekom trenutku vremena. U klasičnoj mehanici stanje sustava je određeno skupom od 2n vrijednosti kanonskih varijabli koje su realne, derivabilne funkcije vremena. Skup stanja fizikalnog sustava je njegov fazni prostor. U kvantnoj mehanici stanje sustava u nekom trenutku vremena t određeno je skupom svojstvenih vrijednosti kompletnog skupa komutirajućih observabli (observabli koje se mogu simultano mjeriti) i reprezentira se vektorom u beskonačno dimenzionalnom prostoru koji se naziva Hilbertov prostor stanja fizikalnog sustava. Razlika je može smatrati posljedicom Heisenbergovih relacija neodređenosti koje zahtijevaju da za kvantne kanonske varijable vrijedi:

$$\left[\hat{q}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\,\delta_{ij}, \quad \left[\hat{q}_i, \hat{q}_j\right] = \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] = 0, \tag{3.44}$$

što je analogno fundamentalnim Poissonovim zagradama klasične mehanike (3.40).

3.6 Kanonske transformacije

Kao ni Lagrangian, ni Hamiltonian sustava nije jednoznačno određen. Transformacije kanonskih varijabli koje ostavljaju invarijantnim Hamiltonove jednadžbe nazivaju se kanonskim transformacijama. Kanonske transformacije zamjenjuju jednu bazu faznog prostora (q_i,p_i) drugom bazom (Q_i,P_i). Osnovna ideja je traženje kanonske transformacije koja maksimalno pojednostavljuje jednadžbe gibanja. Ideal je Hamiltonian koji je očuvana veličina i u kome su sve generalizirane koordinate cikličke, jer je tada rješenje Hamiltonovih jednadžbi trivijalno:

$$H = H(p_i) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{const.} = p_{i_0} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{i_0}} = \text{const.} = \omega_i \quad \Rightarrow \quad q_i(t) = \omega_i t + q_{i_0}\,.$$

Definicija: **Kanonska transformacija**

Transformacija kanonskih varijabli:

$$q_i \to Q_i = Q_i(\mathbf{q},\mathbf{p},t), \qquad p_i \to P_i = P_i(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\,, \tag{3.45}$$

je kanonska, ako i u novim varijablama (Q_i,P_i) vrijede Hamiltonove jednadžbe:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}\,, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}\,, \tag{3.46}$$

gdje je $H'(\mathbf{Q},\mathbf{P},t)$ transformirani Hamiltonian sustava.

Da bi transformacija (3.45) bila kanonska potreban uvjet je važenje Hamiltonovog principa (3.2) kako u starim, tako i u novim kanonskim varijablama, tj.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H\right) = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - H'\right) = 0\,,$$

ili

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\dot{q}_i - P_i\dot{Q}_i\right) + \left(H' - H\right)\right] = 0\,. \tag{3.47}$$

Uvjet (3.47) će biti ispunjen ako se podintegralne funkcije (L i L') u starom i novom djelovanju (akciji) razlikuju najviše do na potpunu vremensku derivaciju $\frac{dF}{dt}$ funkcije F koja se naziva generator kanonske transformacije. Rubni uvjeti osiguravaju da je varijacija integrala totalne vremenske derivacije $\frac{dF}{dt} = 0$. Znači, mora vrijediti:

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i dq_i - P_i dQ_i \right) + \left(H' - H \right) dt . \tag{3.48}$$

Generatorska funkcija F je proizvoljna funkcija 4n + 1 varijable ï starih i novih kanonskih varijabli: q_i , p_i , Q_i , P_i i eventualno vremena t, od kojih su zbog transformacija (3.45) samo 2n + 1 linearno nezavisne varijable. Izbor nezavisnih varijabli dijeli generatore kanonskih transformacija F u 4 tipa:

$$F_1\left(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t \right), \quad F_2\left(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t \right), \quad F_3\left(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, t \right), \quad F_4\left(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t \right).$$

Relacija (3.48) je potpuna vremenska derivacija F_1 , ġto znaļ i da vaği:

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} , \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} , \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} . \tag{3.49}$$

Zadnje dvije relacije u (3.49) omoguĺuju da se q_i i p_i izraze kao funkcije od Q_i , P_i i t, a prva relacija omoguĺuje da se naĽe novi Hamiltonian H´ kao funkcija Q_i , P_i i t.

Drugi tipovi generatorskih funkcija su Legendreove transformacije F_1. Na primjer,

$$d\left(F_1 + \sum_{i=1}^{n} Q_i P_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i dq_i + Q_i dP_i \right) + (H' - H)\, dt , \quad \Rightarrow \quad F_2\left(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t \right) = F_1 + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i ,$$

pa je:

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} , \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} , \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} . \tag{3.50}$$

Analogno je:

$$d\left(F_1 - \sum_{i=1}^{n} q_i p_i \right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(q_i dp_i + P_i dQ_i \right) + (H' - H)\, dt , \quad \Rightarrow \quad F_3\left(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, t \right) = F_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i ,$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} , \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} , \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} , \tag{3.51}$$

kao i:

$$d\left(F_1 - \sum_{i=1}^{n} q_i p_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i P_i \right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(q_i dp_i - Q_i dP_i \right) + (H' - H)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad F_4\left(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t \right) = F_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i ,$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} , \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} , \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} . \tag{3.52}$$

Primjer 5. Kanonske transformacije

- Ako je generatorska funkcija: $F_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i$, prema (3.50):

$$H' = H\,, \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i\,, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i\,,$$

je identična kanonska transformacija.

- Funkcija $F_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i Q_i$, generira prema (3.49):

$$H' = H\,, \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i\,, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i\,,$$

kanonsku transformaciju koja zamjenjuje generalizirane koordinate i generalizirane momente (minus znak u $P_i \to -q_i$, odraz je minus znaka u Hamiltonovim jednadžbama $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$).

- U slučaju jednog stupnja slobode funkcija $F_1 = \frac{m}{2}\omega x^2 \operatorname{ctg} X$, prema (3.49) generira:

$$H'(X,P) = H(x,p)\,, \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial x} = m\omega x \operatorname{ctg} X\,, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial X} = \frac{m\omega x^2}{2\sin^2 X}\,.$$

Izrazimo li stare varijable preko novih, generirana kanonska transformacija je:

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin X\,, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos X\,.$$

Za jednodimenzioni LHO iz Primjera 3. Hamiltonian je: $H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$, dok je novi Hamiltonian jednostavno:

$$H'(X,P) = \omega P_0 = E = \text{const.},$$

jer zbog cikličnosti nove koordinate X važi: $\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial X} = 0 \;\Rightarrow\; P = \text{const.} = P_0 = \frac{E}{\omega}$. Druga Hamiltonova jednadžba za nove kanonske varijable je: $\dot{X} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega = \text{const.}$, sa rješenjem: $X(t) = \omega t + \varphi_0$. Napisano preko stare varijable x, rješenje je naravno prosto harmoničko titranje: $x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0)$.

- Razmotrimo i primjer infinitezimalne kanonske transformacije generirane funkcijom koja se infinitezimalno razlikuje od jedinične:

$$F_2 = F_2\left(\mathbf{q},\mathbf{P},t\right) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + \varepsilon f\left(\mathbf{q},\mathbf{P}\right) + O(\varepsilon^2)\,. \tag{3.53}$$

Prema (3.50), zanemarujući članove reda ε^2, je:

$$Q_i = q_i + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial P_i}\,, \quad p_i = P_i + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial q_i}\,.$$

Kako su $\varepsilon\frac{\partial f}{\partial P_i}$ i $\varepsilon\frac{\partial f}{\partial q_i}$ već prvog reda po ε, u gornjim izrazima P_i možemo zamjeniti sa p_i. Tako se za promjenu kanonskih varijabli pri infinitezimalnoj kanonskoj transformaciji koju generira funkcija $f\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)$ dobija:

$$\delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon\frac{\partial f}{\partial p_i}\,, \quad \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon\frac{\partial f}{\partial q_i}\,, \tag{3.54}$$

što se može napisati u obliku:

$$\delta q_i = \varepsilon\left\{q_i, f\right\}, \quad \delta p_i = \varepsilon\left\{p_i, f\right\}. \tag{3.55}$$

Odaberemo li $\varepsilon = dt$ i $f = H$, generatorska funkcija je: $F_2 = F_2\left(q,P,t\right) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + dt\,H(q,p)$, i relacije (3.55) postaju Hamiltonove jednadžbe:

$$\delta q_i = dt\left\{q_i, H\right\} = \dot{q}_i dt = dq_i\,, \quad \delta p_i = dt\left\{p_i, H\right\} = \dot{p}_i dt = dp_i\,. \tag{3.56}$$

Relacije (3.56) pokazuju da je Hamiltonian generator infinitezimalnih kanonskih transformacija vremenske evolucije sustava koje mijenjaju stanje fizikalnog sustava $\left(q_i(t),p_i(t)\right)$ u trenutku t u stanje $\left(q_i(t+dt),p_i(t+dt)\right) = \left(q_i(t)+dq_i\,,p_i(t)+dp_i\right)$ u slijedećem trenutku t + dt.

3.7 Invarijantnost Poissonovih zagrada pri kanonskim transformacijama

Kanonske varijable (q_i,p_i) čine bazu faznog prostora fizikalnog sustava. Fazni prostor je 2n dimenzionalni prostor čije koordinatne osi su kanonske varijable. Položaj klasičnog fizikalnog sustava u nekom trenutku je jedna točka u faznom prostoru. Kanonske transformacije mijenjaju stare u nove kanonske varijable $(q_i\,,p_i) \rightarrow (Q_i\,,P_i)$, tj. zamjenjuju jedan bazis faznog prostora drugim.

Poissonove zagrade (3.36) definirane su pomoću parcijalnih derivacija dinamičkih veličina po kanonskim varijablama. Ali, Poissonove zagrade ne zavise od izbora bazisa faznog prostora, tj.:

Invarijantnost Poissonovih zagrada

Poissonova zagrada {F,G} bilo koje dvije dinamičke veličine je invarijantna pri kanonskoj transformaciji $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$, tj.

$$\{F,G\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \{F,G\}_{(\mathbf{Q},\mathbf{P})}. \tag{3.57}$$

Zbog svojstva invarijantnosti (3.57), ne moramo navoditi bazis faznog prostora u odnosu na koji se računa Poissonova zagrada.

Za dokaz relacije (3.57) trebaju nam dvije pomoćne relacije. Iz (3.49) i (3.50) slijedi:

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\,, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_k \partial q_i} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\,,$$

pa važi:

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\,, \qquad \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\,. \tag{3.58}$$

Fundamentalna Poissonova zagrada kanonskih varijabli (Q_i, P_i) u bazisu $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ je prema (3.58):

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial Q_j}\right) = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij}\,, \tag{3.59}$$

u skladu s (3.40). Potpuno analogno se pokazuje da važe preostale fundamentalne Poissonove zagrade, i štoviše vrijedi teorem:

Transformacija $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ je kanonska, ako i samo ako za nove varijable (Q_i, P_i) važe fundamentalne Poissonove zagrade, tj.

$$\{Q_i, P_j\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \delta_{ij}\,, \quad \{Q_i, Q_j\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \{P_i, P_j\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = 0\,. \tag{3.60}$$

Za bilo koje dvije fizikalne veličine F i G je:

$$\{F,G\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i}\right)\right)\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right)\right)\right].$$

Pregrupiranjem desne strane gornjeg izraza mogu se izdvojiti derivacije F i G po novim kanonskim varijablama:

$$\{F,G\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \sum_{j,k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial P_k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right)\right] +$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial P_k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right)\right],$$

tj.

$$\{F,G\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \sum_{j,k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\left\{Q_j,Q_k\right\} + \frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial P_k}\left\{Q_j,P_k\right\} + \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\left\{P_j,Q_k\right\} + \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial P_k}\left\{P_j,P_k\right\}\right],$$

što zbog (3.60) zaista daje:

$$\{F,G\}_{(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial P_k}\delta_{jk} - \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\delta_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\right) = \{F,G\}_{(\mathbf{Q},\mathbf{P})}.$$

Primjer 6. Poissonove zagrade komponenti angularnog momenta.

Moment impulsa (angularni moment) čestice je: $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$. Ako za generalizirane koordinate odaberemo Kartezijeve koordinate (x,y,z) čestice, komponente angularnog momenta su:

$$l_x = yp_z - zp_y \ , \quad l_y = zp_x - xp_z \ , \quad l_z = xp_y - yp_x \ . \tag{3.61}$$

Poissonova zagrada komponenti l_x i l_y je:

$$\{l_x, l_y\} = \frac{\partial l_x}{\partial x}\frac{\partial l_y}{\partial p_x} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x}\frac{\partial l_y}{\partial x} + \frac{\partial l_x}{\partial y}\frac{\partial l_y}{\partial p_y} - \frac{\partial l_x}{\partial p_y}\frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_x}{\partial z}\frac{\partial l_y}{\partial p_z} - \frac{\partial l_x}{\partial p_z}\frac{\partial l_y}{\partial z}.$$

Prema definiciji (3.61), prva četri člana u gornjem izrazu su nula, te preostaje:

$$\{l_x, l_y\} = (-p_y)(-x) - yp_x = l_z. \tag{3.62}$$

Lako se uvjeriti da važi i:

$$\{l_y, l_z\} = l_x \quad \text{i} \quad \{l_z, l_x\} = l_y. \tag{3.62´}$$

Poissonove zagrade komponenti angularnog momenta čestice su onda:

$$\{l_i, l_j\} = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\, l_k \ . \tag{3.63}$$

Relacije (3.63) pokazuju da se više od jedne komponente angularnog momenta čestice ne mogu odabrati kao generalizirane koordinate, niti mogu biti generalizirani momenti, jer njihova Poissonova zagrada ne iščezava. Također, bilo koje dvije komponente angularnog momenta ne mogu biti par konjugiranih kanonskih varijabli.

Ali, koristeći svojstva Poissonovih zagrada, lako se pokazuje da je:

$$\left\{ \vec{l}^{\,2}, l_i \right\} = 0 , \tag{3.64}$$

što znači da apsolutna vrijednost i bilo koja od komponenti angularnog momenta čestice mogu biti generalizirane koordinate ili momenti čestice. Analogan rezultat vaši za česticu i u kvantnoj mehanici.

3.8 Hamilton-Jacobieva jednadžba

Još jedna formulacija klasične mehanike, tzv. Hamilton-Jacobieva formulacija, zasniva se na postojanju kanonske transformacije koja maksimalno pojednostavljuje jednadžbe gibanja. U ovoj formulaciji mehanike, osnovna jednadžba – Hamilton-Jacobieva jednadžba, je parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda čije rješenje određuje generator kanonske transformacije S koja sve kanonske varijable transformira u konstante gibanja određene početnim uvjetima.

Razmotrimo kanonsku transformaciju određenu generatorom tipa $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \equiv S$ takvu da je novi Hamiltonian nula:

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0 , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 , \tag{3.65}$$

pa je rješenje Hamiltovih jednadžbi gibanja trivijalno:

$$Q_i = \alpha_i = \text{const.}, \qquad P_i = \beta_i = \text{const.}, \qquad (i = 1,2,....,n). \tag{3.66}$$

Kako su novi impulsi konstante, prema (3.50) tražena generatorska funkcija $S = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t)$ mora zadovoljavati:

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 , \quad \alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i} , \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} . \tag{3.67}$$

Hamiltonian je funkcija starih kanonskih varijabli $H = H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$. Izrazimo li stare generalizirane momente kao $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, prva od jednadžbi (3.67) postaje Hamilton-Jacobieva jednadžba:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t \right) = 0 . \tag{3.68}$$

Hamilton-Jacobieva jednadġba je oļito parcijalna diferencijalna jednadġba I reda za nepoznati generator S = S(q_i,β_i,t) kanonske transformacije, koji je funkcija n + 1 nezavisne varijable q_i i t. Traġena kanonska transformacija ima svojstvo da je transformirani Hamiltonian jednak nuli. Jednadġba (3.68) je, prema (3.65), potpuno ekvivalentna Hamiltonovim jednadġbama. Kad se naĽe rjeġenje Hamilton-Jacobieve jednadġbe (3.68), generalizirane koordinate i momenti odreĽuju se iz algebarskih relacija:

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i} = \alpha_i \;, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad q_i = q_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t)\,, \quad p_i = p_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, t),$$

gdje 2n integracionih konstanti (3.66) treba odrediti iz poļetnih uvjeta q_{i_0} i p_{i_0}. Generator S naziva se Hamilton-Jakobieva funkcija ili Hamiltonova glavna funkcija.

Hamiltonian H je oļuvana veliļina ako, prema (3.31), nije eksplicitna funkcija vremena: H = γ = const. (H = γ = E ako su veze stacionarne). Tada se Hamilton-Jacobieva jednadġba (3.68) moġe smjenom:

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t) = W(\mathbf{q},\beta) - \gamma(\beta)t,$$

uprostiti:

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \gamma\,. \qquad (3.69)$$

Funkcija W naziva se karakteristiļnom Hamiltonovom funkcijom.

Hamilton-Jacobieva jednadġba (3.68) ili (3.69), najļeġĺe se rjeġava separacijom varijabli, tj. traġenjem rjeġenja u obliku zbroja ili produkta funkcija samo jedne varijable:

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \ldots + S_n(q_n) + S_{n+1}(t) \quad \text{ili} \quad S = S_1(q_1)\, S_2(q_2) \ldots S_n(q_n)\, S_{n+1}(t),$$

sa idejom zamjene parcijalne diferencijalne jednadġbe sustavom obiļnih diferencijalnih jednadġbi.

Fizikalni smisao Hamilton-Jacobieve funkcije S postaje jasan naĽemo li njenu potpunu derivaciju po vremenu:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = L\,,$$

pa integracija od t_0 do t daje:

$$S = \int_{t_0}^{t} dt\, L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = I(t)\,. \qquad (3.70)$$

Hamilton-Jacobieva funkcija S upravo je djelovanje (akcija) fizikalnog sustava s neodreĽenom gornjom granicom.

Primjer 7. Hamilton-Jacobieva jednadǵba i kvantna mehanika.

Ako je Hamiltonian klasiļne ļestice sa jednim stupnjem slobode: $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = E$, prema (3.69), gibanje ļestice odreĽeno je Hamilton-Jacobievom jednadǵbom:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + U(q) = E\,. \tag{3.71}$$

U kvantnoj mehanici valna funkcija Ɋ je rjeġenje Schrödingerove jednadǵbe: ĞɊ = EɊ, gdje je Ğ Hamiltonian kvantnog sustava. U sluļaju jednodimenzionog sustava koji ima klasiļni analogon, kvantni Hamiltonian se dobija iz klasiļnog supstitucijom: H(q,p) Ÿ Ğ$\left(q, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)$, pa je Schrödingerova jednadǵba za kvantnu ļesticu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Ɋ}{\partial q^2} + U(q)Ɋ = EɊ\,.$$

DefinirajuĹi stacionarnu valnu funkciju $G(q)$ relacijom: $Ɋ(q,t) = e^{\frac{i}{\hbar}G}$, Schrödingerova jednadǵba postaje:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)^2 - \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 G}{\partial q^2} + U(q) = E\,,$$

ġto u limesu klasiļne fizike $\hbar \to 0$ daje Hamilton-Jacobievu jednadǵbu (3.71).

Ilustrirajmo Hamilton-Jacobievu metodu na dva jednostavna primjera.

Primjer 8. Hamilton-Jacobieva jednadǵba za slobodnu ļesticu i jednodimenzioni LHO.

Za slobodnu ļesticu sa tri stupnja slobode Hamiltonian je: $H = T = \frac{1}{2m}\left(p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2\right)$, pa smjenom: S(q,β,t) = W(q,β) – Et, Hamilton-Jacobieva jednadǵba (3.69) je:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right] = E\,. \tag{3.72}$$

Sve tri koordinate su cikliļne i (3.72) se potpuno separira smjenom varijabli: $W = W_1(q_1,\beta_1) + W_2(q_2,\beta_2) + W_3(q_3,\beta_3)$, gdje je $p_i = \beta_i = \text{const.}$, u:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_3}{dq_3}\right)^2 = E\,,$$

sa rjeġenjem: $W_i = \beta_i q_i$, $(i = 1,2,3)$, uz uvjet: $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 2mE$, tj.

$$W(q_i,\beta_i) = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \beta_3 q_3.$$

Za jednodimenzioni LHO Hamiltonian je: $H(q,p) = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = E$. Hamiltonian ne zavisi od vremena, pa smjena $S(q, \beta,t) = W(q, \beta) - Et$, gdje je $\beta = E$, daje Hamilton-Jacobievu jednadġbu (3.69):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + mkq^2 = 2mE\,,$$

sa rjeġenjem:

$$W(q,E) = \int_{q_0}^{q} dq' \{2m[E - U(q')]\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

Prema (3.67) je joġ:

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \int_{q_0}^{q} dq' \frac{m}{\sqrt{m\left(2E - kq'^2\right)}} - t\,, \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{m\left(2E - kq^2\right)}.$$

Prva od ovih jednadġbi odmah daje rjeġenje:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\left(t - \alpha'\right)\right],$$

gdje se integracione konstante E i α' odreĽuju iz poļetnih uvjeta.

4. Centralne sile

Najvağnije sile u klasiļnoj fizici su centralne. PostulirajuĹi osnovne zakone gibanja ï Newtonove zakone i univerzalni zakon gravitacije Newton je i zasnovao klasiļnu mehaniku rjeğavajuĹi problem gibanja planeta Sunļevog sustava. MeĽu tjelima u Sunļevom sustavu djeluju konzervativne, centralne gravitacijske sile ļiji intenzitet je inverzno proporcionalan kvadratu udaljenosti tijela.

4.1 Problem dva tijela

U fizici se ļesto javlja problem dva tijela, tj. <u>problem dinamike izoliranog sustava dvije ļestice koje se gibaju pod utjecajem sila meĽudjelovanja</u> ï planet i Sunce, elektron i nukleus, itd. Ako je sustav konzervativan II Newtonom zakon za dvije ļestice daje:

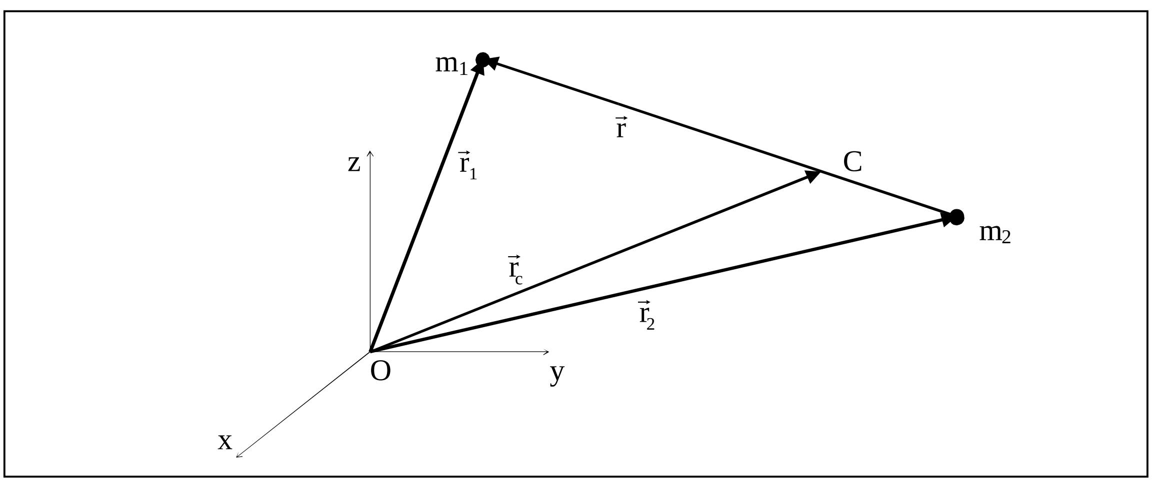
$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\nabla_1 U\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\nabla_2 U\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \nabla_1 U\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Umjesto radijus vektora ļestica $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ definirajmo nove varijable $\{\vec{r}, \vec{r}_c\}$ ï radujus vektor relativnog poloğaja ļestica $\vec{r}$ i radijus vektor centra mase $\vec{r}_c$, kao na Slici 11.:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \qquad \vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \tag{4.2}$$

gdje je ukupna masa sustava $M = m_1 + m_2$. Inverzne relacije su:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \frac{m_2}{M}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_c - \frac{m_1}{M}\vec{r}. \tag{4.3}$$



Slika 11.

Zbrajanjem jednadġbi gibanja (4.1), jednadġba gibanja centra mase je:

$$M\ddot{\vec{r}}_c = 0\,, \tag{4.4}$$

ġto odmah daje rjeġenje:

$$\ddot{\vec{r}}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_c = \text{const.} = \dot{\vec{r}}_c(0) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_c(t) = \dot{\vec{r}}_c(0)\,t + \vec{r}_c(0)\,, \tag{4.5}$$

ï centar mase sustava giba se jednoliko konstantnom brzinom $\dot{\vec{r}}_c(0)$.

Oduzimanjem jednadġbi (4.1) problem se efektivno svodi na dinamiku jedne ļestice ļija jednadġba gibanja je:

$$\varepsilon\,\ddot{\vec{r}} = -\nabla_r U(\vec{r}), \tag{4.6}$$

gdje je reducirana masa sustava $\varepsilon = \dfrac{m_1 m_2}{M}$, sa svojstvom $\dfrac{1}{\varepsilon} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$.

Galilejeva invarijantnost klasiļne mehanike dozvoljava da rjeġenje traġimo prijelazom u inercijalni sustav centra mase. Ako veliļine mjerene u odnosu na sustav sa ishodiġtem u centru mase C oznaļimo zvjezdicom *, onda vrijedi: $\vec{r}_c{}^*(t) = 0$, $\vec{r}_2{}^* = -\dfrac{m_1}{m_2}\vec{r}_1{}^*$ i $\vec{r}^* = \dfrac{M}{m_2}\vec{r}_1{}^*$, tj. $m_1\vec{r}_1{}^* = \varepsilon\,\vec{r}^*$ i $m_2\vec{r}_2{}^* = -\varepsilon\,\vec{r}^*$, a jednadġba gibanja (4.6) je: $\varepsilon\,\ddot{\vec{r}}^* = -\nabla_r U(\vec{r}^*)$.

Prije nego ġto rjeġimo problem uoļimo neka svojstva Sunļeva sustava. Ako jedna ļestica ima daleko veĺu masu od druge, center mase je veoma blizu masivnije ļestice i u prvoj aproksimaciji vaġi:

$$m_2 >> m_1 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} M \to m_2 \\ \varepsilon \to m_1 \\ \vec{r}_c{}^* = 0 \to \vec{r}_2{}^* \\ \vec{r}^* \to \vec{r}_1{}^* \end{array} \right\}, \tag{4.7}$$

a jednadġbe gibanja (4.6) i (4.4) postaju:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1{}^* = -\nabla_1 U(\vec{r}_1{}^*), \qquad \vec{r}_2{}^* = 0\,. \tag{4.8}$$

U ovoj aproksimaciji, sustav dvije ļestice moġemo promatrati iz sustava mirovanja masivnije ļestice i samo primjeniti Newtonove zakone na manje masivnu ļesticu. Masa Sunca je mnogo veĺa od mase bilo kojeg planeta i uvjeti (4.7) su ispunjeni sa velikom toļnoġĺu. Na primjer, masa Zemlje je $m_1 = 6 \times 10^{24}$ kg, a masa Sunca je $m_2 = 2 \times 10^{30}$ kg i $\dfrac{m_2}{m_1} \approx 330000$, pa je opravdano govoriti o rotaciji Zemlje oko Sunca. Centar mase sustava Zemlja-Sunce je svega oko 450 km udaljen od centra Sunca. Čak i za najmasivniji planet Jupiter, čija je masa 318 puta veća od zemljine, centar mase sustava Jupiter-Sunce je na površini Sunca, tj. oko 750 000 km od centra Sunca, što manje od jednog promila udaljenosti Jupitera od Sunca koja iznosi $7{,}8 \times 10^8$ km.

Iz povjesnih razloga, problem gibanja planeta oko Sunca naziva se Keplerov problem. No, jasno je da je ovo ustvari puno općenitiji problem gibanja bilo koje dvije čestice koje međudjeluju gravitacijskim ili električnim silama.

4.2 Keplerov problem

Ako su konzervativne sile među česticama i centralne (u pravcu vektora $\vec{r}$), potencijalna energija zavisi samo od intenziteta vektora relativnog položaja čestica $U = U(r)$ kao u (1.62) što je slučaj gravitacijskih ili električnih sila. Takva centralna sila na česticu mora biti oblika $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla_r U(r) = f(r)\,\hat{e}_r$, pa zbog (4.6) mora vrijediti zakon očuvanja angularnog momenta $\vec{l} = \varepsilon\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ relativnog gibanja:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \varepsilon\, \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{l} = \text{const.} \tag{4.9}$$

Ovo znači da se čestica giba u ravnini (dva stupnja slobode n = 2) okomitoj na $\vec{l} = \text{const.}$ koju možemo odabrati za xy-ravninu. U cilindričnim koordinatama je onda:

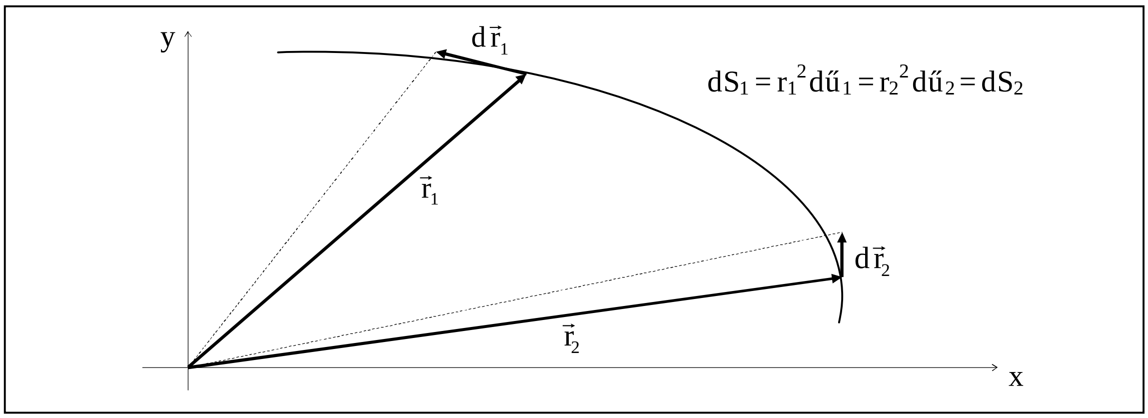
$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= r(t)\begin{pmatrix}\cos\varphi(t)\\ \sin\varphi(t)\\ 0\end{pmatrix}\\
\dot{\vec{r}}(t) &= \dot{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\\
\ddot{\vec{r}}(t) &= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}, \tag{4.10}$$

i

$$\left.\begin{aligned}
\vec{l}(t) &= \varepsilon\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \varepsilon\begin{pmatrix}0\\ 0\\ r^2\dot{\varphi}\end{pmatrix}\\
\vec{l} &= \varepsilon\, r^2\dot{\varphi}\,\hat{k} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad r^2 d\varphi = \text{const.} = dS
\end{aligned}\right\}. \tag{4.11}$$

Zakon očuvanja angularnog momenta, tj. zadnja relacija u (4.9), garantira da je sektorska brzina čestice $\dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{l}}{2\varepsilon}$ konstantna, gdje je element površine krivolinijskog trokuta $d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\, dt = \frac{1}{2} r^2 d\varphi\, \vec{k}$.

Prema Slici 12., čestica se giba tako da radijus vektor čestice u jednakim vremenskim intervalima prebriše jednake površine – ako čestica reprezentira planet u ophodnji oko Sunca ovo je <u>II Keplerov zakon</u>.



Slika 12.

Zbog jednadžbe gibanja (4.6), pored angularnog momenta, očuvana je i energija relativnog gibanja E = T + U = const., jer važi:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\, \dot{\vec{r}}^{\,2} + U(r)\right) = \varepsilon\, \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \nabla_r U = \dot{\vec{r}} \cdot \left(\varepsilon\, \ddot{\vec{r}} + \nabla_r U\right) = 0\,. \qquad (4.12)$$

Iz zakona očuvanja angularnog momenta je $\dot{\varphi} = \frac{l}{\varepsilon\, r^2}$, pa zakon očuvanja energije daje:

$$E = \frac{1}{2}\varepsilon\, \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\varepsilon\, r^2} + U(r) = \text{const.}\,. \qquad (4.13)$$

Relacija (4.13) je zakon očuvanja energije jednodimenzionog gibanja čestice mase ε u efektivnom potencijalu:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\varepsilon\, r^2}\,. \qquad (4.14)$$

Zadnji član u (4.14) je ekvivalentan potencijalu fiktivne centrifugalne sile koja teži da udalji česticu od ishodišta i zato se naziva centrifugalna barijera:

$$-\nabla_r\left(\frac{l^2}{2\varepsilon\, r^2}\right)=\frac{l^2}{\varepsilon\, r^3}\vec{e}_r=\varepsilon\,\frac{(r\dot{ű})^2}{r}\vec{e}_r=\varepsilon\,\frac{v_{ű}^{\,2}}{r}\vec{e}_r=\vec{F}_{cp.}$$

Iz zakona oļuvanja energije (4.13) je:

Jednadžba gibanja čestice u konzervativnom centralnom polju sila

Radijalna jednadģba gibanja ļestice na koju djeluje konzervativna centralna sila je:

$$\dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}\left[E-U_{eff}(r)\right]}\quad\Leftrightarrow\quad dt=\frac{\pm\,dr}{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}\left[E-U_{eff}(r)\right]}}\ , \tag{4.15}$$

gdje dva znaka razlikuju dva moguĺa smjera brzine ļestice. Ļestica moģe biti samo u onim toļkama r za koje je E ï $U_{eff}(r)$ Ó0.

Ako nas umjesto rjeģenja u obliku parametarske jednadģbe putanje: r = r(t) i ű = ű(t) zanima rjeģenje jednadģbi gibanja koje daje eksplicitnu jednadģbu putanje, iz zakona oļuvanja angularnog momenta je:

$$dű=\frac{l}{\varepsilon\, r^2}dt=\pm\frac{l\,dr}{r^2\sqrt{2\varepsilon\left[E-U_{eff}(r)\right]}},\ \text{tj.}\ \ ű-ű_0=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{l\,dr'}{r'^2\sqrt{2\varepsilon E-\frac{l^2}{r'^2}-2\varepsilon\,U(r')}}. \tag{4.16}$$

Ako meĽu ļesticama djeluje gravitacijska $-G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$ ili elektiļna sila $\frac{1}{4´Ů_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^3}\vec{r}$, ($Q_{1,2}$ je naboj ļestica), potencijalna energija je:

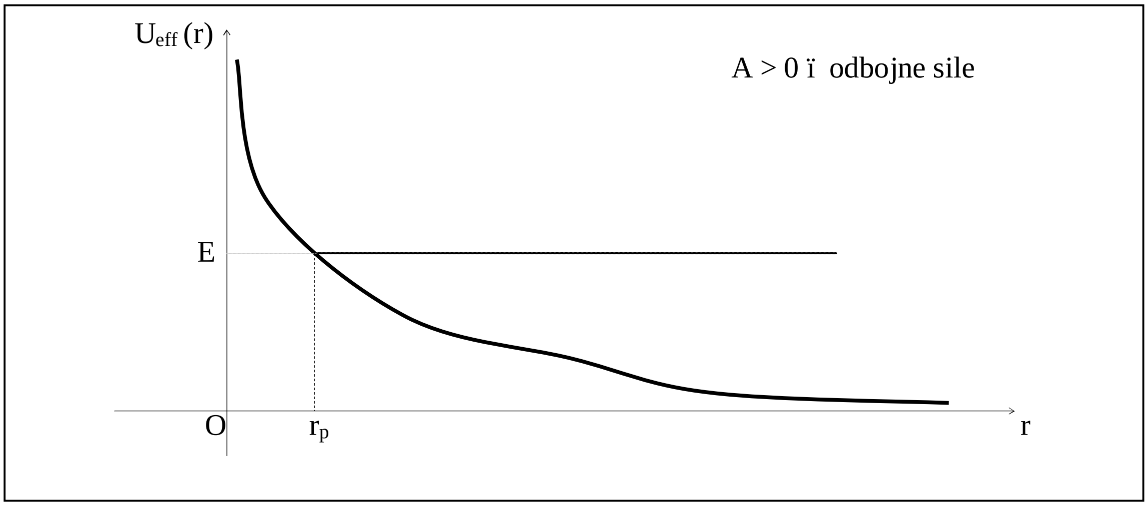
$$U(r)=\frac{A}{r},\qquad A_{gr.}=ï\ Gm_1m_2,\qquad A_{el.}=\frac{Q_1Q_2}{4´Ů_0}. \tag{4.17}$$

Kvalitativna svostva gibanja lako je analizirati grafiļki. Prema (4.14) efektivni potencijal za Keplerov problem je:

$$U_{eff}(r)=\frac{A}{r}+\frac{l^2}{2\varepsilon\, r^2}\leq E. \tag{4.18}$$

Za male udaljenosti od centra sile $r\to+0$, dominira centrifugalna barijera i $U_{eff}\to+Đ$. Na velikim udaljenostima $r\to+Đ$, dominantni ļlan je potencijal i $U_{eff}\to+0$, ako su sile odbojne $A>0$, a $U_{eff}\to-0$, u sluļaju privlaļnih sila kad je $A<0$. U sluļaju odbojnih sila je $U_{eff}(r)>0$ za svako $r>0$ i efektivni potencijal je monotono opadajuĺa funkcija (nema ekstrema) kao na Slici 13.

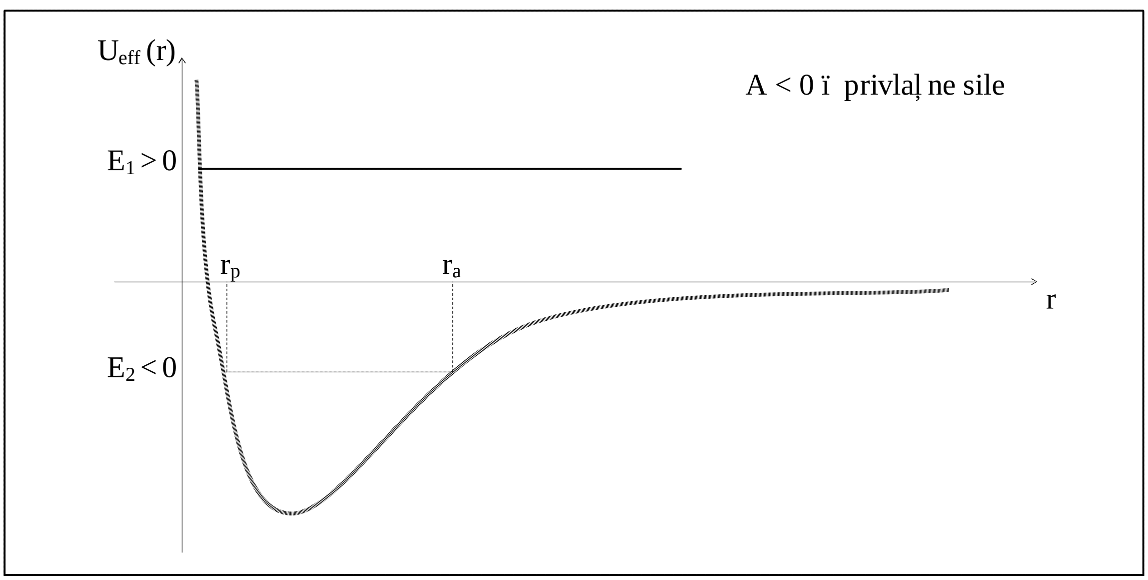
Zbog uvjeta $E > U_{eff}(r)$ gibanje ļestice je neogranIļeno, ali r uvijek ostaje veĺe od udaljenosti pericentra $r \geq r_p$.



Slika 13.

Interesantniji je sluļaj privlaļnih sila A < 0, jer tada $U_{eff}(r)$ ima minimum $U_{eff_{min}} = -\frac{\varepsilon A^2}{2l^2}$

za $r = -\frac{l^2}{\varepsilon A}$ kao na Slici 14.



Slika 14.

Ako je energija ļestice pozitivna, kao E_1, gibanje je sliļno sluļaju odbojnih sila. Ali, ako je energija relativnog gibanja ļestice negativna, kao E_2, ļestica je «vezana» za centar sile i gibanje je ograniļeno na osciliranje izmeĽu pericentra i apocentra $r_p \leq r \leq r_a$.

Bez obzira na znak A, uvijek postoji pericentar ï toļka na putanji u kojoj je ļestica na minimalnoj udaljenosti od centra sile $r_p = r_{min}$ i gdje je $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r_p} = 0$, pa je: $E = E(r_p) = U_{eff}(r_p)$.

Integracijom (4.16) eksplicitna jednadġba putanje je:

$$\text{ű} - \text{ű}_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{l\,dr´}{r´^2\sqrt{2\varepsilon\left(E - \frac{A}{r´}\right) - \frac{l^2}{r´^2}}}\,. \tag{4.19}$$

Odaberemo li x-os tako da je $\text{ű}_0 = 0$, supstitucijom $u = \frac{1}{r}$ integral se svodi na tabliļni integral sa rjeġenjem:

$$\text{ű}(r) = -\arcsin\left.\frac{\frac{l^2}{r´} + \varepsilon A}{\varepsilon A \mathring{\text{U}}}\right|_{r_0}^{r}\,, \qquad \mathring{\text{U}} = \pm\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\varepsilon A^2}}\,. \tag{4.20}$$

Jednadġba putanje se moġe uprostiti izborom: $r_0 = \arcsin\frac{\frac{l^2}{r_0} + \varepsilon A}{\varepsilon A\mathring{\text{U}}} = -\frac{´}{2}$, (ovaj odabir znaļi izbor ishodiġta i pravaca koordinatnih osi u ravnini gibanja tako da je putanja simetriļna krivilja), ġto konaļno daje:

$$r(\text{ű}) = \frac{p}{1 + \mathring{\text{U}}\cos\text{ű}}\,, \qquad p = -\frac{l^2}{\varepsilon A}\,. \tag{4.21}$$

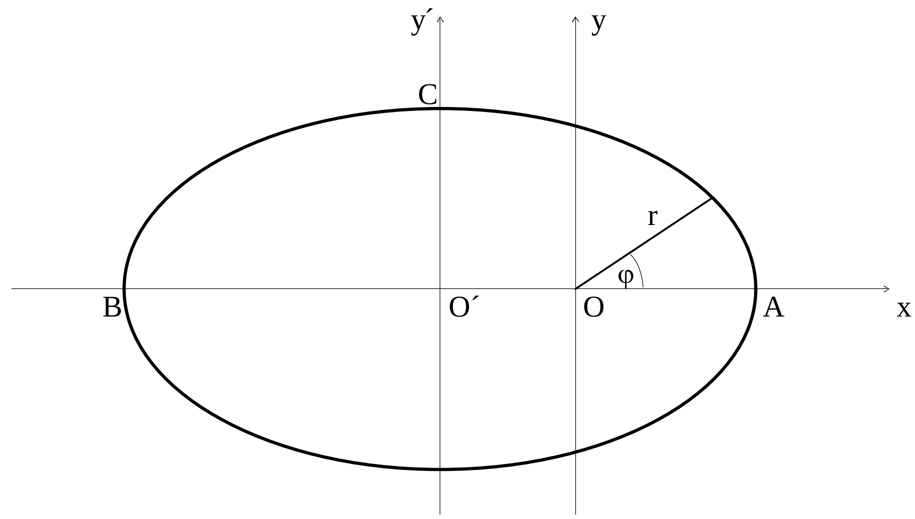
Izraz (4.21) je <u>jednadġba konusnih presjeka ï elipse ($0 < \varepsilon < 1$), parabole ($\varepsilon = 1$) ili hiperbole ($\varepsilon > 1$)</u> u polarnim koordinatama, u ļijem jednom fokusu je centar sile.

Znak parametra ε u (4.20) mora se odabrati tako da je uvijek $r > 0$ u (4.21). Postoji nekoliko sluļajeva:

<u>Privlačne sile</u>: $A < 0 \;\Rightarrow\; p > 0$

- <u>$E < 0$ ï vezana ļestica</u> $\quad\Rightarrow\quad 0 < |\varepsilon| < 1 \quad\Rightarrow\quad r = \frac{p}{1 + \mathring{\text{U}}\cos\text{ű}} > 0$ za $\forall\varphi \in [0,2\pi]$.

Udaljenost ļestice od centra sile je ograniļena na interval $r_p \le r \le r_a$, gdje su udaljenosti pericentra $r_p = \frac{p}{1+\mathring{\text{U}}} = r_{min}$ i apocentra $r_a = \frac{p}{1-\mathring{\text{U}}} = r_{max}$. Putanje su elipse (<u>I Keplerov zakon</u>) sa ekscentricitetom ε kao na Slici 15.



$OA = r_p = \frac{p}{1+\varepsilon}$; $OB = r_a = \frac{p}{1-\varepsilon}$; $a = AO' = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$; $b = O'C = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; $c = OO' = \varepsilon a$

Slika 15.

Velika poluos elipse je:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \tag{4.22}$$

a udaljenost c ishodišta O od centra elipse O′ je:

$$c = a - r_p = \varepsilon a = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}. \tag{4.23}$$

Ako označimo $\sphericalangle COO' = \alpha$, važi: $\cos\alpha = \frac{OO'}{OC} = \frac{c}{r(\pi-\alpha)} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon\cos\alpha)$, što znači da je $\varepsilon = \cos\alpha$, te $a = OC$. Mala poluos elipse je onda:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{ap} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \tag{4.24}$$

Jednadžbu putanje u Kartezivevim koordinatama O′xy′ lako je naći napravimo li translaciju ishodišta duž x-osi: $x' = x + c$ i $y' = y$, gdje je $c = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$. Iz jednadžbe elipse (4.21) je: $r = p - \varepsilon x$, pa je: $r^2 = [p - \varepsilon(x' - c)]^2 = x^2 + y^2 = (x' - c)^2 + y'^2$, što u nekoliko koraka daje kanonsku jednadžbu elipse:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2}=1, \tag{4.25}$$

u skladu sa (4.22) i (4.24).

Kako je sektorska brzina $\dot{S}=\frac{l}{2\varepsilon}$ konstantna (II Keplerov zakon), a povrġina elipse je S = πab, period ophodnje T ļestice je: $T=\frac{S}{\dot{S}}=\frac{2\varepsilon}{l}\pi\, a\sqrt{ap}=\pi\frac{2\varepsilon}{l}a^{\frac{3}{2}}\frac{l}{\sqrt{-\varepsilon A}}=2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{-A}}\,a^{\frac{3}{2}}$, pa je kvadriranjem: $T^2=4\pi^2\frac{\varepsilon}{-A}a^3$. Kako je za gravitacijske sile A = – Gm_1m_2 odmah dobijamo III Keplerov zakon:

$$T^2=\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3. \tag{4.26}$$

Ekscentricitet ε mjeri odstupanje elipse od kruģnice. Za ε = 0 putanja je kruģnica sa $r = r_p = r_a = -\frac{l^2}{\varepsilon A}$ (A < 0), koja za date fiksne vrijednosti E i l predstavlja putanju na kojoj ļestica ima minimalnu moguĺu energiju $E=-\frac{\varepsilon A^2}{2l^2}$, pri ļemu je $T=\frac{\varepsilon A^2}{2l^2}$, a $U=-\frac{\varepsilon A^2}{l^2}$. Ovo je primjer virijalnog teorema (1.66) za homogeni potencijal stupnja homogenosti k = – 1.

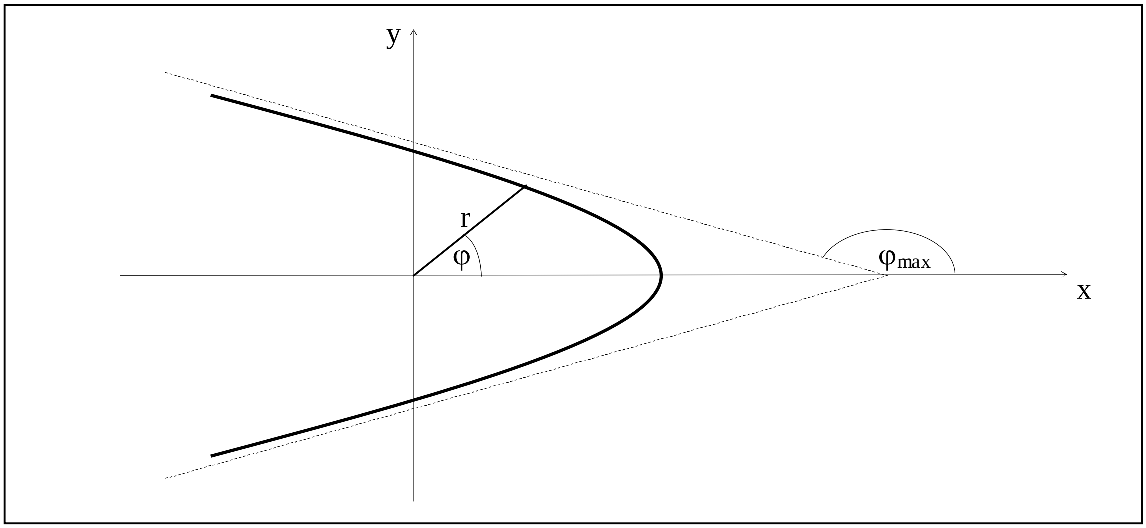
Kako je prema (4.22) i (4.24), $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$, putanje planeta se vrlo malo razlikuju od kruģnica, jer su ekscentriciteti planetarnih elipsi mali, u rasponu od ε = 0,007 za Veneru, do ε = 0.206 za Merkur. Za Zemlju je ε = 0,017, pa je b = 0.99986a. Putanja Mjeseca oko Zemlje je takoĽe veoma sliļ na kruģnici jer je za Mjesec ε = 0,055.

Karakteristike eleiptiļnih putanja planeta odreĽene su oļuvanim fizikalnim veliļinama (ļija vrijednost je fiksirana poļetnim uvjetima) E < 0 i l^2 > 0. Prema (4.22) i (4.24) je:

$$a=\frac{A}{2E}, \qquad b=\frac{l}{\sqrt{2\varepsilon(-E)}}. \tag{4.27}$$

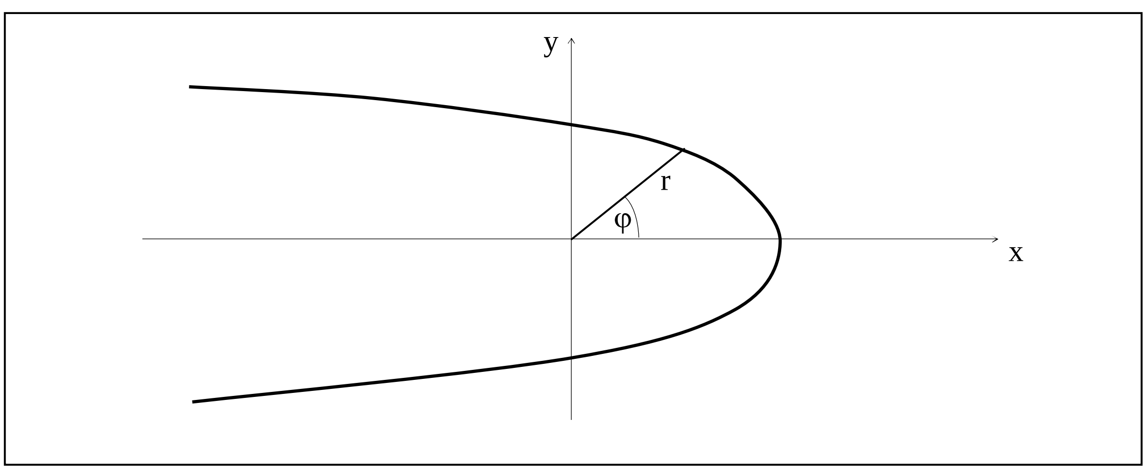
Velika poluos elipse a, koja je prosjeļna udaljenost toĺke na elipsi od fokusa, zavisi samo od energije (primjer takozvane sluļajne degeneracije), dok mala poluos b zavisi i od energije i od angularnog momenta ļestice.

- <u>E > 0 ï slobodna ļestica</u> $\Rightarrow$ |Ů| > 1 $\Rightarrow$ r = p / (1 + Ůcosű) > 0 za svako $\varphi \in [0,\varphi_{max})$ U $(-\varphi_{max}, 2\pi]$, gdje je cos ű$_{max}$ = − 1/|Ů| . Ļestica se od centra sile moġe beskonaļno udaljiti r = Đ za $\varphi = \pm\varphi_{max}$. Putanja je hiperbola sa asimptotama $\varphi = \pm\varphi_{max}$, kao na Slici 16.



Slika 16.

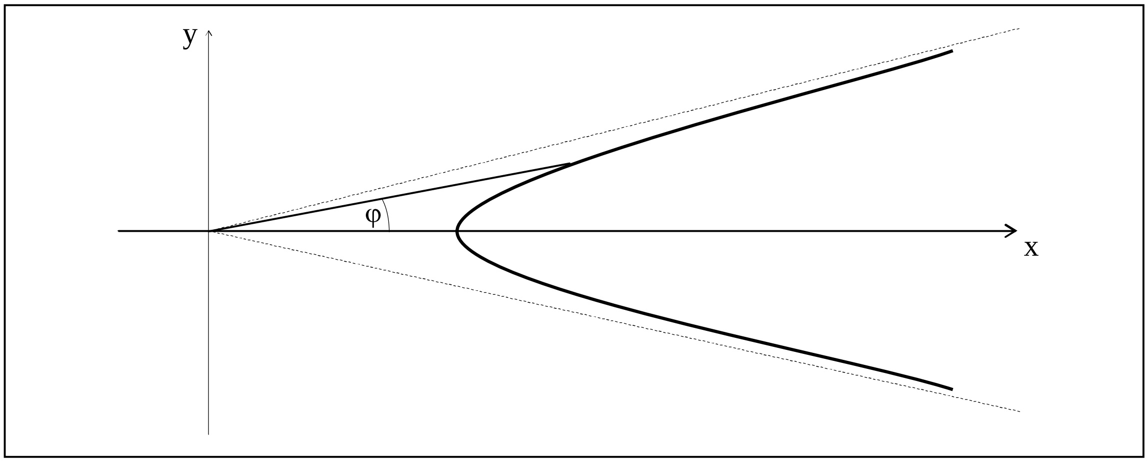
- <u>E = 0</u> $\Rightarrow$ |Ů| = 1 $\Rightarrow$ r = p / (1 + Ůcosű) > 0 za svako $\varphi \neq \pi$. Graniļni sluļaj – ļestica asimptoski dolazi/odlazi u beskonaļnost gdje stiġe sa brzinom nula. Putanja takve ļestice je parabola, kao na Slici 17.



Slika 17.

Odbojne sile: $\underline{A > 0 \;\Rightarrow\; E > 0}$, $p < 0$, $|\varepsilon| > 1 \;\Rightarrow\; r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} > 0$ za $\forall\varphi \in (-\varphi_{max}, \varphi_{max})$,

gdje je $\cos\varphi_{max} = \dfrac{1}{|\varepsilon|}$. Putanja je uvijek hiperbola, kao na Slici 18., ali je sada centar sile u drugom fokusu (van hiperbole) u odnosu na sluļaj privlaļnih sila.



Slika 18.

Keplerov problem je moģda i lakģe rjeģiti Lagrangeovim formulizmom. Lagrangian konzervativnig sustava dviju ļestica je:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right). \tag{4.28}$$

Smjena variabli $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\} \to \{\vec{r}, \vec{r}_c\}$ prema (4.2) i (4.3), tj.

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_c + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\,, \qquad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}_c - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\,, \tag{4.29}$$

transformira Lagrangian (4.28) u zbroj Lagrangiana centra mase L_c i Lagrangiana relativnog gibanja L_r:

$$L = L_c + L_r = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_c^{\,2} + \frac{1}{2}\varepsilon\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(\vec{r}). \tag{4.30}$$

Lagrangeove jednadģbe za gibanje centra mase $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}_{c_i}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial r_{c_i}} = 0$, odmah daju (4.4) sa rjeģenjem (4.5):

$$M\ddot{\vec{r}}_c = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{r}}_c = \text{const.} = \dot{\vec{r}}_c(0) \;\Rightarrow\; \vec{r}_c(t) = \dot{\vec{r}}_c(0)\,t + \vec{r}_c(0). \tag{4.5}$$

Ako među česticama djeluju konzervativne centralne sile potencijalna energija je sferno simetrična $U(\vec{r}) \to U(r)$, pa prema (1.46) važi zakon očuvanja angularnog momenta relativnog gibanja $\vec{l} = \mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.}$ Odaremo li z-os duž pravca angularnog momenta, gibanje čestice mase μ je u xy-ravnini, pa relativno gibanje ima samo 2 stupnja slobode. U polarnim koordinatama (r,φ) Lagrangian relativnog gibanja je:

$$L_r = L\left(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}\right) = \frac{1}{2}\mu\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\,r^2\dot{\varphi}^2 - U(r)\,. \tag{4.31}$$

Generalizirana koordinata φ je ciklična, pa je:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{\varphi}} = \mu\,r^2\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\,r^2\dot{\varphi} = l = \text{const.}\,, \tag{4.32}$$

a Lagrangeova jednadžba za generaliziranu koordinatu r je:

$$\mu\,\ddot{r} - \mu\,r\dot{\varphi}^2 + \frac{dU}{dr} = 0\,. \tag{4.33}$$

Da dobijemo diferencijalnu jednadžbu putanje eliminirajmo vrijeme t pomoću (4.32). Kako je:

$$\dot{r} = -\frac{l}{\mu}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) \quad i \quad \ddot{r} = -\frac{l^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

a $U(r) = \dfrac{A}{r}$, iz (4.33) se dobija jednadžba putanje:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} + \frac{\mu A}{l^2} = 0\,. \tag{4.34}$$

Smjenom $u = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\mu A}{l^2}$, gornja jednadžba postaje jednostavno:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0\,. \tag{4.35}$$

Lako se uvjeriti da je rješenje kao i prije:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,, \tag{4.36}$$

gdje je:

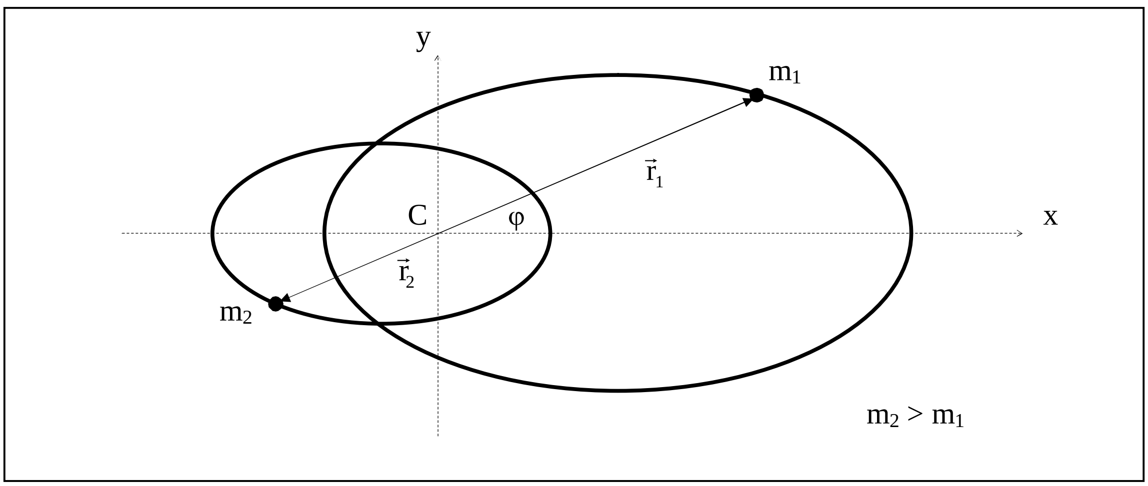
$$p = -\frac{l^2}{\mu A}\,, \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu A^2}}\,. \tag{4.37}$$

Keplerov problem je rjeġen u (4.21) ili (4.36-37) za varijablu relativnog poloġaja ļestica $\vec{r}$. Relacije (4.3) onda daju rjeġenje pomoĺu originalnih varijabli $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Na primjer, u sluļaju eliptiļnih putanja ($E < 0$) u sustavu centra mase rjeġenje je:

$$r_1^*(\varphi) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \qquad r_2^*(\varphi) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

ġto znaļi da se dvije ļestice gibaju po sliļnim elipsama koje imaju jedan zajedniļki fokus u centru mase sustava. Minus znak u $r_2^*(\varphi)$ znaļi da je u svakom trenutku kut izmeĽu radijus vektora ļestica π. Dvije ļestice rotiraju po elipsama oko centra mase kao da su spojene krutim ġtapom, kao na Slici 19.

Za opis kompletnog gibanja u mirujuĺem inercijalnom referentnom sustavu, treba joġ na ovu rotaciju superponirati gibanje centra mase konstantnom brzinom po pravcu, ġto znaļi da u ovom sustavu putanje ļestica nisu zatvorene krivulje ï elipse, veĺ eliptiļne spirale.



Slika 19.

Na kraju razmotrimo ukratko joġ jednu metodu rjeġavanja Keplerovog problema.

4.3 Runge-Lenz vektor

Kako je prema (4.6) i (4.17): $\dot{\vec{p}} = \frac{A}{r^3}\vec{r}$, derivacija vektora $\vec{l} \times \vec{p}$ je:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{l} \times \vec{p}\right) = \vec{l} \times \dot{\vec{p}} = \frac{A}{r^3}\,\vec{l} \times \vec{r} = -\frac{\varepsilon A}{r^3}\left[\vec{r}\left(\vec{r}\,\dot{\vec{r}}\right) - r^2\,\dot{\vec{r}}\,\right] = \varepsilon A\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \tag{4.38}$$

pa je vektor $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{l} \times \vec{p}}{\varepsilon A} - \frac{\vec{r}}{r} = \text{const.} \tag{4.39}$$

očuvana veličina.

Za gibanje čestica pod utjecajem centralnih sila inverzno proporcionalnih kvadratu udaljenosti pored E i $\vec{l}$, postoji i dodatna očuvana vektorska veličina (4.39), koja se naziva Runge-Lenz vektor $\vec{\varepsilon}$. Vektor $\vec{\varepsilon}$ je okomit na $\vec{l}$, pa leži u xy-ravnini gibanja. Koristeći zakon očuvanja energije i relacije (4.10) i (4.11) dobija se:

$$\vec{\varepsilon}^{\,2} = \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon} = \frac{2l^2}{\varepsilon A^2}\left(\frac{p^2}{2\varepsilon} + \frac{A}{r}\right) + 1 = 1 + \frac{2El^2}{\varepsilon A^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \pm\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\varepsilon A^2}}\,,$$

kao u (4.20).

Kako je $\vec{\varepsilon}\,\vec{r} = \frac{\left(\vec{l} \times \vec{r}\right)\vec{r}}{\varepsilon A} - r = -\frac{l^2}{\varepsilon A} - r$, i $\vec{\varepsilon}\cdot\vec{r} = \varepsilon r\cos\varphi$, lako se dobija jednadžba putanje:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,, \qquad p = -\frac{l^2}{\varepsilon A}\,, \tag{4.40}$$

– jednadžba konusnih presjeka, kao (4.21) ili (4.36).

Prema tome, očuvane veličine $\vec{l}$, E i $\vec{\varepsilon}$ kompletno određuje putanju u Keplerovu problemu – ravnina orbite okomita je na $\vec{l}$ = const., tip orbite (elipsa, parabola ili hiperbola) određena je ekscentricitetom, tj. sa E, l^2 i ε^2, a orijentacija orbite u ravnini određena je vektorom $\vec{\varepsilon}$. Točnost zadnje tvrdnje najlakše je vidjeti odaberemo li , kao i prije, $\vec{l} = l\hat{k}$, što znači da je gibanje u xy-ravnini. Odaberemo li još i pravac osi simetrije putanje (pravac kroz fokus i pericentar) za x-os, prema (4.39) onda je:

$$\varepsilon_x = -\frac{1}{\varepsilon A}l p_y - \frac{x}{r}\,, \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{\varepsilon A}l p_x - \frac{y}{r}\,, \qquad \varepsilon_z = 0,$$

pa je u percentru: $y = 0$ i $p_x = 0$, te je $\varepsilon_y = 0$ i Runge-Lenz vektor je u pravcu glavne osi putanje: $\vec{A} = A_x \hat{i}$. Ali, $\vec{A} =$ const. je očuvana veličina, što znači da pravac vektora $\vec{A}$ u pericentru uvijek određuje glavnu os putanje.

Egzistencija dodatne očuvane veličine (4.39) može se iskoristiti da se pokaže da su jedine privlačne centralne sile za koje postoje zatvorene orbite (elipse) za vezane čestice: elastične (izotropni LHO, kao u odjeljku **1.6**) i gravitacijske i privlačne električne sile – centralne sile koje zavise od udaljenosti čestica kao r ili r^{-2}. Samo za te tri vrste sila u klasičnoj fizici postoje vezana stanja dve čestice (stanja u kojima su čestice uvijek na konačnoj udaljenosti i nikad ne mogu otići u beskonačnost). To znači da su elestične, gravitacijske i privlačne električne sile jedini tipovi centralnih sila koje dolaze u obzir za kreiranje klasičnih modela za sva fizikalno važna vezana stanja čestica: proton, nukleus, atom, molekula, planetarni sustav, zvjezdani sustav, galaksija, itd.

Analog Runge-Lenz vektora $\vec{A}$ u kvantnoj mehanici komutira sa Hamiltonijanom vodikovog atoma što pretstavlja dodatnu simetriju problema koja pojašnjava «slučajnu degeneraciju» energijskih nivoa – energija elektrona u atomu vodika $E_n = \frac{-13{,}6\,\mathrm{eV}}{n^2}$, zavisi samo od glavnog kvantnog broja n, ali ne zavisi od orbitalnog angularnog momenta *l*.

Dosad smo razmatrali Keplerov problem, tj. gibanje sustava dvije čestice masa m_1 i m_2 koje djeluju jedna na drugu konzervativnim centralnim silama čiji potencijal je inverzno proporcionalnim udaljenosti čestica, kao što su gravitacijske i električne sile.

Ali, Sunce i planete nisu čestice, već tijela konačnih (astronomskih) dimenzija i moramo razumjeti niz sukcesivnih aproksimacija koje, pod nekim uvjetima, dozvoljavaju da se realni fizikalni objekti tretiraju kao čestice.

4.4 Mehanika tijela konačnih dimenzija

Neka umjesto dvije čestice imamo dva astronomska tijela – zvijezde i/ili planete. Prvo možemo pretpostaviti da se radi o dva kruta tijela konačnih dimenzija. Iako, Zemlja (niti Sunce) nije kruto tijelo, što na primjer, plima i osjeka zorno demostriraju, deformacije su toliko male da ih u prvoj aproksimaciji možemo zanemariti. Promatranja pokazuju da su astronomski objekti (veći od asteroida) u pravilu sfernog oblika. Zato pretpostavimo da je raspodjela mase m tijela sferno simetrična, tj. gustoća $\rho\left(\vec{r}\right)=\rho\left(r\right)$ ne zavisi od sfernih kuteva θ i φ. Tijelo konačnih dimenzija smatramo skupom od bezbroj čestica mase dm = $\rho\left(\vec{r}\right)d^3r$. U odnosu na centar mase, koji je u centru tijela, je onda:

$$m=\int dm=\int d^3r\rho\left(\vec{r}\right)=4\pi\int_0^\infty dr\, r^2\rho\left(r\right)=4\pi\int_0^R dr\, r^2\rho\left(r\right), \tag{4.41}$$

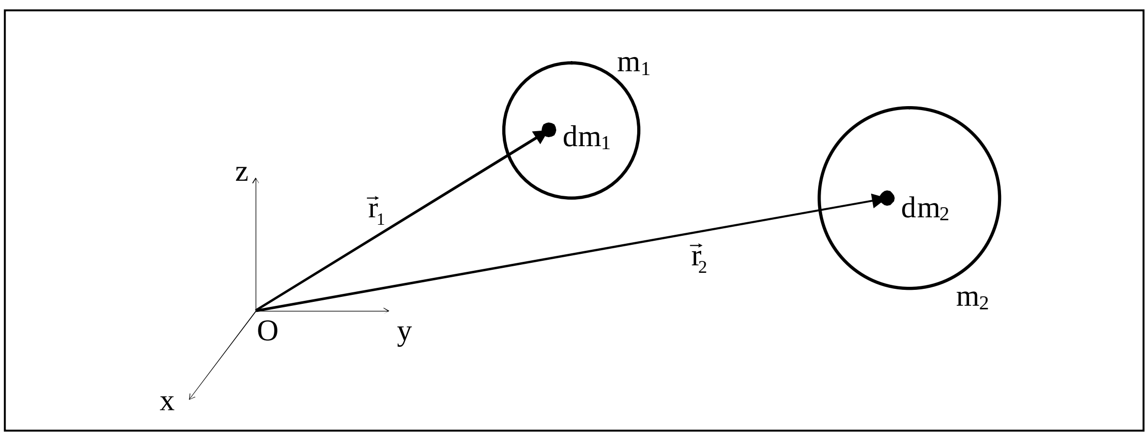
gdje je R radijus tijela.

Gravitacijska potencijalna energija čestica dm_1 i dm_2 , kao na Slici 20., određena Newtonovim zakonom gravitacije, je:

$$dU\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=-G\frac{dm_1dm_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}, \tag{4.42}$$

pa je ukupna gravitacijska potencijalna energija dva tijela:

$$U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)=-G\int d^3r_1\int d^3r_2\frac{\rho\left(\vec{r}_1\right)\rho\left(\vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}. \tag{4.43}$$

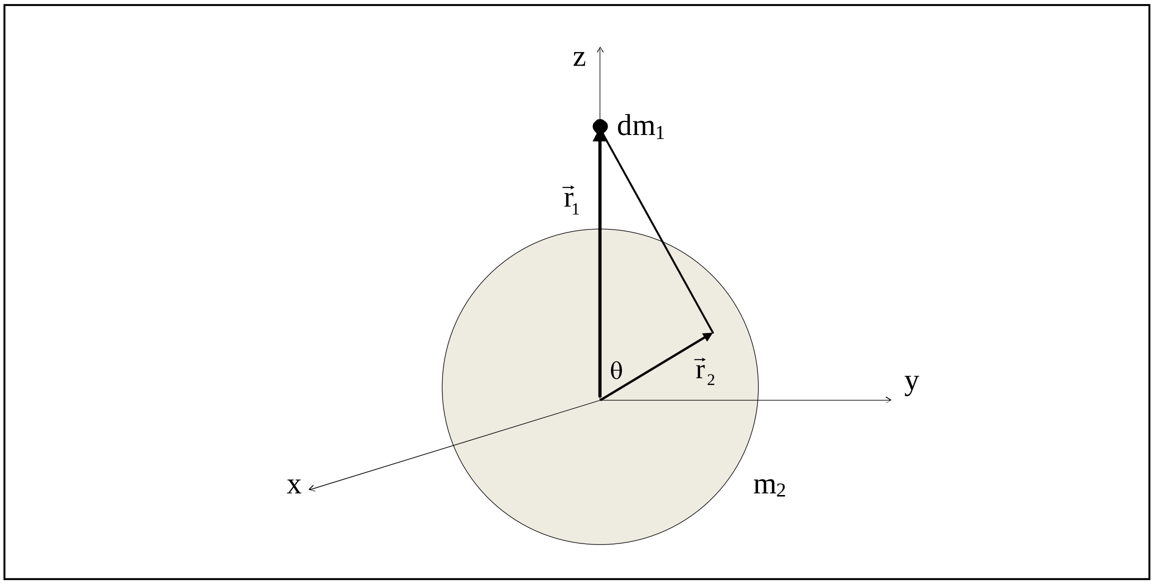


Slika 20.

Ustvari, dovoljno je riješiti jednostavniji problem proračuna gravitacijske potencijalne energije sferno simetričnog tijela i čestice mase dm_1 van tijela računajući integral po dm_2. Jednostavnosti radi, odaberimo ishodište koordinatnog sustava u centru mase tijela 2, a za z-os odaberimo pravac kroz česticu dm_1 ($\vec{r}_1=z\vec{k}$), kao na Slici 21.

Za sferno simetriļ no tijelo 2 je onda:

$$dU(\vec{r}_1) = -G\,dm_1 \int d^3r_2 \frac{\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -G\,dm_1 \int_0^\infty dr_2 r_2^{\,2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho(r_2)}{\sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos\theta}} .$$



Slika 21.

Integracija po φ daje samo 2π, pa smjenom u = cosθ integral postaje:

$$dU(\vec{r}_1) = -2\pi\, G\,dm_1 \int_0^\infty dr_2\, r_2^{\,2} \rho(r_2) \int_{-1}^{1} du \left(r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2u\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Integracija po u daje: $\int_{-1}^{1} du \left(r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2u\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{r_1r_2}\left(|r_1 - r_2| - |r_1 + r_2|\right) = \begin{cases} \frac{2}{r_1} & \text{za } r_1 > r_2 \\ \frac{2}{r_2} & \text{za } r_1 < r_2 \end{cases}$.

Potencijal ļestice dm_1 u gravitacijskom polju sferno simetriļ nog tijela m_2 je sferno simetriļ an (zavisi samo od r) i odreĽen integralom:

$$dU(r_1) = -4\pi\, G\,dm_1 \left(\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} dr_2\, r_2^{\,2} \rho(r_2) + \int_{r_1}^{\infty} dr_2\, r_2 \rho(r_2) \right). \qquad (4.44)$$

Ako je radijus drugog tijela R_2 , tada je $\rho(r_2) = 0$ za $r_2 > R_2$, pa za $r_1 > R_2$ drugi integral u (4.44) niġta ne doprinosi i vrijedi:

$$dU(r_1) = -4\pi\, G\,dm_1 \frac{1}{r_1} \int_0^{R_2} dr_2\, r_2^{\,2} \rho(r_2) = -G \frac{m_2 dm_1}{r_1} .$$

Pokazali smo da:

Gravitacijski potencijal sferno simetrične zvijezde mase M

Gravitacijski potencijal sferno simetriļnog tijela mase M i radijusa R u prostoru izvan tijela je isti kao i potencijal koji stvara ļestica mase M koja se nalazi u centru mase tijela, tj.

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}, \quad \text{za} \quad r > R. \tag{4.45}$$

Sferno simetriļna zvijezda u prostoru van zvijezde stvara gravitacijsko polje kao da joj je cijelokupna masa skoncentrirana u centru.

Sve ġto vaġi za tijelo Ă2ñ, vaġi analogno i za tijelo Ă1ñ, pa vrijedi:

Gravitacijska potencijalna energija (4.43) *dva* *sferno simetrična* *tijela masa* m_1 *i* m_2 *i radijusa* R_1 *i* R_2 *, čiji su centri masa na udaljenosti* r Ó R_1 + R_2, *identična je potencijalnoj energiji dviju čestica masa* m_1 *i* m_2 *na udaljenosti* r:

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \quad r = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|. \tag{4.46}$$

Da bi dokazao gornji teorem Newton je skoro dva desetljeĺa odlagao publiciranje svoje knjige ï vrijeme koje mu je bilo potrebno da razvije diferencijalni i integralni raļun neophodan za dokaz.

Gornja aproksimacija je vrlo dobra za planete i zvijezde ï odstupanja od sfernog oblika vrlo su mala. Za Zemlju je ekvatorijalni radijus 21,4 km veĺi od polarnog, ġto je odstupanje od sfere od svega 3.35 promila ($R_\oplus$ = 6380 km). Ako ġelimo joġ toļniju aproksimaciju, Zemlju (i Sunce) moġemo smatrati sastavljenom od dva tijela ï sfera plus ekvatorijalni prsten koji izraġava odstupanje od sfernog oblika.

Za gibanje u zemljinom gravitacijskom polju u blizini povrġine Zemlje, tj. na visini h mnogo manjoj od radijusa Zemlje, potencijalna energija ļestice mase m je razvojem u red:

$$U(h) = -G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus + h} = -mgR_\oplus + mgh + \ldots, \quad g = -G\frac{M_\oplus}{R_\oplus{}^2} = 9{,}8\frac{m}{s^2},$$

gdje je h << $R_\oplus$ visina iznad povrġine Zemlje.

Kako je potencijalna energija uvijek odreĽena do na konstantu, prvi ļlan u redu moġemo zanemariti, pa je gravitacijska potencijalna energija ļestice u odnosu na povrġinu Zemlje:

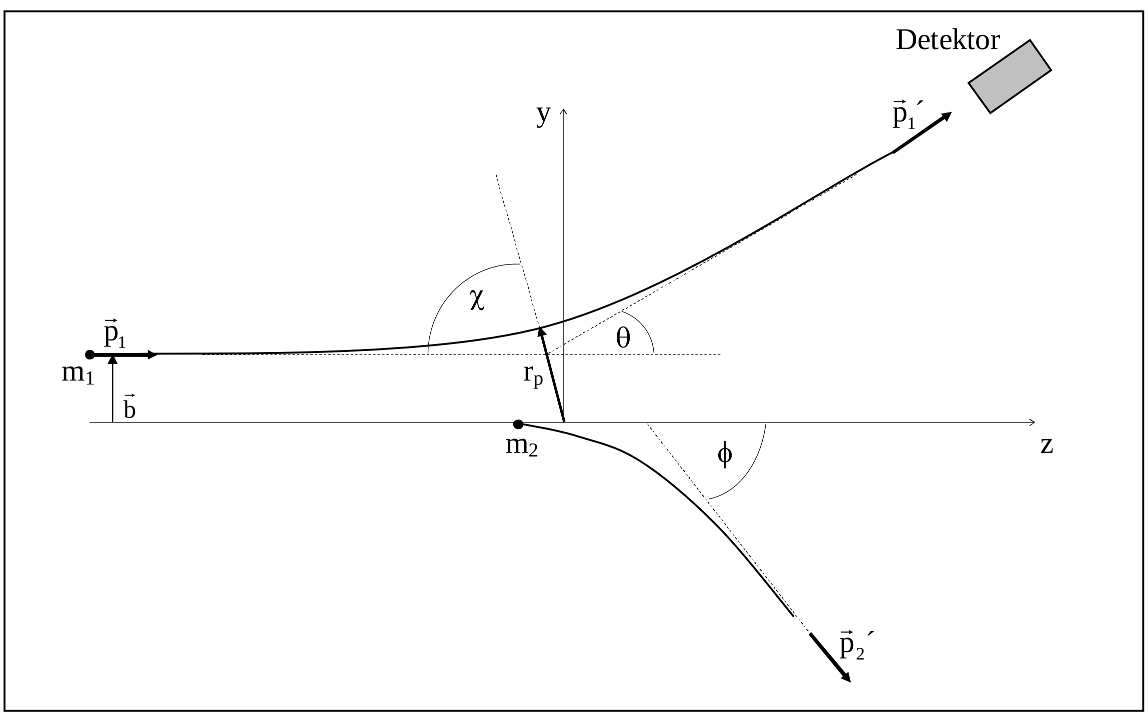
$$U = mgh.$$

4.5 Raspršenje čestica u centralnom polju sila

Istraģivanje mikroskopskih objekata molekula, atoma, nukleusa i elementarnih ļestica znatno je oteģano jer su njihove dimenzije toliko male da nisu direktno dostupne naġim osjetilima. Zato su neophodne metode koje uveĺavaju i njihove efekte ļine vidljivim. Rasprġenje ļestica je takva indirektna metoda mjerenja svojstava mikroskopskih odjekata. Poznavanje poloģaja i brzina ļestica prije i poslije rasprġenja omoguĺuje saznanja o silama (potencijalnim energijama) meĽu ļesticama tijekom rasprġenja, kad su direktna mjerenja nemoguĺa. Iako u eksperimentima rasprġenja sudjeluju kvantne ļestice i kompletna teorija zahtijeva kvantnu mehaniku, u mnogim sluļajevima klasiļna teorija raspġenja je veoma dobra aproksimacija. Opis efekata rasprġenja pomoĺu udarnog presjeka rasprġenja je isti i u klasiļnoj i u kvantnoj mehanici. U procesima rasprġenja ļestice meĽusobno razmjenjuju impuls i energiju i analiza procesa, kao i u procesima sudara krutih tijela, bazirana je na primjeni zakona oļuvanja. Pretpostavljamo da su sile meĽu ļesticama koje sudjeluju u rasprġenju konzervativne centralne sile, kao gravitacijske ili elektriļne sile, opisane sferno simetriļnim potencijalom U(r), gdje je $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ intenzitet vektora relativnog poloģaja ļestica. Pretpostavljamo i da potencijal U(r) dovoljno brzo opada s udaljenoġĺu, tj. kad $r \to$ Đ, i to najmanje kao r^{-1}, tako da se ļestice na makroskopskim rastojanjima (puno prije i puno poslije sudara) mogu smatrati slobodnim.

4.6 Kinematika raspršenja

Osnovne ideje teorije rasprġenja ļestica najlakġe je razumjeti na primjeru tipiļnog eksperimenta: rasprġenju ļestica mase m_1 ï projektila, na fiksnoj meti, ļestici/ama mase m_2, koja u poļetku miruje. Tipiļan sluļaj prikazan je na Slici 22.



Slika 22.

Projektil mase m_1 se približava meti, koja miruje, u pravcu z-osi sa konstantnim početnim impulsom $\vec{p}_1 = m\vec{v}_0$. Kad ne bi djelovala nikakva sila na projektil, on bi prošao pored mete na minimalnoj udaljenosti $\vec{b}$, koja se naziva parametar sudara. U blizini ishodišta, u regionu interakcije uslijed sila međudjelovanja, projektil se raspršuje, tj. skreće i u udaljeni detektor stiže sa konačnim impulsom $\vec{p}_1{}'$. Čestica mase m_2 – meta, počinje se gibati uslijed interakcije sa projektilom i poslije raspršenja odlazi u beskonačnost sa konstantnim impulsom $\vec{p}_2{}'$. Sve fizikalne veličine poslije raspršenja označavaćemo sa « ´ ». Putanja projektila je simetrična u odnosu na pravac minimalnog rastojanje od centra sile – pericentar $\vec{r}_p$, jer dva znaka u (4.16) [ili (4.19) u slučaju sila proporcionalnih sa r^{-2}] daju po apsolutnoj vrijednosti istu promjenu kuta za zadano dr, ako kut mjerimo od pravca $\vec{r}_p$. To je očigledno jer svaki konusni presjek ima os simetrije kroz fokuse.

Raspršenje projektila mjeri se kutom raspršenja θ koji je određen sa:

$$\cos\theta = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_1{}'}{|\vec{p}_1||\vec{p}_1{}'|}. \tag{4.47}$$

Sustav projektil-meta je izolirani sustav dvije čestice i cijeli proces raspršenja određen je početnom brzinom projektila v_0, parametrom sudara b i potencijalnom energijom interakcije U(r). Za centralne sile raspršenje ne zavisi od sfernog kuta φ (kut sa x-osi) i proces raspršenja je aksialno simetričan (simetričan u odnosu na rotacije oko z-osi), što znači da raspršenje zavisi samo od intenziteta parametra sudara b, ali ne i od njegova pravca.

Osnovna ideja teorije raspršenja čestica je da opiše proces prelaska sustava iz inicijalnog stanja ($\vec{p}_1 = m\vec{v}_0$ i $\vec{p}_2 = 0$) u finalno stanje ($\vec{p}_1{}'$ i $\vec{p}_2{}'$) pomoću makroskopskih fizikalnih veličina koje se mogu mjeriti daleko od mikroskopskog regiona interakcije u dijelu prostora gdje su čestice slobodne – puno prije ili puno poslije interakcije. Raspršenje želimo opisati pomoću: $\vec{p}_1$, $\vec{p}_1{}'$ i kuta raspršenja θ umjesto parametra sudara b.

U slučaju centralnih sila gibanje je uvijek u ravnini zbog zakona očuvanja angularnog momenta (4.9). Za tu ravninu uvijek možemo odabrati recimo yz-ravninu kao na Slici 22., koja je nacrtana za slučaj odbojnih električnih sila – putanje čestica su hiperbole. Za analizu procesa raspršenja potrebno je uvesti sustav centra mase prema (4.2) ili (4.3). U sustavu centra mase vrijedi $\vec{r}_c = 0$ i $\dot{\vec{r}}_c = 0$, pa je prije i poslije raspršenja (veličine računate u odnosu na sustav centra mase označavaćemo sa « * »):

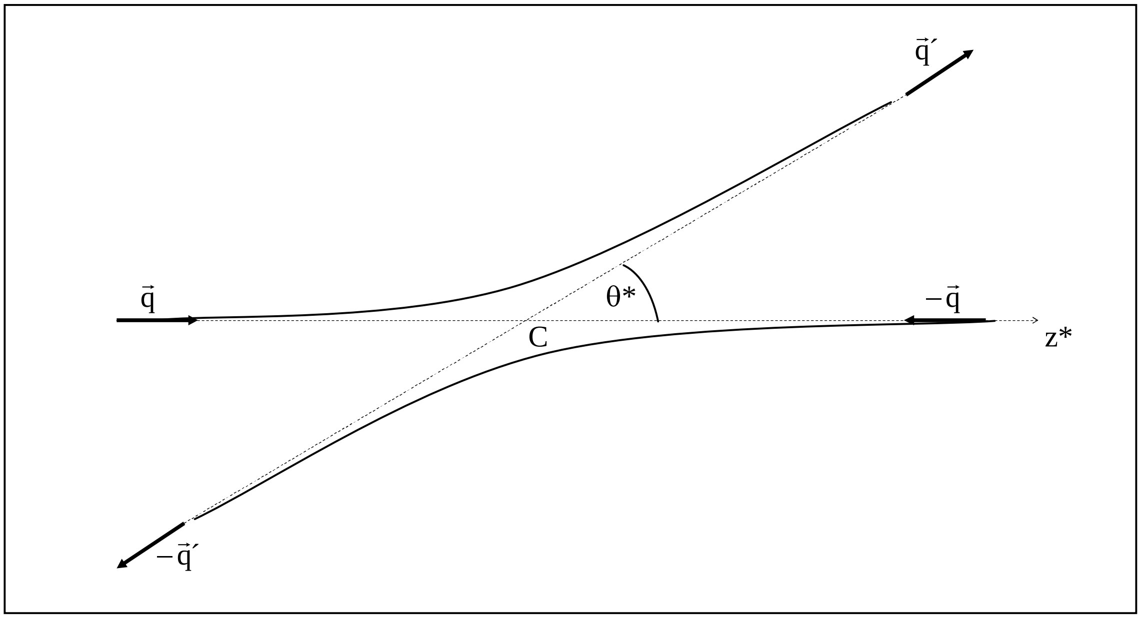
- <u>Inicijalno stanje</u>:

$$\vec{p}_1{}^* = m_1\dot{\vec{r}}_1 = \varepsilon\dot{\vec{r}} \equiv \vec{q}, \qquad \vec{p}_2{}^* = m_2\dot{\vec{r}}_2 = -\varepsilon\dot{\vec{r}} = -\vec{q}, \tag{4.48}$$

- <u>Finalno stanje</u>:

$$\vec{p}_1{}'^* = m_1\dot{\vec{r}}_1{}' = \varepsilon\dot{\vec{r}}' \equiv \vec{q}\,', \qquad \vec{p}_2{}'^* = m_2\dot{\vec{r}}_2{}' = -\varepsilon\dot{\vec{r}}' \equiv -\vec{q}\,'. \tag{4.49}$$

U sustavu centra mase rasprġenje je jednostavan, simetriļan proces (uzmemo li pravac $\vec{q}$ za z*-os kut rasprġenja projektila θ* je kut sfernog koordinatnog sustava), kao na Slici 23.



Slika 23.

Zakoni oļuvanja za gibanje dviju ļestica daju:

- Zakon oļuvanja impulsa:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,', \tag{4.50}$$

- Zakon oļuvanja energije:

Ako je rasprġenje elastiļno, tj. ne mijenja se unutarnja energija ļestica u sudaru (ovaj uvjet nije uvijek ispunjen u kvantnoj mehanici), onda je:

$$\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} = \frac{\vec{p}_1\,'^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2\,'^{\,2}}{2m_2}, \tag{4.51}$$

jer je U(Đ) = 0. Elastiļno rasprġenje znaļi vaġenje zakona oļuvanja kinetiļke energije. Definiramo li impuls centra mase $\vec{P}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = M\dot{\vec{r}}_c$ i impuls relativnog gibanja $\vec{p}_r = \varepsilon\,\dot{\vec{r}} = \vec{q}$, prije rasprġenja je:

$$\vec{p}_1 = \frac{m_1}{M}\vec{P}_c + \vec{q}, \qquad \vec{p}_2 = \frac{m_2}{M}\vec{P}_c - \vec{q} = 0, \tag{4.52}$$

ġto daje:

$$\vec{P}_c = \frac{M}{m_2}\vec{q} \quad \text{i} \quad \vec{p}_1 = \vec{P}_c .$$

Kako unutarnje sile ne mijenjaju impuls centra mase, poslije sudara je na isti naļin:

$$\vec{p}_1{}' = \frac{m_1}{M}\vec{P}_c + \vec{q}\,' = \frac{m_1}{m_2}\vec{q} + \vec{q}\,', \qquad \vec{p}_2{}' = \frac{m_2}{M}\vec{P}_c - \vec{q}\,' = \vec{q} - \vec{q}\,', \tag{4.53}$$

ġto uvrġtavanjem u zakon oļuvanja energije (4.51) daje:

$$\vec{q}^{\,2} = \vec{q}\,'^{2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{q}| = |\vec{q}\,'| = q , \tag{4.54}$$

tj., u elastiļnom rasprġenju ļestica u sustavu centra mase intenziteti impulsa ļestica ostaju nepromjenjeni i jedino se mijenje pravac impulsa za kut θ*.

Naĺimo sad relaciju koja povezuje kut rasprġenja projektila θ u laboratorijskom sustavu (4.47) i u sustavu centra mase θ*. Koristeĺi (4.52) i (4.53) vrijedi:

$$\vec{p}_1 \vec{p}_1{}' = \left(\frac{M}{m_2}\vec{q}\right)\left(\frac{m_1}{m_2}\vec{q} + \vec{q}\,'\right) = \frac{M}{m_2} q^2 \left(\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta^*\right),$$

i

$$\vec{p}_1 \vec{p}_1{}' = |\vec{p}_1||\vec{p}_1{}'|\cos\theta = \frac{M}{m_2} q^2 \left[1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta^* + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cos\theta ,$$

pa je:

$$\cos\theta = \left(\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta^*\right)\left[1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta^* + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} .$$

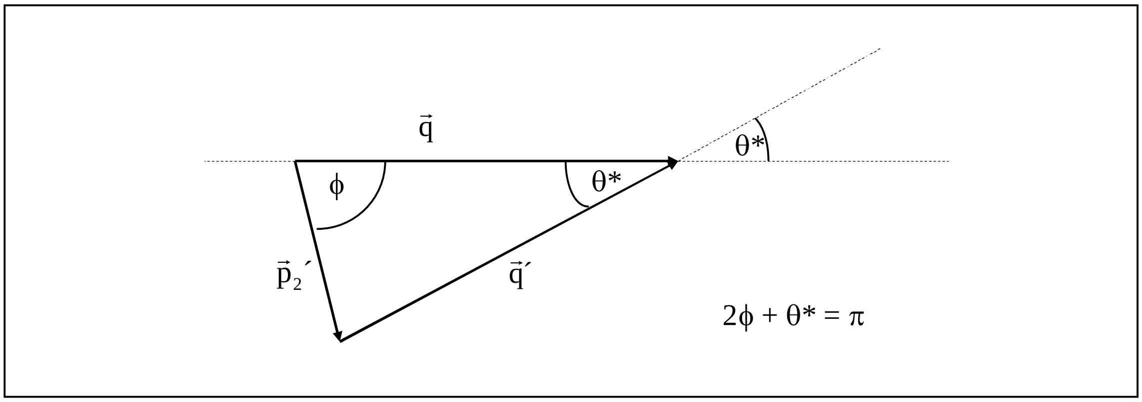
Iskoristimo li zadnji izraz da naĺemo sinθ, lako se konaļno dobija veza kuteva rasprġenja u dva sustava:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta^*} , \tag{4.55}$$

pri ļemu je: 0 ≤ θ* ≤ π i θ < θ*.

Druga ļestica u laboratorijskom sustavu skreĺe za kut ϕ, pa je zbog $\vec{p}_2{}' = \vec{q} - \vec{q}\,'$ i $q = |\vec{q}| = |\vec{q}\,'|$ prema Slici 24.:

$$\phi = \frac{\pi - \theta^*}{2} . \tag{4.56}$$



Slika 24.

Dovoljno je poznavati kut raspršena θ^* u sustavu centra mase jer se onda, kako pokazuju izrazi (4.55) i (4.56), mogu odrediti kutevi raspšenja θ i ϕ obje čestice u laboratorijskom sustavu, te vrijedi:

- Ako je $m_1 < m_2$ mogući kutevi raspršenja u laboratorijskom sustavu su $0 \leq \theta \leq \pi$. Ako je meta puno masivnija od projektila $m_1 << m_2$, nestaje razlika između dva sustava i u limesu je: $\theta \to \theta^* \leq \pi$.

- Za raspršenje identičnih čestica $m_1 = m_2$, što je čest slučaj u eksperimentima sudaranja snopova čestica, vrijedi: $\theta = \frac{\theta^*}{2}$ i $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$, što znači da se u laboratorijskom sustavu poslije raspšenja čestice gibaju okomito jedna na drugu, te da je maksimalna vrijednost kuta raspršenja bilo koje čestice je $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$. U specijalnom slučaju centralnog sudara je $\theta^* = \pi$, te $\vec{q}\,' = -\vec{q}$, pa je prema (4.52) i (4.53): $\vec{p}_1\,' = 0$, a $\vec{p}_2\,' = \vec{p}_1$.

- Ako je $m_1 > m_2$ mogući kutevi raspršenja u laboratorijskom sustavu su ograničeni na interval $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$, gdje je $\sin\theta_{max} = \frac{m_2}{m_1}$. U laboratorijskom sustavu u raspršenju na meti manje mase projektil uvijek skrene za kut manji od $\frac{\pi}{2}$. Kut raspršenja $\theta > \frac{\pi}{2}$ moguć je samo ako je meta masivnija od projektila.

4.7 Dinamika raspršenja

Prema Slici 22. vektor sudara $\vec{b}$ povezan je sa angularnim momentom relativnog gibanja ļestica jer je u poļetnom stanju u odnosu na nepokretnu metu:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times \frac{m_2}{M} \vec{p}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{b} \times \vec{p}_1 = \vec{b} \times \vec{q} . \tag{4.57}$$

Kao ģto je veĺ pokazano, za gibanje izoliranog sustava dvije ļestice koje meĽudjeluju centralnim silama, prema (1.39), vaģi ne samo zakon oļuvanja ukupnog angularnog momenta, veĺ i zakon oļuvanja angularnog momenta relativnog gibanja, kao u (4.9).

- Zakon oļuvanja angularnog momenta relativnog gibanja:

$$l = \left|\vec{l}\right| = \left|\vec{b} \times \vec{q}\right| = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{l}{q} . \tag{4.58}$$

Problem koji treba rjeģiti je: za zadanu sferno simetriļnu potencijalnu energiju U(r) interakcije dve ļestice treba odrediti kut rasprģenja θ projektila, ako znamo njegov impuls $\vec{p}_1$ i angularni moment relativnog gibanja $\vec{l}$ prije rasprģenja. Vidjeli smo da se problem svodi na odreĽivanje putanje (4.16) ļestice mase $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ i radijus vektora $\vec{r}$ na koju djeluje sila odreĽena potencijalom U(r), pri ļemu su energija E i angularni moment ļestice $\vec{l}$:

$$E = \frac{q^2}{2\varepsilon} , \qquad \vec{l} = \vec{b} \times \vec{q} , \tag{4.59}$$

tj.,

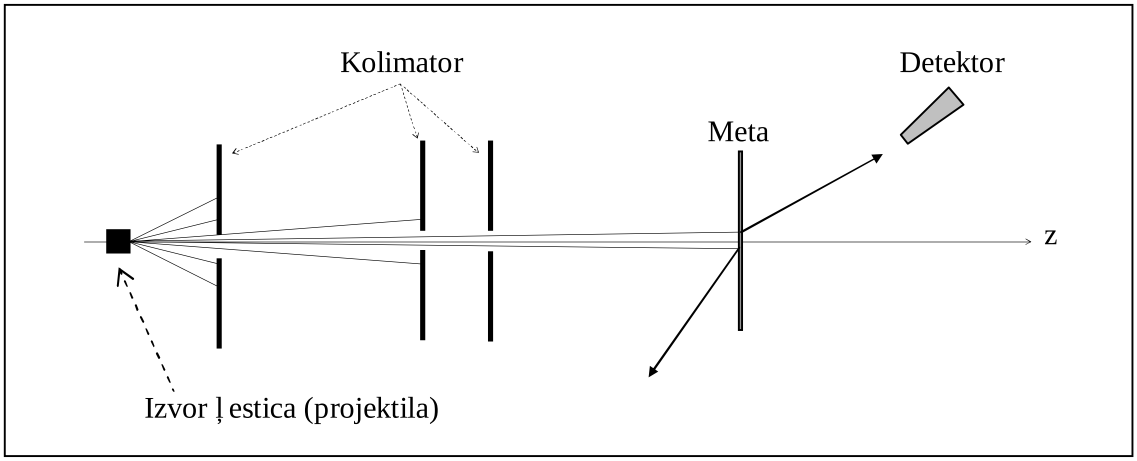
$$\text{dű} = \pm \frac{l\, dr}{r^2 \sqrt{2\varepsilon \left[E - U(r) \right] - \frac{l^2}{r^2}}} = \pm \frac{b\, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\varepsilon}{q^2} U(r)}} . \tag{4.60}$$

Prema Slici 23., kut rasprģenja θ^* u sustavu centra mase je: $\theta^* = \pi - 2\phi$, gdje je 2ϕ kut meĽu asimptotama putanje. Odaberemo li za x-os pravac pericentra (os simetrije putanje), polukut ϕ meĽu asimptotama trajektorije je:

$$\phi = \int_{r_p}^{\infty} \frac{b\, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\varepsilon}{q^2} U(r)}} . \tag{4.61}$$

Ova relacija omoguĺuje da se odredi polu-kut meĽu asimptotama putanje, a time i kut rasprģenja θ^*, iz poznate potencijalne energije interakcije ļestica.

U stvarnim eksperimentima rasprġenja ļestica u pravilu ne sudjeluju jedan projektil i jedna meta, veĹ snopovi velikog broja (milioni) identiļnih ļestica iste poļetne brzine, tj. energije. Slika 25. prikazuje shemu Rutherford-ova eksperimenta rasprġenja ļestica na fiksnoj meti.



Slika 25.

Kako snop projektila ima mali, ali konaļan, popreļni presjek odreĽen otvorom kolimatora, razliļite ļestice u poļetnom snopu imat Ĺe mikroskopski razliļite (i nemjerljive) parametre sudara b, koji Ĺe rezultirati razliļitim kutevima rasprġenja θ. Kako sila izmeĽu projektila i mete ovisi samo o njihovoj udaljenosti, uvijek se pretpostavlja da je kut rasprġenja jednoznaļna funkcija parametra sudara $\theta = \theta(b)$, tj. da je inverzna funkcija $b = b(\theta)$ takoĽe jednoznaļna. To znaļi da Ĺe svi projektili koji inicijalno imaju parametre sudara u intervalu $(b, b + db)$ poslije sudara imati kuteve rasprġenja u intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$.

Kutna raspodjela rasprġenih ļestica u potencijalu U(r) opisuje se fizikalno mjerljivom veliļinom $d\sigma(\theta)$ koja se naziva **diferencijalni udarni presjek** (differential cross section) ili **diferencijalni efikasni presjek raspršenja** i definira kao:

$$d\sigma = \frac{dn}{n_0}, \tag{4.62}$$

gdje je: dn broj ļestica u jedinici vremena koje imaju kut rasprġenja u intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$, a n_0 je intenzitet ļestica u poļetnom snopu (gustoĹa struje ļestica), tj. broj ļestica koje u jedinici vremena proĽu kroz jedinicu povrġine okomitu na pravac snopa. Dimenzije od dn su $(\text{vrijeme})^{-1}$, a dimenzije od n_0 su $(\text{vrijeme})^{-1} \times (\text{povrġina})^{-1}$, pa $d\sigma$ ima dimenzije povrġine i mjeri se u m^2. Kako su makroskopske jedinice ogromne za tipiļne veliļine u fizici atoma i molekula, ļeġĹe se koristi jedinica **barn** = $10^{-28}\,m^2$.

U sluļaju centralnih sila postoji azimutalna simetrija (simetrija u odnosu na sferni kut φ), tako da sve ļestice u poļetnom snopu koje proĽu kroz kruġni prsten sa centrom na z-osi unutarnjeg radijusa b i spoljaġnjeg radijusa b + db, poslije rasprġenja skreĹu u interval kuteva $(\theta^*, \theta^* + d\theta^*)$, pa je $dn = n_0\, 2\pi b(\theta^*)\, db$, te:

$$d\sigma = 2\pi b(\theta^*)\, db = 2\pi b(\theta^*) \left| \frac{db(\theta^*)}{d\theta^*} \right| d\theta^*.$$

Apsolutna vrijednost na desnoj strani osigurava pozitivan znak $d\sigma$. Ako sila meĽu ļesticama opada s udaljenoģļu, ģto je uobiļajena situacija, onda veĺe b rezultira manjim kutom raspršenja θ^*, ģto znaļi da je $\frac{db(\theta^*)}{d\theta^*}$ negativno.

Uobiļajeno je da se diferencijalni efikasni presjek raspršenja $d\sigma$ izraģava preko elementa prostornog kuta (elementa površine jediniļne sfere) $d\Omega^* = \sin\theta^* d\theta^* d\varphi^*$ integriranog po φ^*, tj.: $d\omega^* = 2\pi \sin\theta^* d\theta^* \quad \Rightarrow \quad d\theta^* = \frac{1}{2\pi \sin\theta^*} d\Omega^*$. Diferencijalni efikasni presjek raspšenja kao funkcija parametra sudara b u sustavu centra mase je onda:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{b(\theta^*)}{\sin\theta^*} \left| \frac{db(\theta^*)}{d\theta^*} \right|. \tag{4.63}$$

Integracija po prostornom kutu $d\omega^*$ daje <u>ukupni udarni presjek raspršenja σ</u>.

Kako je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*}\frac{d\Omega^*}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*}\left(\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta^*}\right)^{-1} \quad \text{i}$$

$$\cos\theta = \left(\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta^*\right)\left[1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta^* + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

za diferencijalni efikasni presjek raspršenja u laboratorijskom sustavu dobija se:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{\left[1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta^*(\theta) + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{m_1}{m_2}\cos\theta^*(\theta)}, \tag{4.64}$$

gdje je veza kuteva raspršenja u dva sustava (4.55). Gornja relacija je jednostavna u sluļaju raspršenja identiļnih ļestica $m_1 = m_2$, kada je $\theta = \frac{\theta^*}{2}$ i kad vrijedi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\frac{d\sigma}{d\Omega^*}\cos\theta. \tag{4.65}$$

Fizikalni smisao ukupnog efikasnog presjeka raspršenja biti ĺe jasniji iz slijedeĺeg jednostavnog primjera.

Primjer 1. Elastiļno rasprġenje krutih kugli.

Razmotrimo elastiļno rasprġenje identiļnih idealno krutih kugli masa $m = m_1 = m_2$ i radijusa $R = R_1 = R_2$ (kao sudari identiļnih bilijarskih kugli). Treba naĺi efikasni presjek rasprġenja.

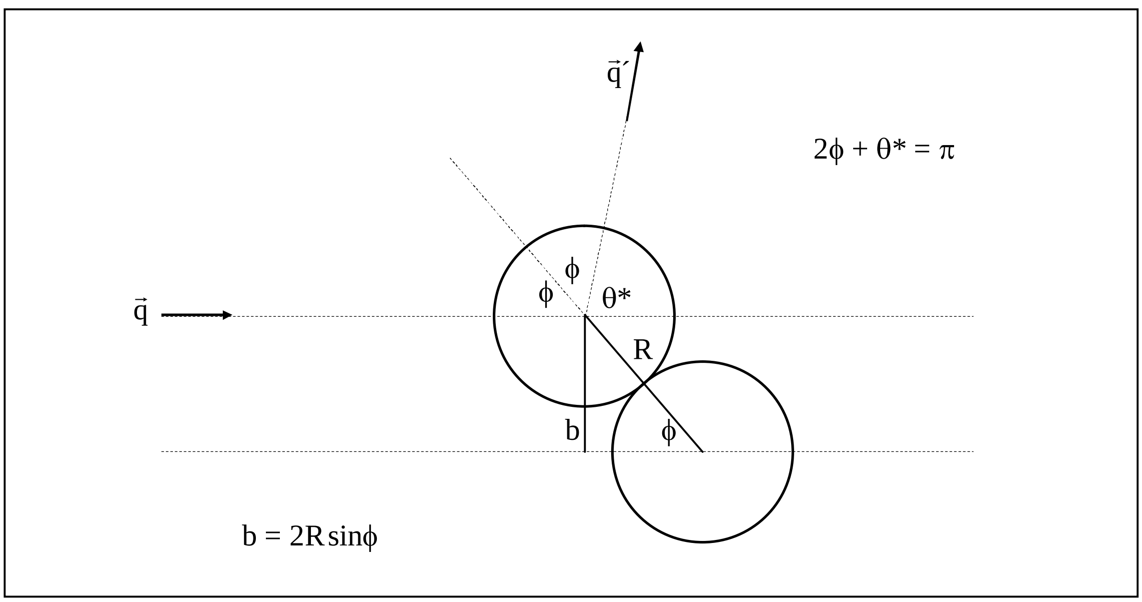
MeĽu kuglama ne djeluju nikakve sile osim u trenutku sudara, kada djeluje beskonaļna odbojna kontaktna sila koja osigurava da je minimalna udaljenost centara kugli 2R. Potencijalna energija takve sile je:

$$U(r) = \begin{cases} 0\,, \text{ za } r > 2R \\ \infty\,, \text{ za } r < 2R \end{cases}\,, \text{ gdje } r = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|. \tag{4.66}$$

Lako je provjeriti prema (4.16) da je za ovakav potencijal putanja pravac (precizno, do trenutka sudara pravac duġ kojega je impuls ļestice $\vec{q}$ = const., a poslije sudara, drugi pravac duġ kojega je impuls ļestice $\vec{q}\,'$ = const.) ļija je jednadġba u polarnim koordinatama:

$$r\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{l}{\sqrt{2\varepsilon E}}\,.$$

U sudaru idealnih krutih tijela vaġi zakon refleksije ï odbojni kut ϕ jednak je upadnom kutu ϕ. Trenutak sudara kugli u sustavu centra mase prikazan je na Slici 26.



Slika 26.

Veza parametra sudara i kuta rasprġenja je: $b = 2R\sin\frac{´ - d^*}{2} = 2R\cos\frac{d^*}{2}$. Prema (4.63) diferencijalni efikasni presjek rasprġenja u sustavu centra mase je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = R^2 = \text{const.}\ , \tag{4.67}$$

pa je totalni efikasni presjek raspršenja:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega^*} d\Omega^* = R^2 \int_0^{\pi} 2\pi \sin\theta^* d\theta^* = 4\pi R^2 . \tag{4.68}$$

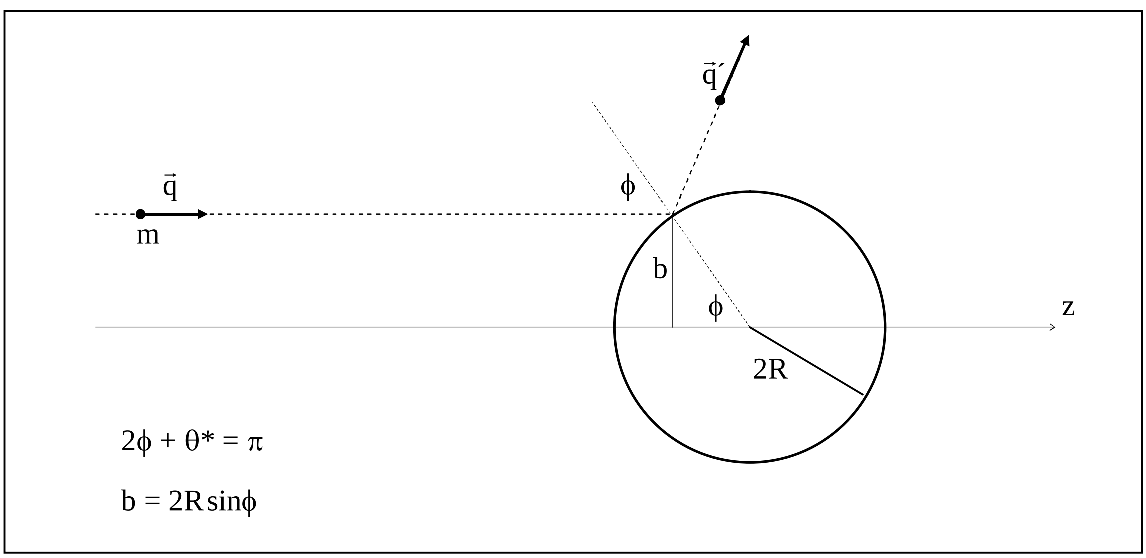
Kako se radi o raspršenju identičnih čestica $m_1 = m_2$, u laboratorijskom sustavu je $\theta = \frac{\theta^*}{2}$, što znači $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, i prema (4.65), diferencijalni efikasni presjek raspršenja je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4R^2 \cos\theta , \tag{4.69}$$

i naravno, opet je totalni efikasni presjek raspršenja:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin\theta \cos\theta d\theta = 4\pi R^2 . \tag{4.70}$$

Totalni efikasni presjek raspršenja je površina poprečnog presjeka centra raspršenja (mete) – u ovom slučaju to je površina kružnice radijusa 2R (da bi došlo do raspršenja centri kugli moraju biti na udaljenosti 2R). Ovo je očigledno ako umjesto elastičnog raspršenje krutih kugli mase m i radijusa R, promatramo ekvivalentno elastično raspršenje čestica mase m (projektila) na krutoj kugli iste mase m, ali radijusa 2R (meti), kao na Slici 27.



Slika 27.

Broj i karakter sudara ostaje nepromjenjen, jer čestica – projektil doživi raspršenje samo ako se nađe na rastojanju 2R od centra krute kugle, pa je potencijal U(r) opet (4.66).

Iz veze parametra sudara i kuta raspršenja $b = 2R\cos\frac{\theta^*}{2}$ je očigledno da su i ovom slučaju diferencijalni i ukupni efikasni presjeci raspršenja (4.67) i (4.68),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = R^2 = \text{const.} \quad \text{i} \quad \sigma = 4\pi R^2.$$

Ukupni efikasni presjek raspršenja σ jednak je površini poprečnog presjeka kugle (mete).

4.8 Rutherfordovo raspršenje

Prva primjena eksperimenata raspršenja u fizici dovela je do otkrića nuklearnog modela atoma, koji se naziva i Rutherfordov model atoma. U seriji eksperimenata, shematski prikazanih na Slici 25., Rutherford, Geiger i Marsden 1910-1911. bombardirali su α-česticama (α-čestica je nukleus atoma helija $^{4}He_2$) tanke listiće zlata $^{197}Au_{79}$ i mjerili diferencijalni udarni presjek raspršenja $d\sigma(\theta)$. Rutherford je 1911. pokazao da se upravo takvi rezultati eksperimenta očekuju ako je atom vezano stanje masivne pozitivno nabijene jezgre radijusa 10^{-15}–10^{-14} m i elektronskog oblaka radijusa 10^{-10} m oko jezgre. Danas znamo da se jezgre atoma sastoje od nukleona – protona i neutrona, koji su i sami vezana stanja kvarkova i gluona.

Osnova Rutherfordove analize je pretpostavka da se α-čestice raspršuju u odbojnom Coulombovom potencijalu jezgre atoma $U(r) = \frac{A}{r}$, gdje je $A = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} > 0$. Naboji α-čestica i jezgri atoma zlata su $Q_1 = 2e$ i $Q_2 = 79e$. Putanja u slučaju odbojne električne sile je hiperbola, a polukut ϕ među asimptotama (4.61) je:

$$\phi = \int_{r_p}^{\infty} \frac{b\,dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\varepsilon A}{q^2 r}}}, \tag{4.71}$$

gdje je:

$$E = \frac{q^2}{2\varepsilon} = \frac{A}{r_p} + \frac{l^2}{2\varepsilon r_p^2} = \frac{A}{r_p} + \frac{b^2 q^2}{2\varepsilon r_p^2}. \tag{4.72}$$

Lako je provjeriti da integral (4.71) daje: $\phi = \operatorname{arctg}\frac{bq^2}{\varepsilon A}$, tj. $\operatorname{tg}\phi = \frac{bq^2}{\varepsilon A}$, pa je $b^2 = \frac{A^2\varepsilon^2}{q^4}\operatorname{tg}^2\phi$, te je veza parametra sudara i kuta raspršenja:

$$b^2 = \frac{A^2\varepsilon^2}{q^4}\,\mathrm{ctg}^2\frac{\theta^*}{2}. \tag{4.73}$$

Uvrġtavanjem u (4.63) dobija se Rutherfordova formula za diferencijalni udarni presjek za raspršenje ļestica koje meĽudjeluju elektriļnim interakcijama:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \left(\frac{A}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta^*}{2}}, \tag{4.74}$$

koja je toļna ļak i u kvantnoj mehanici. Kako diferencijalni udarni presjek zavisi samo od A^2, formule (4.73) i (4.74) vaģe i za privlaļne i za odbojne elektriļne sile.

Diferencijalni udarni presjek raspršenja divergira $\frac{d\sigma}{d\Omega^*} \to \infty$ kad $\theta^* \to 0$, ġto je fizikalno besmisleno, jer znaļi da je frakcija ļestica koje se raspršuju pod kutem $\theta^* = 0$ beskonaļna. Prema (4.73) problematiļno divergentno ponaġanje nastaje za velike vrijednosti parametra sudara $b \to \infty$ koje rezultiraju vrlo malim kutom rasrġenja $\theta^* \to 0$. Ukupni udarni presjek raspġenja takoĽe divergira:

$$\sigma = 2\pi\int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega^*}\sin\theta^* d\theta^* = -2\pi\left(\frac{A}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{\theta^*}{2}}\Bigg|_0^{\pi} \to \infty, \tag{4.75}$$

kad $\theta^* \to 0$, tj. kad $b \to \infty$. Obje divergencije su matematiļke posljedice ļinjenice da je Coulombov potencijal «dugog (beskonaļnog) dosega», tj. da opada sa udaljenoġļu kao r^{-1} ï *bez obzira koliko je projektil udaljen od mete sila na projektil nije zanemariva* i projektil «osjeĺa» beskonaļni popreļni presjek mete σ.

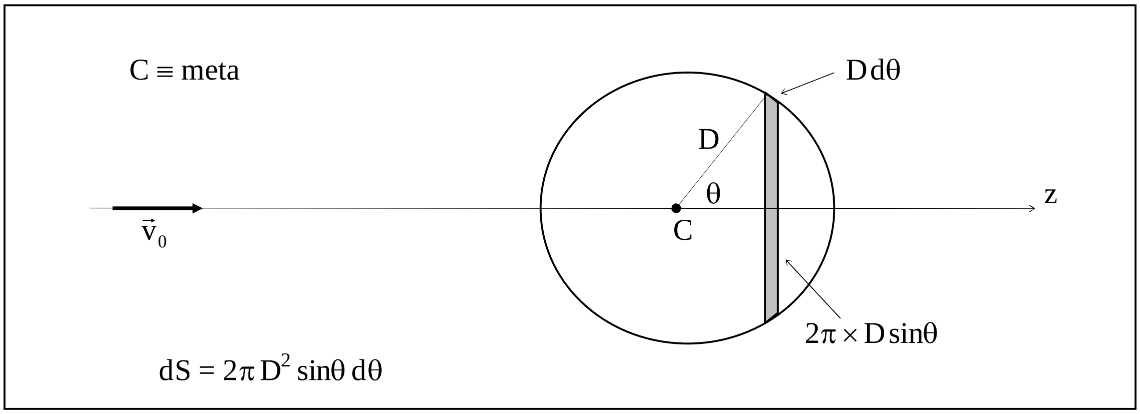
U stvarnosti ovaj problem ne postoji (ne postoji Coulombov potencijal za proizvoljno veliko r), jer veĺ za parametre sudara veĺe od 10^{-10} m, α-ļestice su van atoma zlata i zbog neutralnosti atoma ne Ăosjeĺajuñ nikakvu odbojnu elektriļnu silu. To znaļi da u problemu raspršenja α-ļestica na jezgrama atoma zlata mora postojati gornja granica parametra sudara $b_{max} \sim 10^{-10}$ m koja odreĽuje minimalnu vrijednost kuta raspršenja $\theta^*_{min} > 0$, ļime bivaju eliminirane divergencije udarnog presjeka raspršenja.

Kako je $m_1 = 4$, a $m_2 = 197$, te $\frac{m_1}{m_2} = 0{,}02$, formula (4.74), s pogreġkom od nekoliko postotaka, vaģi i u laboratorijskom sustavu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{A}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{4.76}$$

Npr., za $\theta^* = 30^o$, prema (4.55) je $\theta = 29.43^o$, pa zamjena $\theta \approx \theta^*$ unosi pogreġku od 1.9%.

Eksperimentalna provjera zahtijeva brojanje α-čestica koje se u jedinici vremena raspršе pod kutem θ u detektor aktivne površine $\Delta S_{ak.}$ na udaljenosti D od listića zlata (mete). Projektili koji poslije prolaska kroz metu imaju kuteve raspršenja u intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$ presjecaju zamišljenu sferu radijusa D sa centrom u meti na kojoj se nalazi detektor unutar sfernog pojasa površine $dS = 2\pi D^2 \sin\theta \, d\theta$, kao na Slici 28.



Slika 28.

Broj α-čestica dn koje se u jedinici vremena raspršе u interval kuteva $(\theta, \theta + d\theta)$ prema definiciji diferencijalnog udarnog presjeka (4.62) je $dn = n_0 \, d\sigma = n_0 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\omega = n_0 \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta \, d\theta$.

Od svih Δn takvih raspršenih α-čestica u detektor će u jedinici vremena stići samo:

$$\Delta N = \Delta n \frac{\Delta S_{ak.}}{\Delta S} = \Delta n \frac{\Delta S_{ak.}}{2\pi D^2 \sin\theta \Delta\theta} = n_0 \frac{\Delta S_{ak.}}{D^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} = n_0 \frac{\Delta S_{ak.}}{D^2} \left(\frac{A}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} .$$

Na kraju treba još napraviti korekciju za mogućnost raspršenja na bilo kojoj jezgri atoma zlata duž putanje α-čestice kroz foliju debljine d – gornji rezultat treba pomnožiti sa cd gdje je c broj atoma zlata po jedinici volumena. Broj α-čestica koje se u jedinici vremena raspršе pod kutem θ u detektor je onda:

$$\Delta N = n_0 \left(c\, d \frac{\Delta S_{ak.}}{D^2} \right) \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z e^2}{E_k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} , \qquad (4.77)$$

gdje je Z naboj nukleusa (za zlato Z = 79), a E_k je početna kinetička energija α-čestica.

Eksperimentalna provjera Rutherfordove formule svodi se na provjeru (4.77) kao funkcije energije projektila E_k, kuta raspršenja θ i naboja jezgre Ze. Slaganje eksperimentalnih rezultata i teorijskog proračuna je izvrsno.

Ilustrirajmo na jednostavnom primjeru kako se Rutherfordova formula (4.74) ili (4.76) može iskoristiti za određivanje radijusa jezgre.

Primjer 2. Rutherfordovo raspršenje u pozadinsku hemisferu.

U eksperimentu raspršenja α-čestica na vrlo tankoj zlatnoj foliji debljine $d = 4 \times 10^{-7}$ m izmjereno je da se jedna u 61700 α-čestica raspršuje u pozadinsku hemisferu (backward scattering) sa kutom raspršenja $\theta \geq \frac{\pi}{2}$. Treba procjeniti dimenzije jezgre zlata na osnovu ovog rezultata.

Vrlo neočekivani rezultat prvih eksperimenata raspršenja α-čestica bila je upravo pojava rijetkih α-čestica koje se odbijaju unazad, tj. u laboratorijskom sustavu imaju velike kuteve raspršenja, veće od $\frac{\pi}{2}$. Za centralne sile takvo raspršenje unazad moguće je samo ako je meta masivnija od projektila $m_1 < m_2$. Zato je Rutherford odmah zaključio da atom mora imati nehomogenu raspodjelu mase – unutar atoma mora postojati centar raspršenja vrlo, malih dimenzija i velike mase, tj. nukleus atoma zlata (čestica mase m_2).

Broj čestica mase m_1 koje u jedinici vremena jedan nukleus mase m_2 raspršì pod kutom većim od θ, jednak je broju projektila u jedinici vremena koji imaju parametre sudara manji od $b(\theta)$, tj. $\pi b^2 n_0$, gdje je n_0 intenzitet početnog snopa α-čestica. Prema definiciji (4.62) ukupni udarni presjek za raspršenje pod kutem većim od θ je: $\sigma_B(\theta) = \pi b^2(\theta)$. Ukupan broj raspršenih projektila u sekundi je onda $\pi b^2 n_0$, puta broj jezgara u listiću zlata na putanji projektila (broj atoma zlata koji sudjeluju u raspršenju) $cS_{sn.}d$, gdje je c broj atoma zlata u jedinici volumena, $S_{sn.}$ je površina poprečnog presjeka početnog snopa α-čestica, a d debljina listića zlata. $S_{sn.}d$ je volumen listića zlata kroz koji prolazi snop projektila. Ukupan broj projektila raspršenih pod kutom većim od θ u jednoj sekundi je $n = \pi c S_{sn.} n_0 d b^2(\theta)$.

Podijelimo li brojem α-čestica u sekundi u početnom snopu $S_{sn.}n_0$, frakcija f projektila raspršenih pod kutem većim od θ je

$$f = \pi c d b^2(\theta) = \pi c d \frac{A^2 \varepsilon^2}{q^4} \mathrm{ctg}^2 \frac{\theta}{2} = c d \sigma_B(\theta). \qquad (4.78)$$

Kako je broj atoma zlata u jedinici volumena:

$$c = \frac{\rho_{Au} N_A}{M} = \frac{\left(19{,}3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}\right)\left(6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{atoma\,mol^{-1}}\right)}{197\,\mathrm{g\,mol^{-1}}} = 5{,}9 \times 10^{28}\,\frac{\mathrm{atoma}}{\mathrm{m^3}},$$

ukupni udarni presjek za pozadinsko raspršenje je:

$$\sigma_B = \sigma_B\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f}{cd} = 6{,}9 \times 10^{-28}\,\mathrm{m^2} = 6{,}9\ \mathrm{barna}.$$

Pretpostavimo li u prvoj aproksimaciji, po analogiji sa sudarima krutih kugli, da je ukupni udarni presjek jednak površini poprečnog presjeka jezgre $\sigma_B = \pi R^2$ (sigurno je da su dimenzije jezgre manje jer i α-čestice imaju dimenzije), za radijus jezgre zlata dobija se:

$$R = 1{,}5 \times 10^{-14}\,\mathrm{m} = 15\ \mathrm{fm},$$

ġto je ļ etri reda veliļ ine manje od radijusa atoma.

Moderna mjerenja za efektivni radijus atoma zlata daju R = 7 fm, u skladu sa formulom iz nuklearne fizike: $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$, gdje je A atomska masa, a $R_0 = 1{,}2 \pm 0{,}2$ fm.

5. Gibanje krutog tijela

Ako se ne mogu zanemariti dimenzije materijalnih objekata koji se gibaju, govorimo o gibanju tijela, bilo krutih ili elastičnih. Idealno kruto tijelo je u klasičnoj mehanici dobra aproksimacija za realna tijela čije su deformacije pod utjecajem sila vrlo malene u odnosu na njihove dimenzije. Po definiciji, udaljenost bilo koje dvije čestice „i" i „j" krutog tijela je nepromjenljiva, tj. za kruto tijelo tijekom gibanja važe idealne holonomne veze:

$$\left|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j(t)\right| = c_{ij} = \text{const.}\,, \qquad \forall\, i, j, t\,. \tag{5.1}$$

Položaj krutog tijela potpuno je određen položajem tri njegove nekolinearne (koje nisu na istom pravcu) točke. Položaj prve točke određen je sa 3 koordinate, recimo (x_1,y_1,z_1), tj. ona ima 3 stupnja slobode gibanja. Gibanje druge točke ograničeno je vezom:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c_{21}{}^2 = 0$$

na površinu sfere radijusa c_{12} sa centrom u prvoj točci, pa druga čestica ima samo dva stupnja slobode. Gibanje treće (nekolinearne) točke krutog tijela ograničeno je sa dvije veze:

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - c_{31}{}^2 = 0,$$

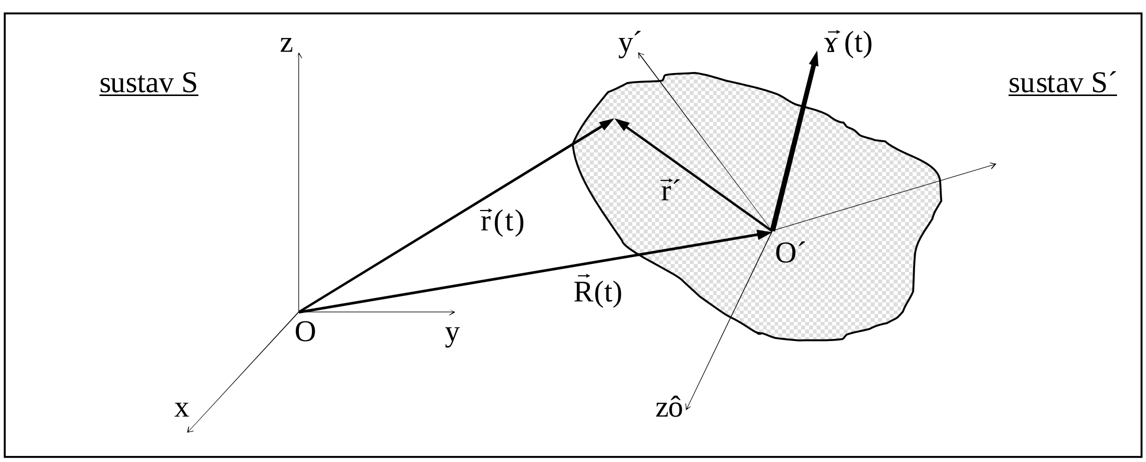
i

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - c_{32}{}^2 = 0,$$

te ona ima samo jedan stupanj slobode gibanja. Bilo koja preostala čestica „i" krutog tijela nema ni jedan stupanj slobode, jer njene koordinate zadovoljavaju tri veze:

$$\left|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_1(t)\right| = c_{i1}\,, \quad \left|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_2(t)\right| = c_{i2}\,, \quad \left|\vec{r}_i(t)-\vec{r}_3(t)\right| = c_{i3}\,.$$

Kruto tijelo ima n = 6 stupnjeva slobode gibanja. No, ako je gibanje krutog tijela ograničeno nekim dodatnim vezama koje nisu oblika (5.1), na primjer klizanje ili kotrljanje po nekoj podlozi, broj stupnjeva slobode bit će manji.



Slika 29.

Koordinatni sustav S´, čije su osi x´y´z´, neka je čvrsto vezan za kruto tijelo tako da se giba zajedno sa krutim tijelom. Ishodište O´ sustava S´, koje se naziva pol krutog tijela, je u proizvoljnoj točci tijela. Položaj krutog tijela određen je onda položajem koordinatnog sustava S´ u odnosu na neki inercijalni referentni sustav S, kao na Slici 29.

Zamislimo da je jedna točka krutog tijela nepokretna. Odaberemo li tu fiksnu točku za ishodište oba sustava, bilo koji pomak krutog tijela, tj. koordinatnog sustava O´x´y´z´ u odnosu na koordinatni sustav Oxyz, je neka rotacija oko osi koja prolazi kroz zajedničko ishodište. U odjeljku **1.5** smo vidjeli da se svaka takva rotacija može reprezentirati nekom ortogonalnom matricom koja je određena sa 3 linearno nezavisna parametra w_i, koji su tri komponente trenutne kutne brzine rotacije $\vec{\omega}(t)$ sustava S´ u odnosu na sustav S – relacija (1.50). Znači, tri generalizirane koordinate su potrebne za opis rotacije krutog tijela. Ako sad dopustimo još i proizvoljno gibanje pola krutog tijela (ishodišta O´), njegov položaj u odnosu na sustav S određen je s tri koordinate, komponente vektora $\vec{R}(t)$, koje određuju translatorno gibanje krutog tijela. Proizvoljni pomak krutog tijela ekvivalentan je translaciji pola za vektor $\vec{R}(t)$, plus nekoj rotaciji oko osi koja prolazi kroz pol. Od 6 stupnjeva slobode gibanja krutog tijela 3 otpadaju na translaciju, a 3 na rotaciju.

Prema Slici 29. radijus vektor bilo koje čestice krutog tijela je:

$$\vec{r}_i(t)=\vec{R}(t)+\vec{r}_i\,', \tag{5.2}$$

gdje je $\vec{r}_i\,'$ radijus vektor čestice u neinercijalnom sustavu S´. Vektor $\vec{r}_i\,'$ ne zavisi od vremena jer u sustavu S´ kruto tijelo miruje, pa je $D'\vec{r}_i\,'=0$. Specijalno, za centar mase krutog tijela vaği:

$$\vec{r}_c=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i, \qquad M=\sum_i m_i, \ \text{a u sustavu S´:} \quad \vec{r}_c\,'=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i\,'. \tag{5.3}$$

U slučaju kontinuirane distribucije mase, sumaciju po česticama treba zamjeniti integralom po volumenu Ω krutog tijela:

$$\sum_i m_i \ \to \ \int_\Omega dm=\int_\Omega d^3r'\rho\left(\vec{r}\,'\right). \tag{5.4}$$

Translatorno i rotaciono gibanje krutog tijela određeno je njegovim osnovnim dinamičkim veličinama. Nađimo prvo relacije koje povezuju te osnovne dinamičke veličina krutog tijela u dva sustava S i S':

$$\vec{P}=\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i=\sum_i m_i\left(\dot{\vec{r}}_i\,'+\dot{\vec{R}}\right)=M\dot{\vec{r}}_c\,'+M\dot{\vec{R}}, \tag{5.5}$$

$$\vec{L}=\sum_i m_i\vec{r}_i\times D\vec{r}_i=\sum_i m_i\left(\vec{r}_i\,'+\vec{R}\right)\times\left(D\vec{r}_i\,'+D\vec{R}\right)=M\vec{R}\times D\vec{R}+M\vec{r}_c\,'\times D\vec{R}+\vec{R}\times D\left(M\vec{r}_c\,'\right)+$$

$$+\sum_i m_i\vec{r}_i\,'\times D\vec{r}_i\,'=M\vec{R}\times D\vec{R}+M\vec{r}_c\,'\times D\vec{R}+M\vec{R}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_c\,'\right)+\sum_i m_i\vec{r}_i\,'\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\,'\right),$$

jer je zbog $D'\vec{r}_i' = 0$ prema Coriolisovom teoremu (1.52), vremenska promjena vektora $\vec{r}_i'$ uslijed rotacije: $D\vec{r}_i' = \vec{\omega}\times\vec{r}_i'$. Ukupni angularni moment krutog tijela je onda:

$$L = M\vec{R}\times D\vec{R} + M\vec{r}_c'\times D\vec{R} + M\vec{R}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_c'\right) + \vec{l}_{rot}, \tag{5.6}$$

gdje samo zadnji član ovisi o dimenzijama i rasporedu mase krutog tijela (prva tri člana su kao momenti impulsa jedne čestice):

$$\vec{l}_{rot} = \sum_i m_i \vec{r}_i'\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i'\right). \tag{5.7}$$

Za ukupni moment sila na kruto tijelo je slično:

$$\vec{M} = \sum_i m_i\vec{r}_i\times D^2\vec{r}_i = \sum_i m_i\left(\vec{r}_i'\times\vec{R}\right)\times\left(D^2\vec{r}_i' + D^2\vec{R}\right) = M\vec{R}\times D^2\vec{R} + M\vec{r}_c'\times D^2\vec{R} + M\vec{R}\times D^2\vec{r}_c' +$$
$$+\sum_i m_i\vec{r}_i'\times D^2\vec{r}_i' = M\vec{R}\times D^2\vec{R} + M\vec{r}_c'\times D^2\vec{R} + M\vec{R}\times D^2\vec{r}_c' + \vec{M}_{rot}.$$

Kako je prema (1.52) i (1.53): $D\vec{r}_i' = D'\vec{r}_i' + \vec{\omega}\times\vec{r}_i' = \vec{\omega}\times\vec{r}_i'$, $D\vec{\omega} = D'\vec{\omega}$, vrijedi:

$$D^2\vec{r}_i' = D\left(D\vec{r}_i'\right) = D\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i'\right) = \left(D\vec{\omega}\right)\times\vec{r}_i' + \vec{\omega}\times D\vec{r}_i' = \left(D'\vec{\omega}\right)\times\vec{r}_i' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i'\right),$$

pa je momemt ukupne sile na kruto tijelo

$$\vec{M} = M\vec{R}\times D^2\vec{R} + M\vec{r}_c'\times D^2\vec{R} + M\vec{R}\times D^2\vec{r}_c' + \vec{M}_{rot}, \tag{5.8}$$

$$\vec{M}_{rot} = \sum_i m_i\vec{r}_i'\times\left[\left(D'\vec{\omega}\right)\times\vec{r}_i' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i'\right)\right], \tag{5.9}$$

gdje opet samo zadnji član u (5.8) zavisi od rasporeda mase krutog tijela.

Kinetička energija krutog tijela je: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(D\vec{r}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(D\vec{r}_i' + D\vec{R}\right)^2$, što daje:

$$T = \frac{M}{2}\left(D\vec{R}\right)^2 + M\left(D\vec{R}\right)\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_c'\right) + T_{rot}, \tag{5.10}$$

gdje je:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i'\right)^2. \tag{5.11}$$

Zaključujemo da se: <u>sve dinamičke veličine</u> $\vec{P}, \vec{L}, \vec{M}$ i T <u>krutog tijela prirodno se razlažu na zbroj članova koji opisuju gibanje krutog tijela kao jedne čestice mase M jednake ukupnoj masi krutog tijela i članova koji opisuju rotaciju krutog tijela i zavise od distribucije mase tijela.</u>

U velikom broju problema gornje formule (5.5 – 11) mogu se još pojednostaviti. U praksi su najčešći problemi gibanja krutog tijela koje rotira oko neke osi koja prolazi kroz centar mase (na primjer, kotač automobila), kada možemo za pol odabrati centar mase, tj. uzeti $\vec{r}_c' = 0$, ili čija je jedna točka nepomična (njihalo, zvrk), kada možemo odabrati $\vec{R} = 0$.

U prvom slučaju dinamičke veličine postaju zbroj dva člana – jednog za translatorno gibanje krutog tijela kao čestice mase M i drugog za rotaciono gibanje oko osi kroz centar mase ($\vec{R} \equiv \vec{r}_c$):

$$\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_c\,, \quad \vec{L} = M\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \vec{l}_{rot}\,, \quad \vec{M} = M\vec{r}_c \times \ddot{\vec{r}}_c + \vec{M}_{rot}\,, \quad T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_c^{\,2} + T_{rot}. \qquad (5.12)$$

u skladu sa (1.38) i (1.39).

U slučaju gibanja krutog tijela oko jedne fiksne točke preostaju samo rotacioni članovi:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_c'\,, \quad \vec{L} = \vec{l}_{rot}\,, \quad \vec{M} = \vec{M}_{rot}\,, \quad T = T_{rot}. \qquad (5.13)$$

Osnovna ideja mehanike krutog tijela je da se članovi koji opisuju rotaciju tijela (5.13) izraze što jednostavnije – to se postiže definiranjem tenzora inercije (tenzora tromosti) krutog tijela.

5.1 Tenzor inercije (tromosti) krutog tijela

Pri translatornom gibanju inercija (tromost) tijela mjeri se masom. Za rotaciono gibanje ulogu mase preuzima tenzor inercije tijela. Pri razmatranju rotacije krutog tijela možemo zanemariti translatorno gibanje tijela kao cjeline. Zato pretpostavimo da je jedna točka krutog tijela nepokretna i odaberimo je za pol, tako da je: $\vec{R} = 0$.

Definicija: **Tenzor inercije I_{ab} krutog tijela**

Simetrični tenzor drugog reda čije su komponente:

$$I_{ab} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i'^{\,2} \delta_{ab} - r_{i_a}' r_{i_b}' \right), \quad (a,b = 1,2,3), \qquad (5.14)$$

naziva se tenzor inercije krutog tijela. U slučaju kontinuirane raspodjele mase je:

$$I_{ab} = \int_V d^3r' \rho\left(\vec{r}'\right)\left(\vec{r}'^{\,2}\delta_{ab} - r_a' r_b'\right). \qquad (5.15)$$

Dijagonalni elementi tenzora (3×3 matrice) nazivaju se momenti inercije, a nedijagonalni su produkti inercije.

<u>Tenzor inercije zavisi samo od raspodjele mase krutog tijela u odnosu na pol (ishodište koordinatnog sustava S' vezanog za tijelo), ali ne zavisi od gibanja krutog tijela.</u>

Na primjer u Kartezijevom sustavu je:

$$I_{xx} = \sum_i m_i \left(y_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad \text{ili:} \quad I_{xy} = -\sum_i m_i \, x_i' y_i' .$$

Motivacija definicije (5.14) postaje očigledna napišemo li angularni moment rotacije krutog tijela (5.7) pomoću komponenti u sustavu S´, čiji jedinični vektori su $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$:

$$\vec{l}_{rot} = \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i'^2 \vec{\omega} - \left(\vec{r}_i' \vec{\omega} \right) \vec{r}_i' \right] = \sum_{a,b=1}^{3} \hat{e}_a' \sum_i m_i \left(\vec{r}_i'^2 \delta_{ab} - r_{i_a}' r_{i_b}' \right) \omega_b$$

što odmah daje:

$$\vec{l}_{rot} = \sum_{a,b=1}^{3} \hat{e}_a' I_{ab} \omega_b = I \vec{\omega} \, . \tag{5.16}$$

Za rotacioni dio ukupnog momenta sila (5.9) je:

$$\vec{M}_{rot} = D \vec{l}_{rot} = D' \vec{l}_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{l}_{rot}$$

tj.:

$$\vec{M}_{rot} = I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{l}_{rot} , \tag{5.17}$$

Kinetička energija rotacije krutog tijela (5.11) je:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\vec{r}_i'^2 \vec{\omega}^2 - \left(\vec{r}_i' \vec{\omega} \right)^2 \right] ,$$

ili jednostavno:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} \, , \tag{5.18}$$

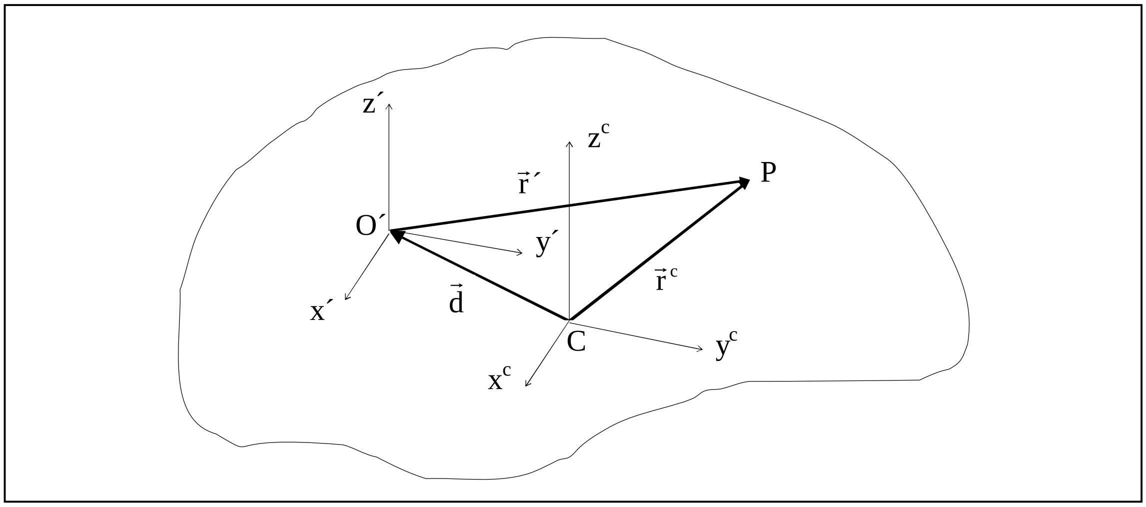
pa vrijedi:

Rotacione veličine krutog tijela

Neka je $\vec{\omega}$ trenutna kutna brzina rotacije krutog tijela u odnosu na inercijalni sustav S, a I njegov tenzor inercije. Rotacioni dio angularnog momenta, rotacioni dio ukupnog momenta sila i kinetička energija rotacije krutog tijela izražene u ubrzanom sustavu S´ vezanom za kruto tijelo su:

$$\vec{l}_{rot} = I \vec{\omega} \, , \qquad \vec{M}_{rot} = I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{l}_{rot} \, , \qquad T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} \, . \tag{5.19}$$

Tenzor inercije ovisi o izboru sustava vezanog za kruto tijelo ï pola, tj. ishodiġta O´, i pravaca koordinatnih osi x´y´z´. Steinerov teorem, omoguĺuje raļunanje tenzora inercije I u odnosu na proizvoljni sustav S´ sa polom u O´, ako je poznat tenzor inercije I^c u sustavu ļije su koordinatne osi paralelne osima sustava S´ a ishodiġte mu je centar mase C krutog tijela, kao na Slici 30.



Slika 30.

Za proizvoljnu toļku P krutog tijela je: $\vec{r}\,' = \vec{r}^{\,c} - \vec{d}$, gdje je $\vec{d}$ = CO' udaljenost ishodiġta dva sustava. Kako je:

$$\int_{\Omega} d^3r^c\, \rho(\vec{r}^{\,c}) = M, \quad \int_{\Omega} d^3r^c\, \vec{r}^{\,c} \rho(\vec{r}^{\,c}) = 0\,,$$

dobija se:

$$I_{ab} = \int_{\Omega} d^3r'\rho(\vec{r}\,')\left[\vec{r}\,'^2 \delta_{ab} - r_a' r_b'\right] = \int_{\Omega} d^3r^c \rho(\vec{r}^{\,c})\left[(\vec{r}^{\,c} - \vec{d})^2 \delta_{ab} - (r^c{}_a - d_a)(r^c{}_b - d_b)\right] =$$

$$= \int_{\Omega} d^3r^c \rho(\vec{r}^{\,c})\left[\left(\vec{r}^{\,c\,2} + \vec{d}^{\,2}\right)\delta_{ab} - \left(r^c{}_a r^c{}_b + d_a d_b\right)\right],$$

pa vrijedi:

Steinerov teorem

Tenzori inercije krutog tijela mase M u odnosu na sustav ļije ishodiġte je na udaljenosti $\vec{d}$ od centra mase je:

$$I_{ab} = I^c{}_{ab} + M\left(\vec{d}^{\,2}\delta_{ab} - d_a d_b\right), \tag{5.20}$$

gdje je I^c tenzor inercije u odnosu na centar mase krutog tijela.

Razlika I_{ab} i I^{c}_{ab} je tenzor inercije jedne čestice mase M čija je udaljenost od centra mase $\vec{d}$. Ako znamo tenzor inercije krutog tijela u odnosu na centar mase, primjenjujući Steinerov teorem, lako je naći tenzor inercije u odnosu na sustav sa paralelnim koordinatnim osima i ishodištem u bilo kojoj točci. U općem slučaju ako koordinatne osi dva sustava nisu paralelne vrijedi općenitije:

$$I_{ab} = \sum_{c,d=1}^{3} R_{ac} R_{bd} \left[I^{c}_{cd} + M\left(\vec{d}^{2} \delta_{cd} - d_c d_d\right)\right],$$

gdje je $R_{ij} = \cos\angle\left(\hat{e}^{c}_{i}, \hat{e}'_{j}\right)$ matrica rotacije sustava S^{c} u sustav sa osima paralelnim sa S'.

Tenzor inercije I_{ab} je linearan, pa prema tome i aditivan, u odnosu na masu čestica (gustoću) tijela, što znači da je tenzor inercije sustava dva tijela zbroj tenzora inercije svakog pojedinog.

Primjer 1. Tenzor inercije homogenog šupljeg valjka.

Neka je visina valjka h, a unutarnji i spoljni radijusi r i R. Volumen valjka je: $\pi(R^2 - r^2)h$, te je gustoća $\rho = \frac{M}{\pi\left(R^2 - r^2\right)h} = \text{const.}$ U odnosu na centar mase radijus vektor bilo koje točke valjka u cilindričnim koordinatama je: $\vec{r} = \rho\hat{e}_{\rho} + z\hat{k}$, gdje: $\rho \in [r, R]$, $z \in \left[-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}\right]$. Kako je: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ i $d^3 r = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, prema definiciji (5.15), svi produkti inercije šupljeg valjka su nula. Momenti inercije su: $I_{11} \equiv I_{xx} = I_{22} \equiv I_{yy} = \frac{M}{12}\left(3R^2 + 3r^2 + h^2\right)$, te $I_{33} \equiv I_{zz} = \frac{M}{2}\left(R^2 + r^2\right)$. Tenzor inercije šupljeg valjka u odnosu na centar mase je:

$$I^{c} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} 3R^2 + 3r^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + 3r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 + 6r^2 \end{pmatrix}. \qquad (5.21)$$

Na primjer, ako cilindar rotira oko svoje osi simetrije (z-osi), kutna brzina rotacije je: $\vec{\omega} = \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pa su angularni moment i rotaciona kinetička energija šupljeg valjka:

$$\vec{l}_{rot} = I^{c}\vec{\omega} = \frac{M}{2}\left(R^2 + r^2\right)\omega\hat{k}, \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{T} I^{c}\vec{\omega} = \frac{M}{4}\left(R^2 + r^2\right)\omega^2.$$

Ako želimo tenzor inercije I u odnosu na točku O′ na unutarnjem rubu baze šupljeg valjka, ishodište treba translirati za vektor: $\vec{d} = r\hat{i} + \frac{h}{2}\hat{k}$. Kako je $d^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$ i $d_1 d_3 = \frac{rh}{2}$, prema (5.20) tenzor inercije u odnosu na pol O′ je:

$$I = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} 3R^2 + 3r^2 + 3h^2 & 0 & -6rh \\ 0 & 3R^2 + 15r^2 + 3h^2 & 0 \\ -6rh & 0 & 6R^2 + 18r^2 \end{pmatrix}. \qquad (5.22)$$

Ako šupnji valjak rotira oko osi paralelne z-osi kroz O′, kutna brzina rotacije je opet: $\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pa su angularni moment i rotaciona kinetička energija valjka:

$$\vec{l}_{rot} = I\vec{\omega} = -\frac{M}{2} rh\,\omega\,\hat{e}_x + \frac{M}{2}\left(R^2 + 3r^2\right)\omega\,\hat{e}_z, \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I\,\vec{\omega} = \frac{M}{4}\left(R^2 + 2r^2\right)\omega^2 .$$

Ako bi šupnji valjak rotirao oko x′-osi kroz O′, kutna brzina rotacije bi bila: $\vec{\omega} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je:

$$\vec{l}_{rot} = I\vec{\omega} = \frac{M}{4}\left(R^2 + r^2 + h^2\right)\dot{\theta}\,\hat{e}_x - \frac{M}{2} rh\,\dot{\theta}\,\hat{e}_z, \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T I\,\vec{\omega} = \frac{M}{8}\left(R^2 + r^2 + h^2\right)\dot{\theta}^2 .$$

<u>Primjer 2.</u> Tenzor inercije dvije identične homogene slepljenje kugle.

Nađimo prvo tenzor inercije homogene kugle radijusa R i mase M u odnosu na centar mase koji je centar kugle. Sferna simetrija kugle znači $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$. U sfernim koordinatama lako se vidi da su svi produkti inercije $I_{ab} = 0$ ($a \neq b$) $\Rightarrow$ tenzor inercije je dijagonalan. Zbog sferne simetrije sva tri momenta inercije su jednaka $I_{aa} \approx \vec{r}^{\,2} - r_a^{\,2} = \frac{2}{3}\vec{r}^{\,2}$, pa je $I_{11} = I_{22} = I_{33} = \Theta_0$, što daje: $3\Theta_0 = 2\int d^3r\,\rho(r)\vec{r}^{\,2} = 8\pi\int_0^R dr\,\rho(r) r^4$. Masa kugle je: $M = 4\pi\int_0^R dr\,\rho(r) r^2$, što za homogenu kuglu znači $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} = \text{const.}$, pa je tenzor inercije homogene kugle u odnosu na centar mase:

$$I^c = \frac{2}{5}MR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.23)$$

Odaberimo za z′-os pravac određen centrima spojenih identičnih kugli koji je os simetrije tijela. Točka kontakta kugli je centar mase sustava.

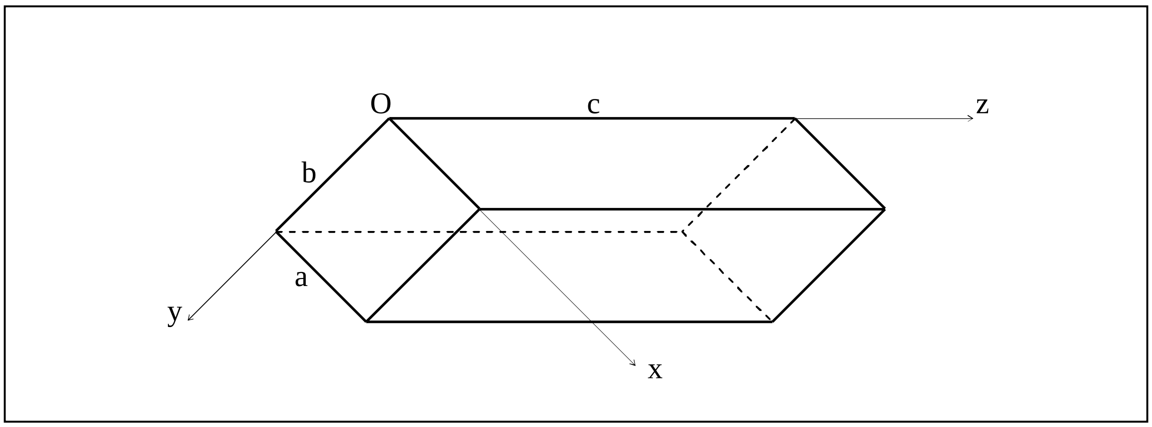
Translacijom koordinatnog sustava u točku kontakta kugli za vektor $\vec{d} = R\,\hat{e}_z$ duž z′-osi prema Sneiderovom teoremu (5.20) za tenzor inercije jedne od kugli je: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_0 + MR^2$ i $\Theta_3 = \Theta_0$, pa zbrajanjem za sustav dvije kugle dobijamo tenzor inercije:

$$I^c = \frac{2M}{5}R^2\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

<u>Primjer 3.</u> Fizikalno njihalo

Fizikalno njihalo je kruto tijelo koje bez trenja može oscilirati oko neke fiksirane osi pod utjecajem težine. Neka je tijelo homogeni paralelopiped strana a,b,c i neka je os rotacije jedan od bridova, recimo c. Treba naći period malih oscilacija paralelopipeda.

Odaberimo os rotacije za z-os, a ishodište sustava vezanog za kvadar u jednom vrhu kao na Slici 31.



Slika 31.

Gustoća tijela je $\rho = \dfrac{M}{abc} = \text{const.}$ Tenzor inercije paralelopipeda u odnosu na centar mase I^c lako se izračuna u Kartezijevim koordinatama koristeći: $d^3r = dx\,dy\,dz$, $\vec r^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$, uz granice integracije: $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$; $-\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}$; $-\frac{c}{2} \le z \le \frac{c}{2}$. Rezultat je:

$$I^c = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Prema Steinerovom teoremu da bi dobili tenzor inercije u odnosu na točku O ishodište treba translirati za vektor: $\vec d = \frac{a}{2}\vec i + \frac{b}{2}\vec j + \frac{c}{2}\vec k$, što daje:

$$
\mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{12}\begin{pmatrix} 4\left(b^2 + c^2\right) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4\left(a^2 + c^2\right) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4\left(a^2 + b^2\right) \end{pmatrix}. \tag{5.26}
$$

Kutna brzina rotacije njihala oko z-osi je $\vec{\text{ỹ}} = \text{ű}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pa je kinetiļka energija rotacije:

$$
\mathrm{T} = \frac{1}{2}\vec{\text{ỹ}}^{\,\mathrm{T}}\,\mathrm{I}\,\vec{\text{ỹ}} = \frac{\mathrm{M}}{6}\left(a^2 + b^2\right)\text{ű}^2 .
$$

Potencijalna energija jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj energiji centra mase:

$$
\mathrm{U} = -\frac{\mathrm{M}}{2} g\sqrt{a^2 + b^2}\cos\text{ű} ,
$$

pa je Lagrangian njihala:

$$
\mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{U} = \frac{\mathrm{M}}{6}\sqrt{a^2 + b^2}\left(\sqrt{a^2 + b^2}\,\text{ű}^2 + 3g\cos\text{ű}\right).
$$

Jednadġba gibanja fizikalnog njihala onda je:

$$
\text{ű} + \frac{3g}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\text{ű} = 0 .
$$

U sluļaju malih oscilacija njihala moġemo zamjeniti $\sin\text{ű} \approx \text{ű}$, pa je gibanje harmoniļko titranje sa periodom:

$$
\mathrm{T} = 2\text{´}\sqrt{\frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{3g}} ,
$$

koji je identiļan periodu matematiļkog njihala ekvivalentne duljine $l = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Tenzor inercije ovisi o izboru koordinatnog sustava vezanog za kruto tijelo. No, u bilo kojem koordinatnom sustavu tenzor inercije I_{ab} krutog tijela je realna, simetriļna 3×3 matrica. Postoji li neki koordinatni sustav u kojem tenzor inercije krutog tijela ima najjednostavniji oblik?

Osnovni teorem linearne algebre tvrdi da se svaka realna, simetriļna 3×3 matrica I_{ab} moġe dijagonalizirati transformacijom sliļnosti (similarity transformation) nekom ortogonalnom 3×3 matricom R (matricom rotacije) u oblik:

$$I_D = R\,I\,R^T = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

<u>Napomena</u>: Teorem važi i općenitije za svaku hermitsku matricu $A = A^{\dagger}$, gdje je $A^{\dagger} = (\tilde{A})^T$, koja se može dijagonalizirati transformacijom sličnosti unitarnom matricom U (za unitarne matrice je $U^{\dagger} = U^{-1}$): $A_D = UAU^{\dagger}$, gdje su elementi na glavnoj dijagonali matrice A_D realne svojstvene vrijednosti hermitske matrice A.

Ortogonalna matrica R je matrica rotacije koordinatnog sustava O´x´y´z´ vezanog za kruto tijelo u sustavu S″ glavnih osi inercije krutog tijela O´x″y″z″ (sa istim ishodištem) u kojem je tenzor inercije krutog tijela dijagonalan I_D. Elementi Y_i na glavnoj dijagonali u (5.27) nazivaju se glavni momenti inercije krutog tijela. U pravilu, pravci glavnih osi inercije krutog tijela su pravci osi simetrije tijela, kao u Primjerima 2. i 3., tj. u izrazima (5.21) i (5.25). Tri jedinična vektora $\{\hat{e}_1'', \hat{e}_2'', \hat{e}_3''\}$ glavnih osi dobijaju se rješavanjem svojstvenog problema matrice I, tj. rješavanjem matrične jednadžbe:

$$I\,\hat{e}_i'' = Y_i\,\hat{e}_i'', \quad 0 \le Y_i \in \mathbb{R}, \quad (i = 1,2,3), \tag{5.28}$$

koja ima rješenje ako i samo ako je zadovoljena karakteristična jednadžba:

$$\det\left| I_{ab} - Y_a \delta_{ab} \right| = 0. \tag{5.29}$$

Karakteristična jednadžba (5.29) je kubna algebarska jednadžba čijim rješavanjem se dobijaju tri svojstvene vrijednosti tenzora inercije Y_i. Zamjenom svojstvenih vrijednosti u (5.28), uz uvjet normiranja $\hat{e}_i'' \cdot \hat{e}_i'' = 1$, nalaze se svojstveni vektori $\hat{e}_i''$ (i = 1,2,3) tenzora inercije I.

Elementi R_{ij} ortogonalne matrice koja rotira sustav S´ u sustav glavnih osi S″ krutog tijela $\sum_{j=1}^{3} R_{ij}\,\hat{e}_j' = \hat{e}_i''$, su kosinusi pravaca $R_{ij} = \hat{e}_i'' \cdot \hat{e}_j'$ (i,j = 1,2,3) koordinatnih osi dva koordinatna sustava. Jednostavno rečeno, prvi svojstveni vektor $\hat{e}_1''$ je prvi redak matrice R, $\hat{e}_2''$ je drugi redak, a $\hat{e}_3''$ treći. Matrica R transformacijom sličnosti (5.27), transformira tenzor inercije I u zarotirani sustav glavnih osi S″ u kome je tenzor inercije krutog tijela dijagonalan I_D i glavni momenti inercije su svojstvene vrijednosti tenzora inercije.

Ilustrirajmo proceduru rješavanja svojstvenog problema, tj. dijagonalizaciju tenzora inercije na primjeru, jer dokaz zahtijeva kompletnu teoriju hermitskih matrica iz linearne algebre. Primjer mora biti jednostavan da bi se izbjegle algebarske komplikacije rješavanja kubne jednadžbe.

<u>Napomena</u>: Kubna jednadžba: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se smjenom $x = y - \frac{a}{3}$ transformira u nepotpuni oblik: $y^3 + py + q = 0$, $\left[p = -\frac{a^2}{3} + b, \;\; q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c \right]$, čija su rješenja:

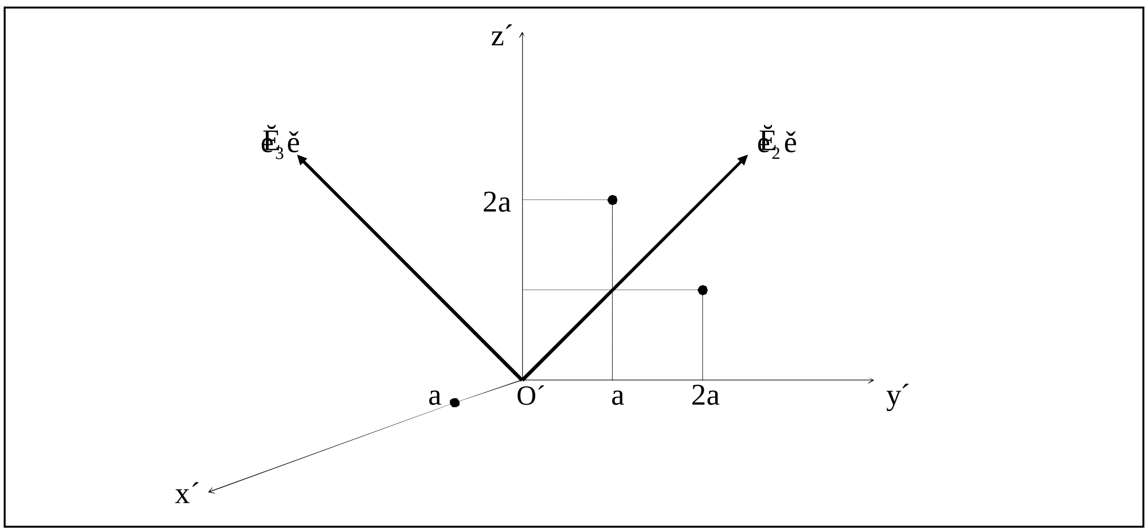
$$y_1 = A + B\,, \qquad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\,\frac{A-B}{2}\sqrt{3}\,,$$

gdje je:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}\,, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}\,, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 .$$

Primjer 4. Dijagonalizacija tenzora inercije.

Kruto tijelo se sastoji od 3 točke iste mase m i položaja: (a,0,0), (0,a,2a) i (0,2a,a) kao na Slici 32. Treba naći glavne momente i glavne osi inercije tijela u odnosu na ishodište i dijagonalizirati tenzor inercije.



Slika 32.

Prvo treba naći tenzor inercije krutog tijela u odnosu na oshodište O´. Prema (5.14) tenzor inercije prve čestice je:

$$I_{ab} = m\,(a^2\,\delta_{ab} - a^2\,\delta_{a1}\,\delta_{b1}) \quad \Rightarrow \quad I_1 = m\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Za drugu česticu je:

$$I_{ab} = m\,(5a^2\,\delta_{ab} - a^2\,\delta_{a2}\,\delta_{b2} - 4a^2\,\delta_{a3}\,\delta_{b3} - 2a^2\,\delta_{a2}\,\delta_{b3}) \quad \Rightarrow \quad I_2 = m\begin{pmatrix} 5a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2 & -2a^2 \\ 0 & -2a^2 & a^2 \end{pmatrix},$$

te za treću:

$$I_{ab} = m\,(5a^2\,\delta_{ab} - 4a^2\,\delta_{a2}\,\delta_{b2} - a^2\,\delta_{a3}\,\delta_{b3} - 2a^2\,\delta_{a2}\,\delta_{b3}) \quad \Rightarrow \quad I_3 = m\begin{pmatrix} 5a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & -2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 4a^2 \end{pmatrix}.$$

Tenzor inercije tijela u odnosu na točku O´ je:

$$I = m\begin{pmatrix} 10a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6a^2 & -4a^2 \\ 0 & -4a^2 & 6a^2 \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

Da bi riješili svojstveni problem (5.28) matrice I, treba prvo riješiti karakterističnu jednadžbu (5.29), tj.

$$\begin{vmatrix} 10ma^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6ma^2 - \lambda & -4ma^2 \\ 0 & -4ma^2 & 6ma^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0\,, \tag{5.31}$$

što je kubna jednadžba: $(10ma^2 - \lambda)[\,(6ma^2 - \lambda)^2 - (4ma^2)^2\,] = 0$, sa rješenjima: $\lambda_1 = 2ma^2$ i $\lambda_{2,3} = 10ma^2$ (umjesto Y_a , za sada svojstvene vrijednosti označavamo λ_a – razlog će biti jasan ubrzo). Dvije svojstvene vrijednosti su jednake $\lambda_2 = \lambda_3$, što znači da matrica I ima stupanj degeneracije 2. Svojstvene vrijednosti λ_a (a = 1,2,3), koje su glavni momenti inercije tijela, treba uvrstiti u matričnu jednadžbu (5.28) da nađemo tri svojstvena vektora:

- $\lambda_1 = 2ma^2$

$$\begin{pmatrix} 8ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2 & -4a^2 \\ 0 & -4a^2 & 4a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \Rightarrow$$

$p_1 = 0$, $p_2 = p_3$, pa zbog uvjeta normiranja: $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, slijedi: $p_2 = p_3 = 2^{-\frac{1}{2}}$, tj.:

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

je normirani svojsveni vektor koji pripada prvoj svojstvenoj vrijednosti λ_1 i pretstavlja pravac jedne glavne osi inercije tijela.

- $\lambda_2 = \lambda_3 = 10ma^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & -4a^2 \\ 0 & -4a^2 & -4a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow$$

q_1 je proizvoljno, a $q_2 = -q_3$. Degeneracija uzrokuje da gornja matrična jednadžba daje samo jednu nezavisnu jednadžbu: $q_2 + q_3 = 0$ (umjesto dvije kao za nedegeneriranu svojstvenu vrujednost λ_1), pa uz uvjet normalizacije $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, imamo dvije jednadžbe za tri nepoznanice. To znači da se jedna nepoznanica može proizvoljno odabrati. Odaberimo zato najjednostavnije: $q_1 = 1 \;\; \Rightarrow \;\; q_2 = q_3 = 0$, pa dobijamo drugi svojstveni vektor:

$$\vec{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i}',$$

koji je normiran ortogonalan na prvi. Dvostruko degeneriranoj svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = \lambda_3$ pripada još jedan svojstveni vektor $\vec{q}^{(2)}$, koji mora biti normiran i ortogonalan na prethodna dva, što daje:

$$\vec{q}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}' + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}'.$$

Degeneracija nam samo kaže da ne postoji preferirani izbor za druge dvije glavne osi inercije – bilo koja dva međusobno okomita pravca okomita na $\vec{p}$ su glavne osi inercije.

Tri svojstvena vektora $\{\vec{p}, \vec{q}^{(1)}, \vec{q}^{(2)}\}$ koji pripadaju trima svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2, λ_3 , su tri međusobno ortogonalna jedinična vektora, ali da bi bili osi koordinatnog sustava S' glavnih osi inercije tijela, moraju tvoriti desni koordinatni sustav (ne lijevi) – moraju zadovoljati još i uvjet: $\vec{e}_i\,' \times \vec{e}_j\,' = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k\,'$. Taj uvjet je ispunjen ako identificiramo:

$$\vec{q}^{(1)} \to \vec{e}_1\,' \;\Rightarrow\; Y_1 = 10ma^2 ; \quad \vec{p} \to \vec{e}_2\,' \;\Rightarrow\; Y_2 = 2ma^2 ; \quad \vec{q}^{(2)} \to \vec{e}_3\,' \;\Rightarrow\; Y_3 = 10ma^2 .$$

Sustav S' glavnih osi inercije tijela čiji su jedinični vektori $\{\vec{e}_1\,' = \vec{i}', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'\}$ dobija se rotacijom sustava $O'x'y'z'$ oko x'-osi za $\frac{\pi}{4}$. Matrica te rotacije je:

$$R_{11} = \vec{e}_1\,' \vec{i}\,' = \cos 0 = 1 ; \qquad R_{12} = \vec{e}_1\,' \vec{j}\,' = \cos\frac{\pi}{2} = 0 ; R_{13} = \vec{e}_1\,' \vec{k}\,' = \cos\frac{\pi}{2} = 0 ;$$

$$R_{21} = \vec{e}_2\,' \vec{i}\,' = \cos\frac{\pi}{2} = 0 ; R_{22} = \vec{e}_2\,' \vec{j}\,' = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \qquad R_{23} = \vec{e}_2\,' \vec{k}\,' = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$$R_{31} = \vec{e}_3\,' \vec{i}\,' = \cos\frac{\pi}{2} = 0 ; R_{32} = \vec{e}_3\,' \vec{j}\,' = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad R_{33} = \vec{e}_3\,' \vec{k}\,' = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

tj.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Normirani svojstveni vektor $\vec{e}_a$ je a-ti red ortogonalne matrice R i vrijedi: $\det R = 1$, $R^T = R^{-1}$. Lako je provjeriti da je zaista:

$$I_D = R\,I\,R^T = \begin{pmatrix} 10ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10ma^2 \end{pmatrix}. \qquad (5.32)$$

5.2 Eulerovi kutovi i Lagrangeove jednadžbe

Još treba naći jednadžbe gibanja krutog tijela – Lagrangeove jednadžbe. Da se odredi Lagrangian treba precizirati generalizirane koordinate krutog tijela. Za tri stupnja slobode translatornog gibanja možemo odabrati tri koordinate vektora položaja pola krutog tijela. Odaberemo li za sustav S´ vezan za kruto tijelo koordinatni sustav glavnih osi inercije, tako da je tenzor inercije dijagonalan, a za pol uzmemo upravo centar mase, tako da je $\vec{r}_c{}' = 0$, kinetička energija krutog tijela je prema (5.10) i (5.18):

$$T = \frac{M}{2}\left(\dot{r}_{c_1}^2 + \dot{r}_{c_2}^2 + \dot{r}_{c_3}^2\right) + \frac{Y_1}{2}\omega'^2_1 + \frac{Y_2}{2}\omega'^2_2 + \frac{Y_3}{2}\omega'^2_3, \qquad (5.33)$$

gdje su Y_i glavni momenti inercije, a ω'_i komponente trenutne kutne brzine rotacije krutog tijela $\vec{\omega}(t)$ izražene u sustavu S´. Kinetička energija krutog tijela je zbroj kinetičkih energija translacije i rotacije u skladu sa (5.12).

Prema (5.16) i (5.17), tj. $\vec{l}_{rot}{}' = I\vec{\omega}'$ i $\vec{M}_{rot}{}' = I\dot{\vec{\omega}}' + \vec{\omega}' \times \vec{l}_{rot}{}'$, za rotaciju krutog tijela važe:

Eulerove jednadžbe:

$$\begin{aligned} M_{rot_1}{}' &= Y_1\dot{\omega}'_1 + (Y_3 - Y_2)\omega'_2\omega'_3\,, \\ M_{rot_2}{}' &= Y_2\dot{\omega}'_2 + (Y_1 - Y_3)\omega'_1\omega'_3\,, \\ M_{rot_3}{}' &= Y_3\dot{\omega}'_3 + (Y_2 - Y_1)\omega'_1\omega'_2\,, \end{aligned} \qquad (5.34)$$

gdje su ω'_i komponente trenutne kutne brzine rotacije krutog tijela izražene u sustavu S´ glavnih osi inercije krutog tijela, Y_i glavni momenti inercije, a $M_{rot_i}{}'$ komponente ukupnog momenta sila u odnosu na centar mase krutog tijela u sustavu S´.

Za rješavanje Eulerovih jednadžbi u pokretnom sustavu S´ treba poznavati :

- glavne momente inercije Y_i ,
- komponente ukupnog momenta sila na glavne osi inercije – treba znati sve sile koje djeluju na kruto tijelo i naći projekcije njihovih momenata na glavne osi inercije tijela,
- početne uvjete – iz kojih se odrede početne vrijednosti komponenti kutne brzine ω'_i .

Da bi se primjenila Lagrangeova formulacija mehanike na gibanje krutog tijela sve veličine moraju biti izražene u odnosu na inercijalni (mirujući) sustav S – treba eliminirati komponente ω'_i definirane u odnosu na pokretni sustav S´ i zamjeniti ih sa 3 generalizirane koordinate koje jednoznačno određuju rotaciju krutog tijela. Postoji više načina da se to uradi, ali najčešće se kao generalizirane koordinate za rotaciju koriste tri Eulerova kuta $\{\varphi,\theta,\psi\}$.

Definicija: **Eulerovi kutovi** (φ,θ,ψ)

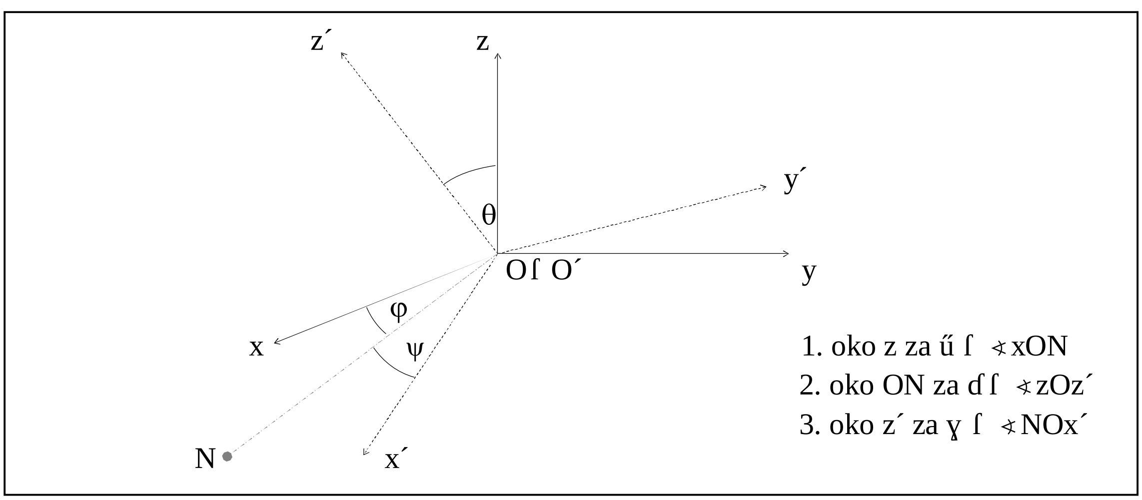
Ako zamislimo da je ishodište sustava Oxyz premješteno u pol krutog tijela O = O´, pravac ON presjeka ravnina Oxy i O´x´y´ naziva se čvorna linija (line of nodes). Eulerovi kutovi se definiraju kao kutevi 3 sukcesivne rotacije koje sustav S dovode do poklapanja sa sustavom S´, tj.

- prva rotacija oko z-osi za kut φ $\Rightarrow$ x-os prelazi u čvornu liniju, z-os nepromjenjena,
- druga rotacija oko čvorne linije za kut θ $\Rightarrow$ z-os prelazi u z´-os i
- treća rotacija oko z´-osi za kut ψ $\Rightarrow$ x,y-osi prelaze u x´,y´-osi,

kao na Slici 33.

Vrijednosti Eulerovih kutova ograničene su na intervale:

$$0 \le \varphi \le 2\pi\,, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,, \qquad 0 \le \psi \le 2\pi\,.$$



Slika 33.

Redoslijed rotacija je važan jer konačne rotacije, u općem slučaju, ne komutiraju. Matrična reprezentacija ovih rotacija prema (1.7) je:

$$R^{(1)}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad R^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad R^{(3)}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (5.35)$$

Sukcesivne rotacije reprezentirane su produktom ortogonalnih matrica svake pojedine rotacije jer rotacije čine grupu, koja je izomorfna SO(3) grupi (grupi specijalnih, tj. sa determinantom +1, ortogonalnih 3×3 matrica), pa je ortogonalna matrica rotacije krutog tijela $R(\varphi,\theta,\psi) = R^{(3)}R^{(2)}R^{(1)}$, ili eksplicitno:

$$R(\varphi,\theta,\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\end{pmatrix}. \qquad (5.36)$$

Inverzna transformacija sustava vezanog za kruto tijelo O´x´y´z´ u sustav Oxyz reprezentirana je inverznom matricom $R^{-1} = R^T$.

<u>Generalizirane koordinate krutog tijela u sustavu S su onda tri komponente radijus vektora pola – recimo, centra mase krutog tijela</u> $\vec{r}_c$, <u>koje određuju translatorno gibanje, i tri Eulerova kuta</u> $\{\varphi,\theta,\psi\}$, <u>koji određuju rotaciju krutog tijela (precizno, rotaciju osi koordinatnog sustava xyz u pravce paralelne osima x´y´z´ sustava S´ vezanog za kruto tijelo</u>).

Matrica transformacije R sustava S u sustav S´ omogućuje da se bilo koji vektor iz jednog sustava izrazi u drugom kao u (1.9). Vektori kutne brzine tri rotacije su:

$$\vec{\omega}_\varphi=\omega_\varphi\hat{e}_3=\dot\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{\omega}_\theta=\omega_\theta\hat{e}_0=\dot\theta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\omega}_\psi{}'=\omega_\psi{}'\hat{e}_3{}'=\dot\psi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad (5.37)$$

gdje je $\hat{e}_0$ jedinični vektor u pravcu čvorne linije. Os φ-rotacije je z-os, pa je u sustavu S´:

$$\vec{\omega}_\varphi{}'=R\,\vec{\omega}_\varphi=\dot\varphi\left(\hat{i}'\sin\theta\sin\psi+\hat{j}'\sin\theta\cos\psi+\hat{k}'\cos\theta\right). \qquad (5.38)$$

Os druge, θ-rotacije je čvorna linija, pa $\vec{\omega}_\theta$ za prijelaz u sustav S´ treba transformirati još samo matricom $R^{(3)}$ treće rotacije:

$$\vec{\omega}_\theta{}'=R^{(3)}\vec{\omega}_\theta=\dot\theta\left(\hat{i}'\cos\psi-\hat{j}'\sin\psi\right). \qquad (5.39)$$

Treća, ψ-rotacija je duž z´-osi, tj. zadana je u S´ sustavu, pa je ukupno:

$$\omega_x{}'=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi\,,\quad \omega_y{}'=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi\,,\quad \omega_z{}'=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi\,. \qquad (5.40)$$

Kako je $\vec{e}_0 = \vec{i}\cos\psi + \vec{j}\sin\psi$, koristeći inverznu matricu $R^{-1} = R^T$, za komponente kutne brzine u sustavu S dobija se:

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi , \qquad \omega_y = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi , \qquad \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta . \tag{5.41}$$

Kvadrat kutne brzine krutog tijela je:

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta , \tag{5.42}$$

gdje je zadnji član posljedica činjenice da tri osi rotacije $\vec{e}_3, \vec{e}_0$ i $\vec{e}_3'$ nisu međusobno okomite.

Prema (5.33) i (5.40) Lagrangian krutog tijela na koje djeluju konzervativne (ili općenitije, potencijalne) sile je:

$$L = L(r_{c_1}, r_{c_2}, r_{c_3}, \psi, \theta, \varphi, \dot{r}_{c_1}, \dot{r}_{c_2}, \dot{r}_{c_3}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - U =$$

$$(5.43)$$

$$= \frac{M}{2}\left(\dot{r}_{c_1}^2 + \dot{r}_{c_2}^2 + \dot{r}_{c_3}^2\right) + \frac{I_1}{2}\left(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\right)^2 + \frac{I_2}{2}\left(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi\right)^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)^2 - U .$$

Za konzervativne sile potencijalna energija zavisi smo od generaliziranih koordinata $U = U(r_{c_1}, r_{c_2}, r_{c_3}, \psi, \theta, \varphi)$. Lagrangeove jednadžbe za kruto tijelo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \qquad \{q_j\} = \{ r_{c_1}, r_{c_2}, r_{c_3}, \psi, \theta, \varphi \}, \tag{5.44}$$

čine sustav 6 običnih diferencijalnih jednadžbi II reda.

U općem slučaju za kruto tijelo nepravilnog oblika tenzor inercije, procedura njegove dijagonalizacije i jednadžbe gibanja su toliko komplicirane da se ne mogu analitički rješiti. Integrabilni slučajevi zahtijevaju da su bar dva glavna momenta inercije jednaka, $I_1 = I_2$, tj. da kruto tijelo ima dinamičku simetriju, što za homogena tijela znači postojanje bar jedne osi simetrije (ako je tijelo aksijalno simetrično $I_1 = I_2$, jedna od glavnih osi inercije je z´-os).

Ustvari vrijedi teorem:

<u>Ako kruto tijelo ima ravninu simetrije, što znači da je simetrično pri refleksijama u odnosu na tu ravninu, onda su centar mase i dvije glavne osi inercije krutog tijela u toj ravnini simetrije.</u>

Odaberemo li ravninu simetrije tijela za Oxy ravninu, za svaku česticu m_i tijela čije su koordinatame (x,y,z) postoji čestica iste mase sa koordinatama (x,y,−z), pa je $\sum_i m_i z_i = 0$, tj. $z^c = 0$, što znači da je centar mase u ravnini simetrije. Odaberemo li sad ishodište u centru mase produkti inercije su: $I_{xz} = I_{zx} = \sum_i m_i x_i z_i = 0$ i $I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i = 0$, tj. u trećem redu i trećem stupcu tenzora inercije jedino je $I_{33} = I_3 \neq 0$. Tenzor inercije je oblika:

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{pmatrix},$$

i lako se dijagonalizira matricom rotacije R za kut ű oko z-osi, $R = \begin{pmatrix} \cos ű & \sin ű & 0 \\ -\sin ű & \cos ű & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ na oblik (5.27), tj. $I_D = RIR^T$, gdje je kut ű odreĽen jednadģbom:

$$I_{12} \cos^2 2ű \text{ ï } (I_{11} \text{ ï } I_{22}) \sin 2ű = 0.$$

Primjer 5. Kotrljanje homogenog ģupljeg valjka.

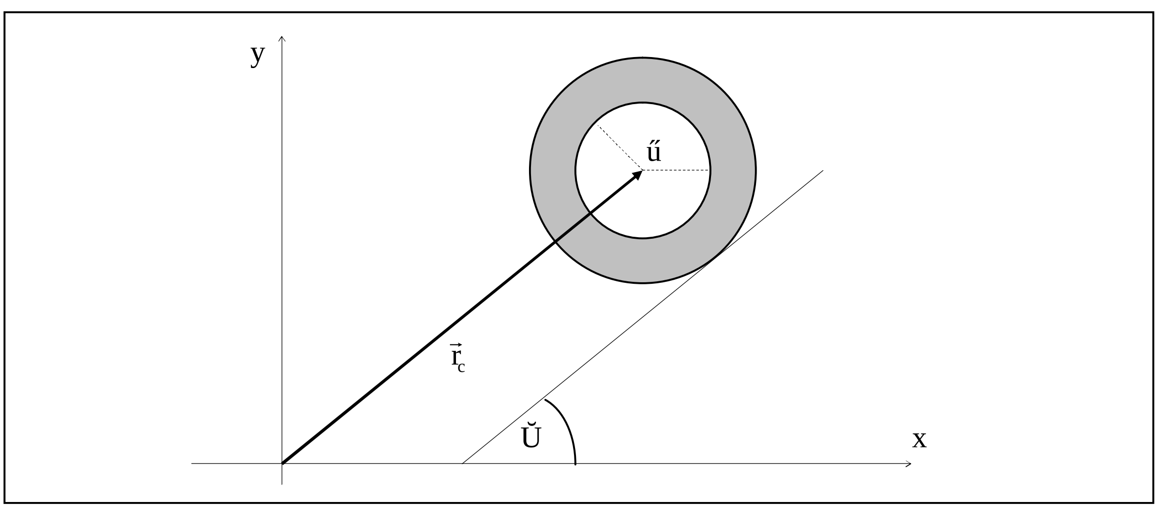
NaĹi Lagrangian i jednadģbu gibanja homogenog ģupnjeg valjka iz Primjera 1. koji se kotrlja bez klizanja po ravnini nagnutoj pod kutem Ůu odnosu na horizontalu, kao na Slici 34.

U Primjeru 1. naĽen je tenzor inercije homogenog ģupljeg valjka u odnosu na centar mase valjka:

$$I^c = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 3R^2 + 3r^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + 3r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 + 6r^2 \end{pmatrix}. \qquad (5.21)$$

Odaberemo li za pol centar mase, a za z´-os os simetrije valjka kutna brzina rotacije tijela je $\vec{ẋ} = ű \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Kinetiļka energija rotacije valjka je:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{ẋ}^T I^c \vec{ẋ} = \frac{M}{4}\left(R^2 + r^2\right) ű^2.$$



Slika 34.

Valjak ima samo gravitacijsku potencijalnu energiju koja je jednaka potencijalnoj energiji centra mase $U = Mg\, r_c \sin\alpha$. Uvjet kotrljanja bez klizanja je $\dot{r}_c = -R\dot{\varphi}$, tj. $r_c = -R\varphi$. Prema (5.12) ili (5.33) ukupna kinetička energija valjka je:

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{M}{4}\left(3R^2 + r^2\right)\dot{\varphi}^2 .$$

Valjak ima samo jedan stupanj slobode gibanja i za generaliziranu koordinatu možemo odabrati kut rotacije φ (ili r_c), pa je Lagrangian:

$$L = L(\varphi, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{M}{4}\left(3R^2 + r^2\right)\dot{\varphi}^2 + MgR\varphi \sin\alpha .$$

Jednadžba gibanja je: $\ddot{\varphi} - \dfrac{2R}{3R^2 + r^2} g \sin\alpha = 0$, tj. akceleracija centra mase valjka je:

$a_c = \ddot{r}_c = -\dfrac{2R^2}{3R^2 + r^2} g \sin\alpha = \text{const.}$, a rješenje jednadžbe gibanja je: $r_c(t) = \dfrac{1}{2} a_c t^2 + \dot{r}_c(0) + r_c(0)$.

Najvažniji slučaj gibanja aksijalno simetričnih krutih tijela (simetričnih u odnosu na z´-os) na kojima se baziraju navigacijski žiroskopi, je gibanje homogenog zvrka.

<u>Primjer 6.</u> Slobodno gibanje simetričnog zvrka.

Neka je zvrk homogen i simetričan u odnosu na svoju z´-os tako da je $I_1 = I_2$. Treća glavna os inercije zvrka je z´-os, a druge dvije glavne osi inercije su bilo koja dva međusobno okomita pravca u ravnini okomitoj na z´-os. Odaberimo pol u centru mase koji je na osi simetrije zvrka. Gibanje zvrka je slobodno ako su ukupna sila i ukupni moment sila u odnosu na centar mase nula. Neka zvrk rotira oko osi simetrije kutnom brzinom $\omega = \omega_3'$. U sustavu vezanom za tijelo je onda: $M_{rot_1}' = M_{rot_2}' = M_{rot_3}' = 0$ i $\omega_2' = \omega_3' = 0$, pa su prve dvije Eulerove jednadžbe (5.34) identiteti, a treća daje:

$$I_3 \dot{\omega}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \text{const.}$$

Prema (5.40) vidimo da su ove jednadžbe zadovoljene ako u sustavu S stavimo:

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0 , \quad \dot{\psi} = \omega = \text{const.} ,$$

sa rješenjem:

$$\varphi = C_1 , \qquad \theta = C_2 , \qquad \psi = \omega t + C_3 .$$

Slobodni zvrk po inerciji rotira konstantnom kutnom brzinom $\omega = \dot{\psi}$ oko osi simetrije koja zadržava nepromjenjeni pravac u prostoru – svojstvo zvrka važno za funkciju žiroskopa, koje je posljedica zakona očuvanja angularnog mmenta.

Primjer 7. Slobodno gibanje simetriļnog zvrka oko jedne fiksne toļke.

Odaberimo nepomiļnu toļku zvrka za pol i uzimimo opet os simetrije za z´-os zbog $Y_1 = Y_2$. Ako je ukupni moment svih sila u odnosu na pol nula, Eulerove jednadģbe (5.34) su:

$$\begin{aligned} Y_1 \dot{\omega}_1 + (Y_3 - Y_1)\omega_2\omega_3 &= 0\,, \\ Y_1 \dot{\omega}_2 + (Y_1 - Y_3)\omega_1\omega_3 &= 0\,, \\ Y_3 \dot{\omega}_3 &= 0\,. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Zadnja jednadģba odmah daje $\omega_3 = c =$ const., a iz prve dvije deriviranjem i eliminiranjem ω_2 dobija se:

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0\,, \qquad \Omega = \frac{Y_3 - Y_1}{Y_1} c\,. \tag{5.46}$$

Jedno partikularno rjeģenje (5.46) je:

$$\omega_1(t) = a \cos \Omega t\,, \tag{5.47}$$

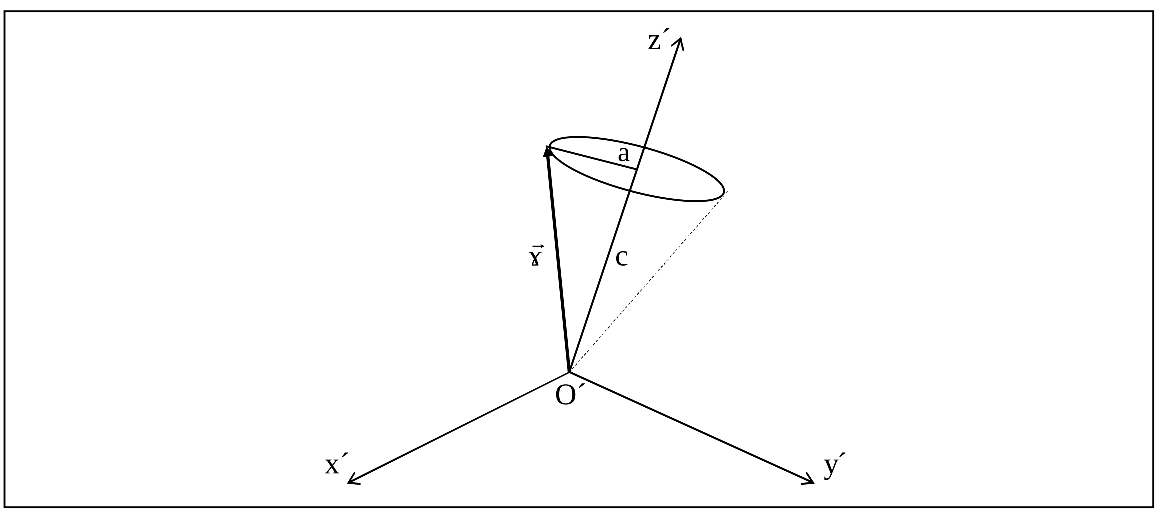
ģto zamjenom u prvu jednadģu (5.45) daje:

$$\omega_2(t) = a \sin \Omega t\,, \tag{5.48}$$

pa je:

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = a^2 = \text{const.}$$

Zvrk rotira kutnom brzinom $\vec{\omega}$ konstantnog intenziteta $|\vec{\omega}| = \sqrt{a^2 + c^2}$, dok pravac kutne brzine precesira sa kutnom frekvencijom Ω oko osi simetrije zvrka, kao na Slici 35.



Slika 35.

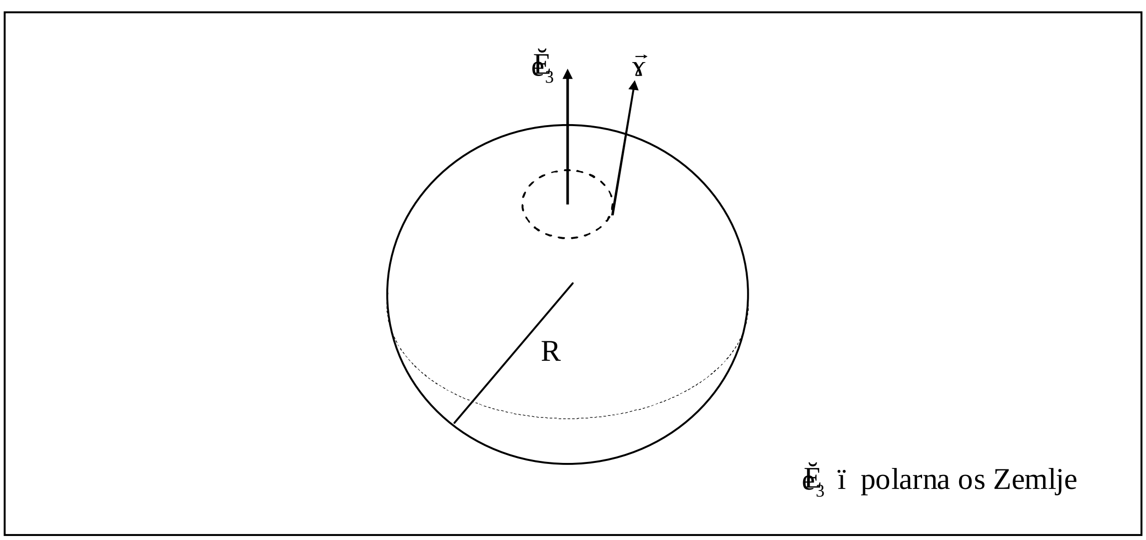
Gibanje Zemlje je slično gibanju slobodnog zvrka oko fiksnog centra mase, zanemarimo li male momente gravitacijskih sila Sunca i Mjeseca na sferno nesimetričnu Zemlju. Zemlja nije sferno simetrična, u prvoj aproksimaciji je malo spljoštena sfera – geoid, čiji je ekvatorijalni dijametar 42,8 km veći od polarnog (relativno odstupanje od idealne sfere je svega 3.35 promila jer je $R_{eq} = 6380\,\mathrm{km}$ što daje $\frac{R_{eq} - R_{pol}}{R} = 3{,}355 \times 10^{-3}$). U prvoj aproksimaciji, Zemlju možemo zamisliti kao aksijalno simetrično (u odnosu na polarnu os) kruto tijelo sastavljeno od homogene kugle radijusa R i mase M plus ekvatorijalni prsten radijusa R i mase m, visine i debljine nula. Tenzor inercije Zemlje $I_\oplus^c$ u odnosu na centar mase je oblika simetričnog zvrka:

$$I_\oplus^c = \frac{2}{5} M R^2 \begin{pmatrix} 1+H & 0 & 0 \\ 0 & 1+H & 0 \\ 0 & 0 & 1+2H \end{pmatrix}, \quad H = \frac{5m}{4M} . \tag{5.49}$$

gdje je $\frac{m}{M} = 2.17 \times 10^{-3}$ najbolja vrijednost dobijena detaljnim praćenjem gibanja satelita.

Uvrstimo li u (5.46) za kutnu brzinu precesije Zemljine osi rotacije $\Omega = \frac{H}{1+H}\omega = \frac{\omega}{368}$, gdje je $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60\mathrm{s}} = 7{,}27 \times 10^{-5} \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, dobijamo za period precesije od 368 dana.

Mjerenja daju za period precesije 427 dana (Chandler wobble) sa radijusom na površini Zemlje oko r = 9 m (koji iregularno varira za faktor 2), kao na Slici 36. Razlika je uglavnom posledica činjenice da Zemlja nije idealno kruto tijelo. Oceani i zemljina kora su elastični i stalno se deformiraju kako pokazuju plime i oseke, na primjer. I unutrašnjost Zemlje nije kruto, već elestično i deformabilno tijelo – magma i tekuće željezo.



Slika 36.

Primjer 8. Gibanje teškog simetričnog zvrka oko jedne fiksne točke.

Razmotrimo na kraju gibanje simetričnog zvrka mase M oko jedne učvršćene točke – pola, u gravitacijskom polju Zemlje. Jedina aktivna sila je težina zvrka. Problem riješimo koristeći Lagrangeovih jednadžbi gibanja. Kako je pol zvrka učvršćen nema translatornog gibanja i generalizirane koordinate su tri Eulerova kuta. Zbog simetrije zvrka, $I_1 = I_2$, kinetička energija rotacije prema (5.41) je:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 .$$

Potencijalna energija u odnosu na najnižu točku zvrka – njegov pol, jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj energiji centra mase zvrka:

$$U = Mg z_c = Mg r_c \cos\theta ,$$

gdje je r_c udaljenost centra mase od pola O´. Lagrangian zvrka je:

$$L = T - U = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - Mg r_c \cos\theta . \qquad (5.50)$$

Sustav je konzervativan (jedina aktivna sila na zvrk je težina, a ostale su idealne sile reakcije otpora podloge) i vrijedi zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2} I_1 \left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - Mg r_c \cos\theta = E. \qquad (5.51)$$

Kako Lagrangian ne zavisi od generaliziranih koordinata ψ i φ, Lagrangeove jednadžbe: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = 0$ i $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 0$ daju:

$$I_3 \left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) = A , \quad I_3 \dot\psi \cos\theta + \left(I_1 \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta\right)\dot\varphi = B , \qquad (5.52)$$

gdje su A i B integracione konstante. Gornje relacije omogućuju da se $\dot\psi$ i $\dot\varphi$ izraze pomoću θ i uvrštavanjem u zakon očuvanja energije (5.51) eliminiraju iz jednadžbe. Tako dobijena Lagrangeova jednadžba za kut θ između osi simetrije zvrka i vertikale (θ je kut između z i z´-osi) je:

$$\frac{1}{2} I_1 \dot\theta^2 + \frac{\left(B - A\cos\theta\right)^2}{2 I_1 \sin^2\theta} + \frac{A^2}{2 I_3} + Mg r_c \cos\theta = E . \qquad (5.53)$$

Jednadžba (5.53) rješava se numerički jer su rješenja eliptične funkcije. Važnije od eksplicitnog rješenja za zadane početne uvjete je kvalitativno razumijevanje gibanja zvrka.

Jednadžba (5.53) je kao zakon očuvanja energije za tijelo mase M koje rotira kutnom brzinom $\dot{\theta}$ oko osi okomite na z´-os (os rotacije je x´ – prva glavna os inercije zvrka) tako da je kinetička energija rotacije $T_{eff} = \frac{1}{2} Y_1 \dot{\theta}^2$.

Tijelo se giba u efektivnom potencijalu $U_{eff}(\theta) = \frac{(B - A\cos\theta)^2}{2Y_1 \sin^2\theta} + \frac{A^2}{2Y_3} + Mgr_c\cos\theta$, tako da je $T_{eff} + U_{eff} = E = const.$ Kako je kinetička energija uvijek pozitivno definitna, a potencijalna energija neograničeno raste $\lim_{\theta \to 0,\pi} U_{eff}(\theta) = +\infty$, gibanje je ograničeno na titranje $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ između dvije točke povrata θ_1 i θ_2 u kojima je $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$. Minimalne i maksimalne vrijednosti kuta θ – nagiba osi zvrka prema vertikali, određene su jednadžbama: $U_{eff}(\theta_{1,2}) = E$.

Gibanje teškog simetričnog zvrka je pseudoregularna precesija – na precesiju osi simetrije zvrka oko vertikalnog pravca superponira se nutacija – oscilatorno gibanje $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ koje mijenja nagib zvrka prema vertikali.

U gibanju Zemlje i ostalih planeta postoji analog i ovog tipa gibanja zvrka. Osi rotacije Zemlje oko Sunca i oko sopstvene osi tvore kut od $23{,}5^o$, što rezultira nenultim momentom gravitacijske sile Sunca na zemljin ekvatorijalni prsten (na dio prstena bliži Suncu djeluje jača gravitacijska sila). Isti efekt ima i Mjesec. Ukupni moment gravitacijskih sila Sunca i Mjeseca u odnosu na centar mase Zemlje nije nula i izaziva precesiju angularnog momenta Zemlje $\vec{L}_{\oplus}$ koji je praktično u pravcu ose rotacije Zemlje – što znači precesiju polarne osi Zemlje. Kako Zemlja malo odstupa od idealne kugle, kutna brzina precesije osi rotacije Zemlje je relativno spora $\omega = \frac{50{,}37''}{\text{god.}}$, što znači da je period precesije 26000 godina. Zemljina os rotacije je sada usmjerena u pravcu Sjevernjače (Polaris) sa točnošću boljom od 1^o, ali za 12000 godina ulogu Sjevernjače preuzet će Vega u zviježđu Lira.

6. MALE OSCILACIJE

6.1 Male oscilacije sustava

Razmotrimo konzervativni izolirani fizikalni sustav s n stupnjeva slobode gibanja. Mehaničko stanje sustava u jednom trenutku vremena određeno je skupom vrijednosti n generaliziranih koordinata i n generaliziranih brzina $(q_i, \dot{q}_i)$, gdje je i = 1, 2, ... , n. Sustav je opisan Lagrangian-om:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U, \tag{6.1}$$

gdje je potencijalna energija funkcija položaja U = U(q).

Sustav je u položaju ravnoteže kada generazirane sile koje djeluju na njega iščezavaju:

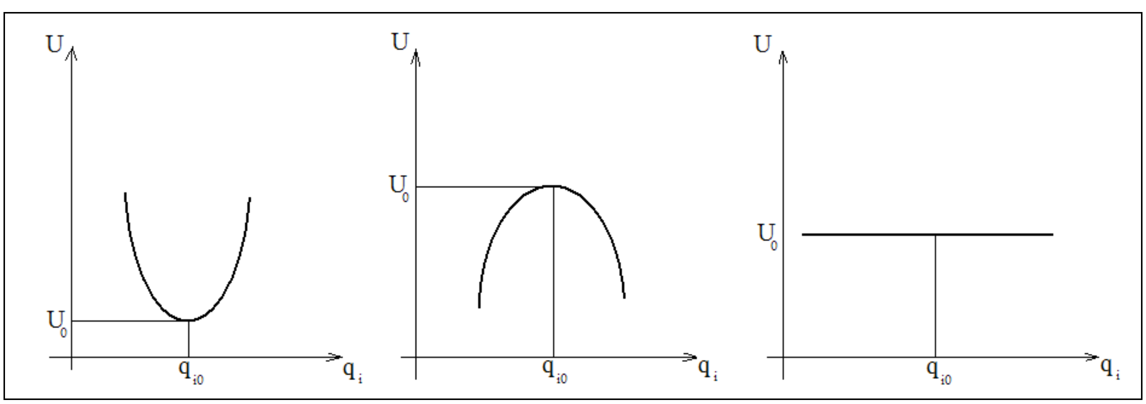
$$Q_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0, \tag{6.2}$$

što znači da u ravnotežnom položaju sustava $(q_{10}, q_{20}, ... , q_{n0})$ potencijalna energija ima ekstrem. Ravnotežni položaj je jedina konfuguracija u kojoj sustav može mirovati jer je ukupna sila na svaku česticu sustava nula.

Ravnotežni položaj može biti stabilan, nestabilan i indiferentan:

stabilan $\Leftrightarrow$ minimum potencijalne energije U,
nestabilan $\Leftrightarrow$ maksimum potencijalne energije U,
indiferentan $\Leftrightarrow$ ekstrem višeg reda potencijalne energije U.

Ravnotežni položaj je stabilan ako mali pomak iz tog položaja rezultira jedino ograničenim gibanjem u blizini tog položaja. Bilo kakav infinetizimalni pomak (perturbacija) sustava iz nestabilnog (labilnog) ravnotežnog položaja proizvodi neograničeno gibanje koje trajno odvodi sustav iz tog položaja. Mali pomak iz indiferentnog ravnotežnog položaja je opet indiferentni ravnotežni položaj. Oblik krivulja potencijalne energije u blizini položaja ravnoteže prikazan je na Slici 37.



Slika 37.

Najjednostavniji primjer ravnoteġnog poloġaja je ļestica u gravitacijskom polju u udolini, na vrhu brijega ili na horizontalnoj ravnini.

U teoriji malih oscilacija zanima nas gibanje sustava u okolini poloġaja stabilne ravnoteġe. Svi interesantni fizikalni sustavi imaju poloġaj stabilne ravnoteġe: nukleus, atom, molekula, kruto tijelo, zvijezda, planetarni sustav, galaktika, itd. Zato je teorija malih oscilacija oko poloġaja stabilne ravnoteġe vaġna za sva podruļjima fizike.

U sluļaju malih oscilacija, pomaci iz ravnoteġnog poloġaja su «mali», tj. infinitezimalni, pa sve funkcije koje opisuju sustav moġemo razvijati u Taylor-ov red oko poloġaja stabilne ravnoteġe.

Prvo definirajmo nove generalizirane koordinate x_i koje se mjere od ravnoteġnog poloġaja (ovo je uvijek moguĺe, jer znaļi samo translaciju ishodiġta):

$$x_i = q_i - q_{i0}; \qquad (i = 1,....., n). \tag{6.3}$$

RazvijajuĺI potencijalnu energiju U oko q_{i0}, tj. oko $x_i = 0$, dobijamo:

$$U(q_1,....,q_n) = U(q_{10},....,q_{n0}) + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 x_i x_j + ... \tag{6.4}$$

Ļlanovi linearni po x_i automatski iġļezavaju kao posljedica uvjeta ravnoteġe (6.2). BuduĺI da je potencijalna energija uvijek definirana samo do na konstantu, moġemo odabrati da je njena vrijednost u poloġaju stabilne ravnoteġe jednaka nuli:

$$U_0 = U(q_{10},....,q_{n0}) = 0. \tag{6.5}$$

ZanemarujuĺI infinitezimalne ļlanove viġeg reda po x_i, dobijamo izraz za potencijalnu energiju sustava za sluļaj malih oscilacija oko poloġaja stabilne ravnoteġe koji je kvadratna funkcija generaliziranih koordinata x_i:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j; \quad (i,j = 1,....,n) \tag{6.6}$$

gdje smo druge derivacije potencijalne energije U u poloġaju stabilne ravnoteġe oznaļili konstantama V_{ij}. Oļigledno je iz definicije da su konstante V_{ij} simetriļne, tj. $V_{ij} = V_{ij}$ i tvore elemente realne simetriļne $n \times n$ matrice V.

Razmotrimo sada razvoj u red kinetiļke energije sustava. BuduĺI da za izolirani fizikalni sustav generalizirane koordinate ne sadrġe vrijeme eksplicitno, kinetiļka energija je kvadratna funkcuja generaliziranih brzina:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} t_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} t_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j. \tag{6.7}$$

Koeficijenti t_{ij} su funkcije generaliziranih koordinata q_i, tj. x_i, i mogu se razviti u red oko poloġaja stabilne ravnoteġe:

$$t_{ij} = t_{ij}(q_{10},....,q_{n0}) + \sum_k \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 x_k + ... \qquad (6.8)$$

Kako je izraz (6.7) već kvadratan po infinitezimalnim generaliziranim brzinama $\dot{x}_i$, aproksimacija najnižeg reda za kinetičku energiju dobije se zanemarujući sve osim prvog člana u razvoju (6.8). Označavajući konstantne vrijednosti funkcija t_{ij} u položaju stabilne ravnoteže sa T_{ij}, kinetičku energiju možemo pisati u obliku:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j . \qquad (6.9)$$

Opet je očigledno da konstante T_{ij} moraju biti simetrične jer $\dot{x}_i$ i $\dot{x}_j$ komutiraju.

Iz (6.6) i (6.9) vidimo da je Lagrangian sustava koji vrši male oscilacije oko položaja stabilne ravnoteže kvadratna funkcija generaliziranih koordinata i brzina:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j + V_{ij} x_i x_j \right). \qquad (6.10)$$

Pripadne Lagrange-ove jednadžbe su:

$$\sum_j T_{ij} \ddot{x}_j + \sum_j V_{ij} x_j = 0 . \qquad (6.11)$$

Ovo je sustav od n običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda po vremenu sa konstantnim koeficijentima.

Treba vidjeti kako ih rješiti!

6.2 Jednadžba svojstvenih vrijednosti

Vidjeli smo da su jednadġbe gibanja (6.11) svakog fizikalnog sustava koji ima poloġaj stabilne ravnoteġe u blizini tog poloġaja u prvoj aproksimaciji:

$$\sum_j T_{ij}\ddot{x}_j + \sum_j V_{ij}x_j = 0. \tag{6.12}$$

Da pojednostavnimo notaciju preĽimo na matriļni oblik ï smatraĺemo T_{ij} elementima realne, simetriļne $n \times n$ matrice T, a V_{ij} elementima matrice V istog tipa. Lagrangeove jednadġbe gibanja za male oscilacije (6.12) u matriļnom obliku glase:

$$T\ddot{x} + Vx = 0, \tag{6.13}$$

gdje je x vektor-stupac tj. $n \times 1$ matrica.

Matrica kinetiļke energije T mora biti regularna, ġto znaļi da T^{-1} uvijek postoji, jer bi u protivnom, imali linearnu zavisnost generaliziranih koordinata ġto je, po definiciji nemoguĺe. Mnoġeĺi (6.13) slijeva s matricom T^{-1}, dobijamo:

$$\ddot{x} + Ax = 0, \tag{6.14}$$

gdje je $A = T^{-1}V$.

Çelimo da rjeġenje bude jednostavno harmonijsko titranje $x = e^{\pm iwt}$ s kutnom frekvencijom w koje zadovoljava jednadġbu gibanja:

$$\ddot{x} + w^2x = 0; \qquad w^2 = \text{const}. \tag{6.15}$$

Iz (6.14) i (6.15) je oļigledno da je neophodan uvjet za postojanje takvog rjeġenja:

$$Ax = w^2x, \tag{6.16}$$

ġto znaļi da je x svojstveni vektor matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti w^2, tj. svojstvenoj frekvenciji sustava w.

Znaļi, <u>rjeġavanje problema malih oscilacija oko poloġaja stabilne ravnoteġe nekog fizikalnog sustava svodi se na rjeġavanje svojstvenog problema</u> (6.14) <u>matrice</u> $A = T^{-1}V$.

Svojstvene vrijednosti matrice A su rjeġenja karakteristiļne jednadġbe:

$$\det(A_{kj} - w^2\delta_{kj}) = 0, \tag{6.17}$$

ili, mnoġeĺi slijeva s $\det T_{ik}$:

$$\det(V_{ij} - w^2T_{ij}) = 0. \tag{6.18}$$

Ovo je algebarska jednadġba stupnja n po w^2 i njena rjeġenja su n svojstvenih frekvencija malih oscilacija fizikalnog sustava.

Pripadne svojstvene vektore određujemo iz (6.16) ili iz ekvivalentne jednadžbe:

$$(V - w^2 T)\, x = 0. \tag{6.19}$$

Kako su V i T realne simetrične matrice slijedi da su svojstvene vrijednosti w^2 matrice A realne. To je lako dokazati.

Hermitski konjugirana jednadžba (6.19) je:

$$x^{\dagger} V - \overline{w^2}\, x^{\dagger} T = 0. \tag{6.20}$$

Množeći (6.19) slijeva s $x^{\dagger}$, a (6.20) zdesna s x, dobijamo:

$$x^{\dagger} V x = w^2\, x^{\dagger} T x$$

$$x^{\dagger} V x = \overline{w^2}\, x^{\dagger} T x\,,$$

pa oduzimanjem odmah slijedi: $w^2 = \overline{w^2}$, tj. $w^2 \in R$.

U linearnoj algebri se pokazuje da svaka hermitska matrica reda n ima n svojstvenih vektora – po jedan za svaku svojstvenu frekvenciju w_k.

Napomena: Jasno je da su matrice V i T hermitske jer su realne i simetrične, tako da je i matrica T^{-1} hermitska. Ali, produkt dvije hermitske matrice je hermitska matrica, ako i samo ako, one komutiraju. U svakom pojedinom slučaju može se provjeriti da li matrice V i T^{-1} komutiraju. No, bez velikog ograničenja općenitosti u klasičnoj fizici, to se može pretpostaviti i mi ćemo tako učiniti bez provjere. Tada je i matrica $A = T^{-1}V$ hermitska, te njen svojstveni problem uvijek ima rješenje, tj. postoji n svojstvenih frekvencija w_k i njima pripadnih svojstvenih vektora.

Označimo svojstvene vektore matrice A s $x^{(k)}$, gdje indks k uzima vrijednosti k = 1,2,…,n. Za pojedine komponente svojstvenih vektora uvedimo notaciju: $x_i^{(k)} \equiv x_{ik}$.

Svojstvene vrijednosti w^2 matrice A su, osim toga, i pozitivne što se vidi na slijedeći način. Pomnožimo (6.19) s x_{ik} i sumirajmo po i:

$$\sum_{i,j} V_{ij} x_{ik} x_{jk} = w_k^2 \sum_{i,j} T_{ij} x_{ik} x_{jk}\,,$$

što daje:

$$w_k^2 = \frac{\sum V_{ij} x_{ik} x_{jk}}{\sum T_{ij} x_{ik} x_{jk}}\,.$$

Na desnoj strani i brojnik i nazivnik su nenegativni – nazivnik je kao dvostruka kinetička energija za brzine x_{ik}, a brojnik je potencijalna energija sustava za koordinate x_{ik} uz uvjet da je minimum potencijalne energije nula, što znači da je: $w_k^2 \geq 0$.

Sluļaj nulte svojstene frekvencije zahtijeva posebno razmatranje: titranje sa frekvencijom w = 0, ustvari nije titranje nego translacijsko ili rotacijsko gibanje cijelog sustava kao krutog tijela. Pri razmatranju malih oscilacija sustava ti stupnjevi slobode gibanja se eliminiraju dodatnim zahtjevima da je brzina centra mase sustava jednaka nuli i da je angularni moment sustava nula.

Dosad smo pokazali da <u>svaki konzervativni fizikalni sustav s n stupnjeva slobode gibanja u blizini poloǵaja stabilne ravnoteǵe ima n svojstvenih frekvencija koje su realne i nenegativne</u>. U zavisnosti da li su te svojstvene frekvencije meĽusobno razliļite ili nisu, imamo dva sluļaja:

- NEMA DEGENERACIJE – svih n svojstvenih frekvencija w_k su razliļite,
- POSTOJI DEGENERACIJA – bar dvije od n svojstvenih frekvencija w_k su jednake.

Razmotrimo prvo sustav u kojem nema degeneracije:

Rjeǵavanjem karakteristiļne jednadǵbe (6.17) ili (6.18) nalazimo svojstvene frekvencije, a zatim odreĽujemo pripadne svojstvene vektore iz jednadǵbe:

$$(A - w^2 I)\, x = 0 \qquad \text{ili} \qquad (V - w^2 T)\, x = 0$$

uvrǵtavanjem svojstvenih vrijednosti.

<u>Primjer 1</u>. Rjeǵiti svojstveni problem nedegerirane matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tj. matriļnu jednadǵbu: $Ax = \lambda x$, gdje smo svojstvene vrijednosti oznaļili s λ.

Karakteristiļna jednadǵba je: $\det(A - \lambda I) = 0$, odnosno:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 (2 - \lambda) - (2 - \lambda) = 0.$$

Svojstvene vrijednosti su: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$;

Sad treba naĺi svojstvene vektore uvrǵtavanjem vrijednosti λ_i u jednadǵbu: $(A - \lambda I)\, x = 0$.

a) $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ovo je sustav od 3 homogene linearne jednadžbe s 3 nepoznanice (ali, samo dvije linearno nezavisne jednadžbe), koji daje dvije relacije među komponentama prvog svojstvenog vektora

$$x_3 = -x_1 \qquad \text{i} \qquad x_2 = 0.$$

Očigledno je da postoji beskonačno mnogo rješenja. Zato zadajemo dodatni uvjet normiranja kojim zahtijevamo da je kvadrat norme svojstvenog vektora jednak 1 (to je treća linearno nezavisna jednadžba za tri komponente svojstvenog vektora), tj.:

$$x^{\dagger}x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

što daje: $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (odabrat ćemo samo pozitivno rješenje), pa je svojstveni vektor matrice A koji pripada prvoj svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = -1$:

$$x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\lambda_2 = 1$

Potpuno analogno dobija se:

$$x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ te,}$$

c) $\lambda_3 = 2$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lako je vidjeti da su različiti svojstveni vektori međusobno ortogonalni (u skladu s općim teoremom linearne algebre koji važi za svaku hermitsku matricu), tj. vrijedi:

$$x^{(1)\dagger}x^{(2)} = x^{(1)\dagger}x^{(3)} = x^{(2)\dagger}x^{(3)} = 0.$$

Razmotrimo sad sustav u kojem postoji degeneracija:

U slučaju da su dvije ili više svojstvenih vrijednosti međusobno jednake, nazivaju se degeneriranim i tada broj linearno nezavisnih jednadžbi za komponente pripadnih svojstvenih vektora nije dovoljan za njihove jednoznačno određivanje. Broj degeneriranih svojstvenih vrijednosti je stupanj degeneracije k matrice – očigledno, k može uzimati vrijednosti od 2 do n. Ako nema degeneracije karakteristična jednadžba (6.17) osigurava da jednadžba (6.16) za svojstvene vektore daje n – 1 uvjet za n komponenti svakog svojstvenog vektora.

U slučaju degeneracije, broj uvjeta je $n - k$. U linearnoj algebri se dokazuje teorem koji kaže da uvijek postoji tzv. Schmidtov postupak ortogonalizacije, koji iz zahtijeva da različiti svojstveni vektori koji pripadaju istoj degeneriranoj svojstvenoj vrijednosti budu međusobno ortogonalni, osigurava dodatnih $k - 1$ uvjeta za svaki svojstveni vektor. Uz dodatni uvjet normiranja $x^T x = 1$, to je ukupno n linearno nezavisnih uvjeta za n komponenti svakog od k različitih svojstvenih vektora koji pripadaju svojstvenoj frekvenciji stupnja degeneracije k .

Umjesto dokaza ovog teorema, razmotrimo jednostavan primjer s stupnjem degeneracije $k = 2$.

Primjer 2. Rješiti svojstveni problem degenerirane matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda) = 0,$$

daje: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Rješimo sad jednadžbu za svojstvene vektore $(A - \lambda I)\, x = 0$.

a) $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \ ; \ \ x_3 = -x_2 ,$$

pa iz uvjeta normiranja slijedi: $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, te dobijamo:

$$x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\lambda_2 = 1$

Jednadžba (6.16) daje:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 0 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} ,$$

tj. dobijemo samo jednu jednadžbu: $x_2 = x_3$.

Postoje dva svojstvena vektora $x^{(2)}$ i $x^{(3)}$ koja pripadaju ovoj dvostruko degeneriranoj svojstvenoj vrijednosti čije dvije komponente su potpuno proizvoljne – npr. x_1 i x_2.

Uvjeti normiranja $x^{(2)\dagger}x^{(2)} = x^{(3)\dagger}x^{(3)} = 1$ i dodatni uvjet ortogonalnosti: $x^{(2)\dagger}x^{(3)} = 0$, omogućuju da se odrede sve komponente ovih vektora (preciznije, imamo 3 uvjeta za 4 komponente – znači jednu komponentu moramo odabrati proizvoljno).

Jednostavnosti radi, odaberimo za prvu komponentu drugog svojstvenog vektora nulu. Onda je:

$$x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pa iz uvjeta ortogonalnosti dobijamo:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sva tri svojstvena vektora matrice A su normirana i međusobno ortogonalna, kao i u slučaju kad nema degeneracije. Degeneracija ustvari znači postojanje beskonačno mnogo ekvivalentnih skupova od k ortonormiranih svojstvenih vektora koji pripadaju istoj svojstvenoj vrijednosti – po volji biramo koji odabrati.

Na ovaj način se uvijek mogu odrediti svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori bilo koje Hermitske matrice.

6.3 Normalne koordinate

Rjeġavanjem svojstvenog problema (6.16) $n \times n$ matrice $A = T^{-1}V$ uvijek dobijemo n svojstvenih vrijednosti w_k i n pripadnih svojstvenih vektora $x_{(k)}$. Svojstvene vektore poredane kao stupce iskoristimo za formiranje $n \times n$ matrice C. To znaį i da za komponente matrice C vrijedi: $C_{ij} \equiv x_{i(j)} \equiv x_{ij}$. PomoĹu matrice C uvedimo nove generalizirane koordinate y_i definirane matriį nom jednadġbom:

$$x = C\, y\,, \tag{6.21}$$

gdje su x i y vektori stupci, tj. $n \times 1$ matrice.

Matrica C je ortogonalna jer su njeni stupci razliį iti, meĽusobno ortogonalni, svojstveni vektori matrice A, tj, vrijedi $C^{-1} = C^{T}$ pa je:

$$y = C^{T} x\,. \tag{6.22}$$

Dokaġimo da matrica C matriį nom transformacijom sliį nosti dijagonalizira matricu kinetiį ke energije T na jediniį nu matricu, tj. da vrijedi:

$$C^{T}\, T\, C = I\,. \tag{6.23}$$

Za dvije svojstvene vrijednosti w_k^2 i w_m^2 jednadġbe (6.16) ili ekvivalentne jednadġbe (6.19) su

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}\, x_{j(k)} = \sum_{i,j=1}^{n} {w_k}^2\, T_{ij}\, x_{j(k)} \tag{6.24}$$

i

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}\, x_{j(m)} = \sum_{i,j=1}^{n} {w_m}^2\, T_{ij}\, x_{j(m)}\,. \tag{6.25}$$

Kompleksno konjugirana jednadġba (6.25) je:

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}\, \overline{x_{j(m)}} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{{w_m}^2}\, T_{ij}\, \overline{x_{j(m)}}\,, \tag{6.26}$$

gdje smo iskoristili realnost i simetriį nost matrica potencijalne i kinetiį ke energije.

MnoġeĹi (6.24) sa $\overline{x_{i(m)}}$, a (6.26) sa $x_{j(k)}$ i oduzimanjem tako dobijenih jednadġbi, imamo:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} (w_k^2 - \overline{w_m^2})\, T_{ij}\, \overline{x_{i(m)}}\, x_{j(k)}\,. \tag{6.27}$$

Kako su svojstvene vrijednosti realne i kako svojstvene vektore takoĽe uvijek moġemo odabrati da budu realni, (6.27) daje:

$$0=\sum_{i,j=1}^{n}\left(w_k^2-w_m^2\right)T_{ij}\,x_{i(m)}\,x_{j(k)}=\sum_{i,j=1}^{n}\left(w_k^2-w_m^2\right)x_{(m)i}T_{ij}\,x_{j(k)}\,. \tag{6.28}$$

Za $k \neq m$ mora biti:

$$\sum_{i,j=1}^{n}T_{ij}\,x_{i(m)}\,x_{j(k)}=\sum_{i,j=1}^{n}x^{T}{}_{(m)i}\,T_{ij}\,x_{j(k)}=(C^T\,T\,C)_{mk}=0, \tag{6.29}$$

a, za k = m uvijek moġemo zahtijevati da svojstveni vektori zadovoljavaju novi uvjet normiranja:

$$\sum_{i,j=1}^{n}x^{T}{}_{(k)i}\,T_{ij}\,x_{j(k)}=1. \tag{6.30}$$

Zadnje dvije jednadġbe moġemo ujediniti u jednu:

$$\sum_{i,j=1}^{n}x^{T}{}_{(k)i}\,T_{ij}\,x_{j(m)}=\breve{u}_{km}\,, \tag{6.31}$$

ġto u matriļnoj formi piġemo:

$$C^T\,T\,C=I. \tag{6.23}$$

Jednadġba (6.23) predstavlja uvjet ortonogonalnosti matrice C u prostoru koji nije Euklidski i ļiji je metriļki tenzor T, sa komponentama T_{ij} koje su konstante neovisne o koordinatama. U takvom prostoru skalarni produkt dva vektora a i b je:

$$\vec{a}\,\vec{b}=\sum_{i,j=1}^{n}a_iT_{ij}\,b_j\,,$$

pa (6.31) predstavlja uvjet ortonormiranosti n svojstvenih vektora $x_{(k)}$ u takvom prostoru.

Definirajmo sad realnu dijagonalnu matricu reda n ļiji su dijagonalni elementi svojstvene vrijednosti w_k^2 matrice $A=T^{-1}V$, tj.:

$$V^D_{km}=w_k^2\breve{u}_{km}\,. \tag{6.32}$$

Svojstveni problem matrice A iz (6.16) moġemo napisati kao:

$$\sum_{j=1}^{n}V_{ij}x_{j(m)}=w_m^2\sum_{j=1}^{n}T_{ij}x_{j(m)}=\sum_{j,k=1}^{n}T_{ij}x_{j(k)}w_k^2\,\breve{u}_{km}=\sum_{j,k=1}^{n}T_{ij}x_{j(k)}V_{km}\,,$$

ili u matriļnoj notaciji:

$$V\,C=T\,C\,V^D.$$

Mnoġeĺi slijeva sa C^T zbog (6.23) je:

$$V^D = C^T\, V\, C = \begin{pmatrix} w_1^2 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & w_n^2 \end{pmatrix}. \tag{6.33}$$

Znaļi, <u>matrica C dijagonalizira matricu T na jediniļnu matricu (6.23) i takoĽer dijagonalizira V na V^D kao u (6.33)</u>.

Zato u novim generaliziranim koordinatama (6.22), zbog $x = Cy$, tj. $x^T = y^T\, C^T$ i potencijalna i kinetiļka energija imaju znatno jednostavniji oblik.

Zaista, prema (6.6) i (6.33) je:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i V_{ij} x_j = \frac{1}{2}\, x^T\, V\, x = \frac{1}{2}\, y^T\, C^T\, V\, C\, x = \frac{1}{2} y^T\, V^D\, y\,. \tag{6.34}$$

Poslednju relaciju moģemo napisati i eksplicitno:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k^2 y_k^2\,. \tag{6.35}$$

Kinetiļka energija Íe zbog (6.23) u novim koordinatama imati joģ jednostavniji oblik:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \dot{x}_i t_{ij} \dot{x}_j = \frac{1}{2}\, \dot{x}^T\, T\, \dot{x} = \frac{1}{2}\, \dot{y}^T C^T\, T\, C\, \dot{y} = \frac{1}{2}\, \dot{y}^T \dot{y}\,. \tag{6.36}$$

Izraģena pomoÍu novih generaliziranih brzina kinetiļka energija je eksplicitno:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dot{y}_k{}^2\,. \tag{6.37}$$

Iz (6.37) i (6.35) se vidi da je u novim generaliziranim koordinatama y_k i kinetiļka i potencijalna energija sustava zbroj kvadrata bez mjeģovitih ļlanova.

Znaļi, **u prvoj aproksimaciji Lagrangian malih oscilacija oko položaja stabilne ravnoteže bilo kojeg konzervativnog fizikalnog sustava sa n stupnjeva slobode gibanja jednak je zbroju od n Lagrangiana neovisnih linearnih harmoničkih oscilatora, tj.**

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{y}_k{}^2 - w_k{}^2 y_k{}^2\right). \tag{6.38}$$

Lagrangeove jednadģbe gibanja za y_k su:

$$\ddot{y}_k + w_k{}^2 y_k = 0, \quad (k = 1,2,....,n). \tag{6.39}$$

sa rjeģenjem koje je prosto harmoniļko titranje:

$$y_k = A_k \cos\,(w_k\, t + \varphi_k). \tag{6.40}$$

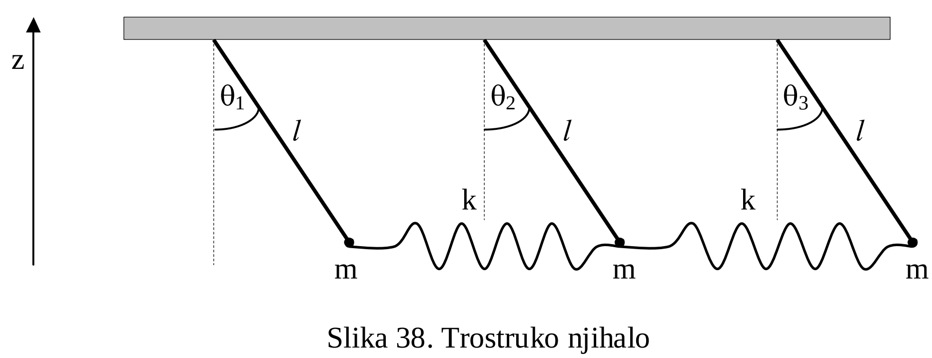
Sve nove generalizirane koordinate y_k su jednostavne harmoniļke funkcije vremena koje sadrģe samo jednu svojstvenu frekvenciju sustava w_k, i nazivaju se **normalnim koordinatama sustava** ï svaka normalna koordinata opisuje prosto harmoniļko titranje sustava oko poloģaja stabilne ravnoteģe sa jednom svojstvenom frekvencijom i ļini jedan normalni mod titranja sustava. Sve ļestice, u svakom pojedinom normalnom modu, osciliraju s istom svojstvenom frekfencijom i fazom. Bilo kakvo gibanje sustava u blizini poloģaja stabilne ravnoteģe moģe se smatrati sastavljenim od linearne kombinacije (superpozicija) normalnih modova sa odgovarajuĺim amplitudama A_k i faznim faktorima φ_k.

Dakle, **u blizini položaja stabilne ravnoteže u prvoj aproksimaciji svaki konzervativni fizikalni sustav sa n stupnjeva slobode gibanja može se smatrati ansamblom od n neovisnih linearnih harmoničkih oscilatora svojstvenih frekvencija w_k (koje se nazivaju svojstvenim frekvencijama sustava), tako da se ukupno gibanje sustava sastoji od pobuđivanja različitih harmoničkih oslilatora (normalnih modova osciliranja) različitim amplitudama i fazama.**

Ukupno gibanje ne sadrģi harmonike svojstvenih frekvencija zbog uvjeta malih oscilacija, tj. zahtijeva da amplitude titranja budu infinitizimalne veliļine. Tako se dobije Lagrangian koji je kvadratna funkcija normalnih koordinata y_k i brzina $\dot{y}_k$ [jer smo zadrģali samo prve nenulte ļlanove u Taylorovim razvoju (6.4) i (6.8) za potencijalnu i kinetiļku energiju]. Jasno je da proceduru razvoja u red Lgrangiana sustava moģemo sistematski nastaviti uzimajuĺi u obzir i ļlanove viģeg reda po infinitezimalnim veliļinama, ali po cijenu znatnih matematiļkih komplikacija.

6.4 Male oscilacije trostrukog njihala

Kao primjer razmotrimo sustav tri matematiļka njihala spojena elastiļnim oprugama. Radi jednostavnosti uzmimo da su njihala jednakih duljina *l* i masa m i neka obje opruge imaju istu konstantu k kao na Slici 38.



Slika 38. Trostruko njihalo

Sustav ima tri stupnja slobode gibanja i za generalizirane koordinate odaberimo kuteve koje njihala ļine sa vertikalom: θ_1, θ_2 i θ_3. Poloģaj stabilne ravnoteģe je najniģi poloģaj u kojem su generalizirane koordinate i potencijalna energija sustava, koja je zbroj gravitacijske potencijalne energije njihala i elastiļne potencijalne energije opruga, jednake nuli.

Svako njihalo ima gravitacijsku potencijalnu energiju:

$$U_{GR} = mgz = mgl(1 - \cos\theta).$$

U sluļaju malih oscilacija je $\theta \approx 0$, pa ako $\cos\theta$ razvijemo u red imamo:

$$U_{GR} = mgl(1 - 1 + \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + ...) = \frac{1}{2}mgl\,\theta^2. \tag{6.41}$$

Svaka opruga ima elastiļnu potencijalnu energiju $U_{EL} = \frac{1}{2}kx^2$ gdje je x elongacija opruge, tj. $x = l\sin\theta$. U prvoj aproksimaciji moģemo zanemariti elongaciju opruge u pravcu z-osi, pa je:

$$U_{EL} = \frac{1}{2}kl^2\{\sin\theta_2 - \sin\theta_1\}^2 + \frac{1}{2}kl^2\{\sin\theta_3 - \sin\theta_2\}^2.$$

Razvijajuĺi elestiļnu potencijalnu energiju u red: $\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - ....$ i zadrģavajuĺi samo prvi ļlan u razvoju za potencijalnu energiju elastiļnog meĽudjelovanja njihala dobijamo:

$$U_{EL} = \frac{1}{2}kl^2\{(\theta_2 - \theta_1)^2 + \{(\theta_3 - \theta_2)^2\}. \tag{6.42}$$

Ukupna potencijalna energija malih oscilacija sustava je zbroj (6.41) i (6.42), tj.:

$$U = \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) + \frac{1}{2}kl^2\{(\theta_2 - \theta_1)^2 + \{(\theta_3 - \theta_2)^2\}, \tag{6.43}$$

ġto je kvadratna funkcija generaliziranih koordinata kao u (6.6).

Kinetiļka energija je kvadratna funkcija generaliziranih brzina:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2), \tag{6.44}$$

kao u (6.9). Poredeĺi koeficijente uz $\theta_i\theta_j$, izraze za potencijalne i kinetiļku energiju moģemo napisati u matriļnoj formi $U = x^{T}Vx$ i $T = x^{T}Tx$ [kao u (6.19) odsad umjesto θ generalizirane koordinate oznaļavamo sa x], gdje je:

$$V = \frac{1}{2}ml^2\begin{pmatrix} w_0^2 + n^2 & -n^2 & 0 \\ -n^2 & w_0^2 + 2n^2 & -n^2 \\ 0 & -n^2 & w_0^2 + n^2 \end{pmatrix}$$

i

$$T = \frac{1}{2}ml^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pri ļemu smo oznaļili: $w_0^2 = \dfrac{g}{l}$; $n^2 = \dfrac{k}{m}$.

Sad treba rjeġiti karakteristiļnu jednadġbu: $\det(V\ \text{ï}\ \ w^2 T\ ) = 0 \qquad \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} m l^2 \begin{vmatrix} w_0^2 + n^2 - w^2 & -n^2 & 0 \\ -n^2 & w_0^2 + 2n^2 - w^2 & -n^2 \\ 0 & -n^2 & w_0^2 + n^2 - w^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad (w_0^2 + n^2 - w^2)\{w^4 - w^2(2w_0^2 + 3n^2) + w_0^2(w_0^2 + 3n^2)\} = 0\ .$$

Rjeġenja ove jednadġbe, tj. kvadrati svojstvenih frekvencija su:

$$w_1^2 = w_0^2\ ; \qquad w_2^2 = w_0^2 + n^2\ ; \qquad w_3^2 = w_0^2 + 3n^2.$$

Svojstvene vrijednosti su razliļite pa nema degeneracije.

NaĽimo sad pripadne svojstvene vektore.

Za prvu svojstvenu vrijednost $w_1^2 = w_0^2$ jednadġba $(V - w_1^2 T)\, x^{(1)} = 0$ glasi:ģ

$$\begin{pmatrix} n^2 & -n^2 & 0 \\ -n^2 & 2n^2 & -n^2 \\ 0 & -n^2 & n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} n^2 x_1 - n^2 x_2 \\ -n^2 x_1 + 2n^2 x_2 - n^2 x_3 \\ -n^2 x_2 + n^2 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$$

sa rjeġenjem: $x_1 = x_2 = x_3$.

Uz uvjet normiranja: $x^{\text{À}} x = 1$, slijedi: $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, pa je prvi svojstveni vektor:

$$x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analognim postupkom dobiju se i druga dva svojstvena vektora:

$$x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad x^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oļigledno je da su razliļiti svojstveni vektori meĽusobno ortogonalni, tj:

$$x^{(1)\,\text{À}} x^{(2)} = x^{(1)\,\text{À}} x^{(2)} = x^{(2)\,\text{À}} x^{(3)} = 0.$$

Matrica C ļiji su stupci svojstveni vektori je:

$$C = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Prema (6.21) definirajmo nove generalizirane koordinate y:

$$x \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{l\sqrt{m}} Cy \qquad \text{tj.} \qquad y = l\,\sqrt{m}\, C^T x\,. \tag{6.45}$$

Kako je prema (6.44) kinetiļka energija $T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^T \dot{\theta}$, da bi dobili $T = \frac{1}{2}\dot{y}^T \dot{y}$ u novim koordinatama, moramo u definiciju (6.45) uključiti $l\sqrt{m}$ faktore.

Iz (6.45) za nove generalizirane koordinate eksplicitno dobijamo:

$$\begin{aligned} y_1 &= l\sqrt{\frac{m}{6}}\,(\sqrt{2}\,\theta_1 + \sqrt{2}\,\theta_2 + \sqrt{2}\,\theta_3) \\ y_2 &= l\sqrt{\frac{m}{6}}\,(\sqrt{3}\,\theta_1 - \sqrt{3}\,\theta_3) \\ y_3 &= l\sqrt{\frac{m}{6}}\,(\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3). \end{aligned} \tag{6.46}$$

Stare koordinate izraģene preko novih su:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{l\sqrt{6m}}(\sqrt{2}\,y_1 + \sqrt{3}\,y_2 + y_3) \\ \theta_2 &= \frac{1}{l\sqrt{6m}}(\sqrt{2}\,y_1 - 2y_3) \\ \theta_3 &= \frac{1}{l\sqrt{6m}}(\sqrt{2}\,y_1 - \sqrt{3}\,y_2 + y_3). \end{aligned} \tag{6.47}$$

Lako se uvjeriti da izrazi za potencijalnu i kinetiļku energiju u novim koordinatama sadrģe samo kvadratne ļlanove:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\left[w_o^2 y_1^2 + (w_0^2 + n^2)y_2^2 + (w_0^2 + 3n^2)y_3^2\right] \\ T &= \frac{1}{2}\left(\dot{y}_1^{\,2} + \dot{y}_2^{\,2} + \dot{y}_3^{\,2}\right). \end{aligned}$$

Lagrangian malih oscilacija trostrukog njihala izraģen kao funkcija normalih koordinata y_k je zbroj Lagrangiana tri neovisna linearna harmoniļka oscilatora:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\dot{y}_k^{\,2} - \frac{1}{2}w_k^2 y_k^{\,2}\right). \qquad (6.48)$$

Rjeġenje jednadġbi gibanja daje zavisnost normalnih modova titranja y_k od vremena:

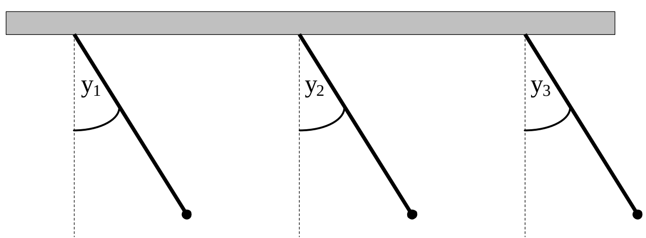
$$y_k(t) = A_k \cos(w_k t + \varphi_k), \qquad (6.49)$$

gdje se amplitude A_k i poļetne faze φ_k odreĽuju iz poļetnih uvjeta.

Proizvoljno gibanje ovog sustava jednoznaļno se moġe prikazati kao linearna kombinacija (superpozicija) tri normalna moda osciliranja sustava y_k svojstvenim frekvencijama w_k sa amplitudama A_k i poļetnim fazama ű$_k$. Zavisnost originalnih generaliziranih koordinata ď$_i$ od vremena dobija se uvrġtavanjem rjeġenja (6.49) u (6.47).

Normalni modovi (naļini) osciliranja ovog sustava lako se vizualiziraju iz odgovarajuĺih svojstvenih vektora:

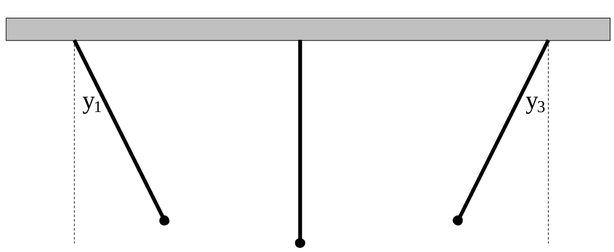
$w_1^2 = w_0^2$:



$y_1 = y_2 = y_3$

– *prvi normalni mod osciliranja znači titranje sva tri njihala unisono, tj. sa istom amplitudom i fazom* (kutovi malih oscilacija na slici su preuveliļani radi preglednosti).

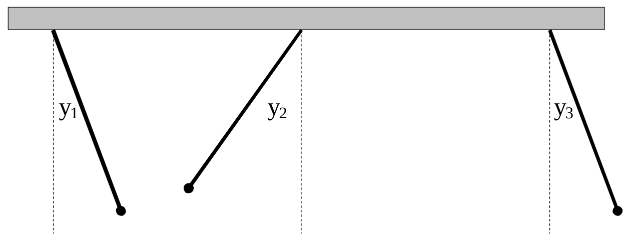
$w_2^2 = w_0^2 + n^2$:



$y_1 = -\,y_3 \qquad y_2 = 0$

– *srednje njihalo miruje, a dva krajnja osciliraju sa istim amplitudama i suprotnim fazama* .

$w_3^2 = w_0^2 + 3n^2$:



$y_1 = y_3 \qquad y_2 = -2y_1$

– *u trećem normalnom modu krajnja njihala titraju unisono, a srednje s dvostruko većom amplitudom i suprotnom fazom*.

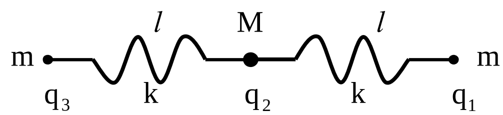
Prva dva normalna moda osciliranja sustava su oļekivana, dok treĺi mod uopĺe nije oļigledan.

Ovaj primjer odliļno ilustrira sam metod traģenja malih oscilacija oko poloģaja stabilne ravnoteģe, ali je sam sustav artificijelan ï tri njihala spojena dvema oprugama!

Pogledajmo zato sada realnije fizikalni sustave.

6.5 Titranje linearne troatomske molekule

Razmotrimo male oscilacije simetriļne linearne troatomske molekule kao ġto je ugljik-dioksid CO_2. Molekulu ļine tri atoma na istoj ravnoj liniji. Ovakav sustav reprezentiramo s tri ļestice na pravcu, dvije s masama m, a treĆa, u sredini, s masom M. U poloģaju stabilne ravnoteģe udaljenost izmeĽu susjednih ļestica je l, kao na Slici 39.



Slika 39. Model simetriļne linearne troatomske molekule

Stvarni, komplicirani meĽuatomski potencijal aproksimirat Ćemo sa dvije idealne opruge konstante k. Jednostavnosti radi, prvo Ćemo razmatrati jedino longitudinalne oscilacije ï titranje duģ linije molekule. Koordinate ļestica oznaļimo q_i, (i = 1,2,3). Potencijalna energija sustava je onda:

$$U = \frac{k}{2}(q_2 - q_1 - l)^2 + \frac{k}{2}(q_3 - q_2 - l)^2.$$

Uvedimo nove koordinate koje oznaļavaju odstupanja ļestica od poloģaja stabilne ravnoteģe:

$$x_i = q_i - q_{i0},$$

gdje je: $q_{20} - q_{10} = q_{30} - q_{20} = l$ kao na Slici 39., pa izraz za potencijalnu energiju postaje:

$$U = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2. \tag{6.50}$$

Kinetiļka energija sustava je:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2. \tag{6.51}$$

Matrice potencijalne i kinetiļke energije su:

$$V = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \tag{6.52}$$

Karakteristiļna jednadģba je:

$$|V - w^2 T| = \begin{vmatrix} k - w^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - w^2 M & -k \\ 0 & -k & k - w^2 m \end{vmatrix} = 0,$$

ġto je kubna jednadġba po w^2:

$$w^2 (k - w^2 m)\{k(m+M) - w^2 m)\} = 0,$$

sa rjeġenjima:

$$w_1 = 0; \quad w_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad w_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}. \tag{6.53}$$

Prva svojstvena frekvencija $w_1 = 0$ moġe na prvi pogled izgledati iznenaĽujuĺe.

Zaista, ovo rjeġenje nije oscilatorno gibanje jer je pripadna jednadġba gibanja: $\ddot{x}_1 = 0$, te ono predstavlja jednoliku translaciju cijelog sustava. Ovakvo rjeġenje se javlja jer je molekulu moguĺe translirati duġ njene osi bez ikakve promjene potencijalne energije. Pretpostavili smo da sustav ima tri stupnja slobode za vibracijsko gibanje duġ osi (uzeli smo tri generalizirane koordinate x_i), dok je, u stvarnosti, jedan od od njih stupanj slobode gibanja molekule kao krutog tijela.

Najļeġĺe se problem malih oscilacija oko poloġaja stabilne ravnoteġe reformilira tako da se odmah eliminiraju nulti modovi koji ne predstavljaju titranje oko poloġaja stabilne ravnoteġe nego translacijsko ili rotacijsko gibanje cijelog sustava kao krutog tijela. Stupnjevi slobode gibanja krutog tijela mogu se eliminirati odmah na poļetku zahtijevom da je ukupni impuls molekule nula (tj. zahtijevom da centar mase sustava miruje) za translacijske, te zahtijevom da je ukupni angularni moment molekule nula za rotacijske stupnjeve slobode gibanja.

Pogledajmo druge dvije svojstvene frekvencije.

Frekvencija w_2 je svojstvena frekvencija osciliranja mase m na opruzi konstante k, pa oļekujemo da u titranju sudjeluje samo krajnji atomi (sa suprotnim fazama), dok srediġnji atom miruje. Jedino u treĺem normalnom modu sudjeluje i srediġnji atom.

Potvrdimo ovo traġenjem svojstvenih vektora koji su odreĽeni jednadġbama:

$$\begin{aligned} &(k - w_j^2 m)\, x_{1j} - k\, x_{2j} = 0 \\ &k\, x_{1j} + (2k - w_j^2 M)\, x_{2j} - k\, x_{3j} = 0 \\ &k\, x_{2j} + (k - w_j^2 m)\, x_{3j} = 0, \end{aligned} \tag{6.54}$$

zajedno s uvjetom normiranja:

$$m(x_{1j}^2 + x_{3j}^2) + M\, x_{2j}^2 = 1. \tag{6.55}$$

Za $w_1 = 0$ iz prve i treće jednadžbe (6.54) slijedi da su sve tri komponente jednake: $x_{11} = x_{21} = x_{31}$, što iz uvjeta normiranja daje:

$$x_{11} = x_{21} = x_{31} = \frac{1}{\sqrt{2m+M}},$$

tj. sva tri atoma imaju istu elongaciju kao što se i očekuje kod jednolike translacije.

Za drugu svojstvenu vrijednost faktori $(k - w_2^2 m)$ iščezavaju, pa prva i treća jednadžba (6.54) pokazuju da je $x_{22} = 0$, a druga da je $x_{32} = -x_{12}$, te iz uvjeta normiranja dobijamo:

$$x_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m}}; \qquad x_{22} = 0; \qquad x_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

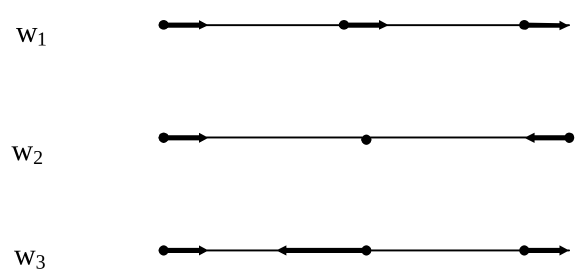
Prema očekivanju vanjski atomi titraju u fazi sa istom amplitudom, a srednji atom miruje.

Konačno, za w_3, iz prve i treće jednadžbe (6.54) dobijamo $x_{13} = x_{33}$, pa je iz uvjeta normiranja:

$$x_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}}; \qquad x_{23} = \frac{-1}{\sqrt{M\left(1+\frac{M}{2m}\right)}}; \qquad x_{33} = \frac{1}{\sqrt{2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)}}.$$

Znači, dva vanjska atoma titraju s istom amplitudom i fazom, a srednji titra u suprotnij fazi sa drugačijom amplitudom.

Sva tri normalna moda longitudinalnih oscilacija linearne simetrične troatomske molekule prikazana su na Slici 40.



Slika 40. Longitudinalno titranje linearne simetrične troatomske molekule

Očigledno je da prvi normalni mod ne pretstavlja titranje molekule već njenu translaciju bez ikakve promjene međuatomskih rastojanja.

Bilo koje longitudinalno titranje molekule koje ne uključuje translaciju molekule kao krutog tijela je linearna kombinacija normalnih modova s frekvencijama w_2 i w_3.

Ilustracije radi, riješimo isti problem eliminirajući nulti mod odmah na početku.

Zahtijev da centar mase molekule miruje, tj. da je $q^{CM} = q_0^{CM}$, daje:

$$m\,(x_1 + x_3) + M\,x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{m}{M}\,(x_1 + x_3) \tag{6.56}$$

i omoguĺava da iz Lagrangiana eliminiramo jednu koordinatu, recimo x_2. Iz (6.50) i (6.51) za kinetiļku i potencijalnu energiju imamo onda u matriļnoj notaciji:

$$T = \frac{m}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 & \dot{x}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+a & a \\ a & 1+a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_3\end{pmatrix} \tag{6.57}$$

i

$$U = \frac{m}{2}\,w_0^2\begin{pmatrix}x_1 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+b & b \\ b & 1+b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_3\end{pmatrix}, \tag{6.58}$$

gdje je:

$$a \equiv \frac{m}{M}; \qquad b \equiv 2a\,(1 + a)\,; \qquad w_0^2 \equiv \frac{k}{m}.$$

<u>Dobijamo problem s dva stupnja slobode.</u>

Vidimo da ni kinetiļka ni potencijalna energija nisu dijagonalne matrice.

Lako se nalaze rjeġenja karakteristiļne jednadġbe $\det(V - w^2 T) = 0$:

$$w_1^2 = w_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{i} \qquad w_2^2 = \frac{1+2b}{1+2a}\,w_0^2 = \left(1 + \frac{2m}{M}\right)\frac{k}{m}. \tag{6.59}$$

Kako je ovo jednostavan problem s dva stupnja slobode gibanja, a pouļeni veĺ poznatim rjeġenjem problema prikazanim na Slici 40., umjesto da rjeġavamo cijeli svojstveni problem moġemo odmah pogoditi normalne koordinate x_s i x_a:

$$x_s = x_1 + x_3 \qquad \text{i} \qquad x_a = x_1 - x_3. \tag{6.60}$$

Izraġene pomoĺu simetriļne i antisimetriļne kombinacije koordinata, originalne varijable su:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\,x_s + x_a) \qquad \text{i} \qquad x_3 = \frac{1}{2}(\,x_s - x_a),$$

ġto zamjenom direktno u (6.50) i (6.51) za kinetiļku i potencijalnu energiju daje:

$$T = \frac{m}{4}\left(1+\frac{2m}{M}\right)\dot{x}_s^2 + \frac{m}{4}\,\dot{x}_a^2 \tag{6.61}$$

$$U = \frac{m}{4}\left(1+\frac{2m}{M}\right)^2\frac{k}{m}\,x_s^2 + \frac{m}{4}\,\frac{k}{m}\,x_a^2. \tag{6.62}$$

Vidimo da su i kinetiļka i potencijalna energija dijagonalne u novim varijablama (ne sadrģe mjeģane ļlanove $x_s x_a$), ģto znaļi da smo pravilno odabrali normalne koordinate x_s i x_a.

Prema (6.61) i (6.62), Lagrangian longitudinalnih malih oscilacija simetriļne linearne troatomske molekule moģe se napisati kao zbroj:

$$L = \frac{m}{4} L_s + \frac{m}{4}\left(1 + \frac{2m}{M}\right) L_a, \tag{6.63}$$

gdje su:

$$L_a = \dot{x}_a^{\,2} - w_1^2 x_a^{\,2} = \dot{x}_a^{\,2} - \frac{k}{m} x_a^{\,2} \tag{6.64}$$

$$L_s = \dot{x}_s^{\,2} - w_2^2 x_s^{\,2} = \dot{x}_s^{\,2} - \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \frac{k}{m} x_s^{\,2}, \tag{6.65}$$

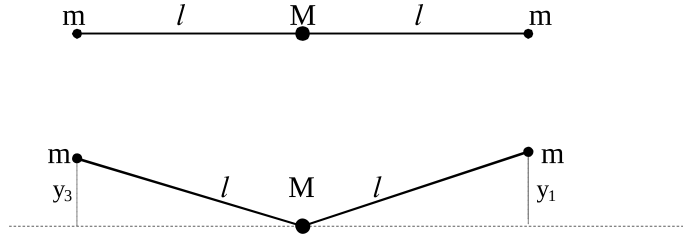
Lagrangiani dva neovisna linearna harnoniļka oscilatora svojstvenih frekvencija:

$$w_a^2 = w_1^2 = w_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{i} \quad w_s^2 = w_2^2 = \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \frac{k}{m},$$

koje su toļno jednake frekvencijama w_1 i w_2 u prijaģnjoj notaciji. Konstante koje mnoģe L_a i L_s u (6.63) nemaju nikakvo fizikalno znaļenje jer oļigledno ne utjeļu na jednadģbe gibanja.

Razmatrali smo samo titraje duģ osi molekule. Jasno je da uz ove longitunalne postoje i transverzalni stupnjevi slobode titranja (okomiti na os molekule).

Kompletnosti radi, razmotrimo i transverzalna titranja ove molekule. U prvoj aproksimaciji, potencijalna energija malih transverzalnih oscilacija zavisi samo od kuta mMm (tj. njegovog odstupanja od 180°), jer meĽuatomske sile u molekuli smatramo centralnim i zavisnim samo o udaljenosti atoma. Minimalna promjena potencijalne energije molekule pri transverzalnim pomacima Íe nastati ako rastojanje atoma mM i Mm ostane nepromijenjeno *l* (sila izmeĽu tih atoma se ne mijenja, a mijenja se samo, u pravilu slabija sila izmeĽu dva mm atoma) kao na Slici 41.



Slika 41. Transverzalne male oscilacije troatomske molekule

Prvo treba eliminirati translaciju i rotaciju molekule kao cjeline. Zahtijev da pri transverzalnim titrajima centar mase ostaje nepomičan

$$m(y_1 + y_3) + My_2 = 0, \tag{6.66}$$

eliminira translaciju molekule duž y-osi, te omogućuje eliminaciju jedne koordinate, recimo y_2. Za eliminiranje rotacije molekule zahtijevamo da je angularni moment molekule oko osi kroz M nula, što daje:

$$my_1 - my_3 = 0, \tag{6.67}$$

i znači da razmatramo samo simetrične tranzverzalne deformacije molekule za koje je $y_1 = y_3$ kao na Slici 41.

Najjednostavniji način da izračunamo potencijalnu energiju je da zamislimo da se sila između dva mm atoma može aproksimirati idealnom oprugom konstante k′ i ravnotežne duljine $2l$. Kosinusni teorem za trokut sa Slike 41. za kvadrat kontrakcija opruge uslijed transverzalnih pomaka daje:

$$(\Delta l)^2 = 2l^2(1 + \cos\alpha) = 2l^2(1 - \cos\delta)\ ,$$

gdje je $\delta = \pi - \alpha$ odstupanje kuta mMm od π. Za malo δ u prvoj aproksimaciji je:

$$U = \frac{1}{2}k'(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k' l^2 \delta^2\ . \tag{6.68}$$

Prema Slici 41. za malo δ je i:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_3 \approx 2\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{l}[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]. \tag{6.69}$$

Iz (6.66), (6.67) i (6.69) je:

$$y_2 = -\frac{ml}{2m+M}\delta\,; \quad y_1 = y_3 = \frac{Ml}{2(2m+M)}\delta\,,$$

što dozvoljava da se cijeli Lagrangian transverzalnih malih oscilacija linearne troatomske molekule izrazi pomoću samo jedne generalizirane koordinate δ, tj.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^{\,2} + \dot{y}_3^{\,2}) + \frac{1}{2}M\dot{y}_2^{\,2} - \frac{1}{2}k' l^2\delta^2 = \frac{mMl^2}{4(2m+M)}[\dot{\delta}^2 - \omega^2\delta^2]. \tag{6.70}$$

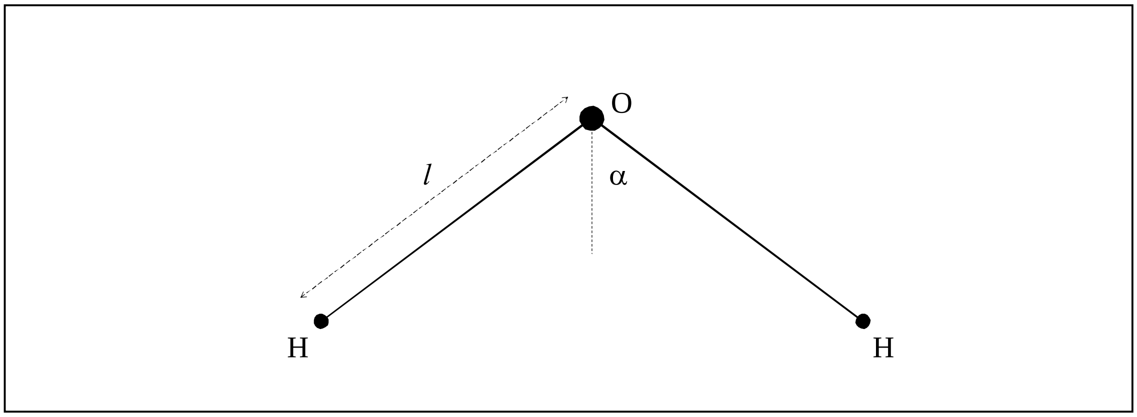
Zadnji izraz jasno pokazuje da je kvadrat svojstvene frekvencije transverzalnih malih oscilacija linearne troatomske molekule:

$$\omega^2 = \frac{2k'(2m+M)}{mM}\,. \tag{6.71}$$

Linearna troatomska molekula ima tri stupnja slobode titranja – dva za longitudinalne i jedan za transverzalne oscilacije sa svojstvenim frekvencijama određenim u (6.59) i (6.71).

6.6 Titranje molekule vode

Molekula vode H_2O je sustav od tri interagujuĺe ļestice koje zbog kemijskih veza tvore stabilni trokut u ravnini kao na Slici 42, na kojoj radi jednostavnosti, dimenzije atoma nisu prikazane u stvarnom razmjeru.



Slika 42. Atomska konfiguracija molekule vode

Ravnoteģna OH udaljenost je $l = 0,958 \times 10^{-10}$ m, a kut HOH je $2\alpha = 104,5^o$. Ako apsorpcija elektromagnetske radijacije (fotona) rezultira djelovanjem ņslabihò sila (sila koje ne naruģavaju meĽuatomska vezanja) na H_2O molekulu, doĺi ĺe do vibracija atoma oko poloģaja stabilne konfiguracije u molekuli. Vibracije molekule u prvoj aproksimaciji mogu se analizirati metodom malih oscilacija.

Odredimo prvo broj stupnjeva slobode molekularnih titraja. Poloģaj sustava od tri ļestice opisan je s devet koordinata. Ali, kao i svako kruto tijelo, H_2O molekula ima ģest stupnjeva slobode za gibanje kao cjelina ï tri za translatorno i tri za rotaciono gibanje. Znaļi, postoje svega tri stupnja slobode vibracije molekule vode. Isti zakljuļak se dobije razmatranjem veza (constraints) koje ograniļavaju gibanje molekule. Molekula je planarna pa za ravninu gibanja moģemo odabrati xy-ravninu, tj. za svaku ļesticu vaģi: $z_i = 0$, (i = 1,2,3). Gibanje molekule u xy-ravnini ograniļavaju joģ tri veze: dvije eliminiraju translaciju zahtijevom da centar mase molekule miruje, tj. $x_{cm} = y_{cm} = 0$, a zadnja, ģesta veza eliminira rotaciju u xy-ravnini zahtijevom da je angularni moment molekule nula. MeĽu devet koordinata ļestica postoji ģest veza koje eliminiraju gibanje molekule vode bez ikakve deformacije, ģto znaļi da postoje tri stupnja slobode vibracionog gibanja.

Pitanje je koje tri generalizirane koordinate odabrati za opis titranja H_2O molekule? Pametan odabir generaliziranih koordinata moģe znaļajno pojednostaviti rjeģavanje problema. Ģest koordinata ļestica (atoma) u ravnini: (x_i , y_i), (i = 1,2,3) oļito nisu najbolji izbor jer nisu linearno nezavisne zbog veza:

$$
\begin{aligned}
x_{cm} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0, \\
y_{cm} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m(y_1 + y_3) + My_2 = 0, \qquad (6.72) \\
\vec{L} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad (x_1 + x_3)\cos\alpha + (y_1 - y_3)\sin\alpha = 0,
\end{aligned}
$$

gdje je m masa atoma vodika, a M masa atoma kisika.

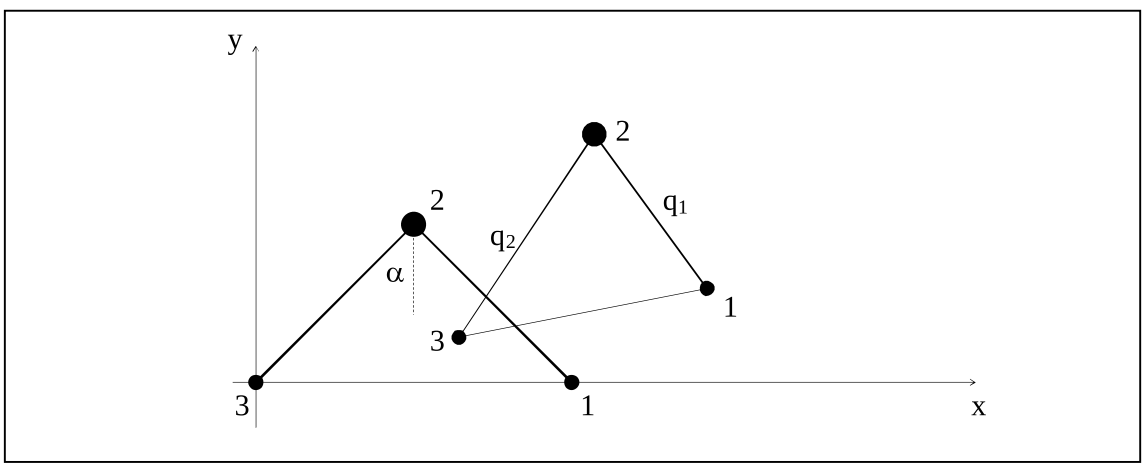
PronaĽimo prvo koordinate koje su pogodne za opis potencijalne energije. U aproksimaĺiji malih oscilacija kemijska veza O i H atoma zamjenjuje se harmoniļkom silom koja izaziva titranja duģ OH pravca ļija je potencijalna energija $\frac{1}{2}kq_j^2$, gdje j = 1,2 oznaļava prvi i drugi H atom. Konstanta k mjeri silu koja mijenja meĽusobnu udaljenost O i H atoma *l*. Sila meĽu dva H atoma aproksimira se harmoniļkom silom koja izaziva oscilacije kuta α ļija je potencijalna energija $\frac{1}{2}k' l^2\delta^2$ kao u sluļaju transverzalnih titraja linearne troatomske molekule. Potencijalna energija titraja molekule vode izraģena pomoĺu generaliziriranih koordinata $\{q_1, q_2, \delta\}$ je onda:

$$U = \frac{1}{2}kq_1^2 + \frac{1}{2}kq_2^2 + \frac{1}{2}k' l^2\delta^2. \tag{6.73}$$

Lako je prema Slici 43. vidjeti da su pomaci duģ OH pravaca tj. koordinate q_j, izraģene pomoĺu Kartezijevih koordinata ļestica:

$$q_1 = (x_1 - x_2)\sin\alpha + (y_2 - y_1)\cos\alpha; \quad q_2 = (x_2 - x_3)\sin\alpha + (y_2 - y_3)\cos\alpha. \tag{6.74}$$

Koordinate $\{q_1, q_2, \delta\}$ su najpogodnije za izraģavanje potencijalne energije koja je zbroj samo dijagonalnih ļlanova.



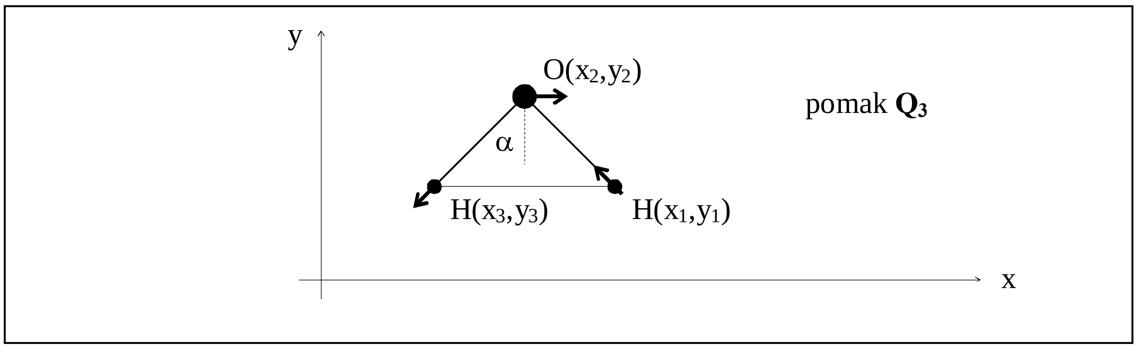
Slika 43. Opĺi pomak H_2O molekule u xy-ravnini

Ali, probamo li koordinate $\{q_1, q_2, \delta\}$ iskoristiti za raļunanje kinetiļke energije molekule $T = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2\right)$ dobit ĺemo vrlo kompliciran izraz, ģto znaļi da sigurno postoji pametniji izbor generaliziranih koordinata.

U teoriji grupa se pokazuje da ĺe, kao i u primjeru linearne troatomske molekule, problem biti jednostavniji za rjeģavanje u onim koordinatama koje maksimalno oļuvavaju inherentnu simetriju H_2O molekule. Molekula vode ima jednu os simetrije i dvije ravnine simetrije.

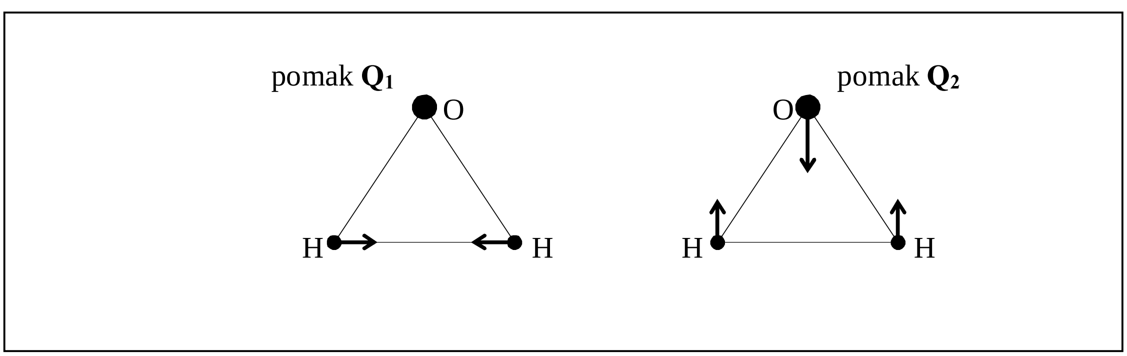
Ali, samo su dvije nezavisne operacije simetrije, recimo, rotacije za kut koji je multiplet od 180^o oko osi simetrije koja je pravac koji polovi kut HOH, kao i refleksije u odnosu na ravninu molekule. Obje te operacije simetrije samo zamjenjuju jedan atom vodika drugim i oļigledno ostavljaju molekulu vode nepromjenjenom.

Probajmo pronaĺi opĺe pomake H_2O molekule u skladu sa svojstvima simetrije koji nisu ni translacija, ni rotacija molekule kao cjeline. Lako se vidi da postoji samo jedan ñnesimetriļniò pomak prikazan na Slici 44. koji zadovoljava sve uvjete ï nije invarijantan pri operacijama simetrije i pomaci H atoma duģ pravaca OH spreļavaju rotaciju molekule kao cjeline oko osi kroz kisikov atom. Translacije molekule nema jer je zbroj y-komponenti pomaka H atoma nula, a pozitivni x-pomak O atoma poniģtava zbroj x-komponenti pomaka H atoma. Taj pomak ļestica odaberimo kao generaliziranu koordinatu Q_3.



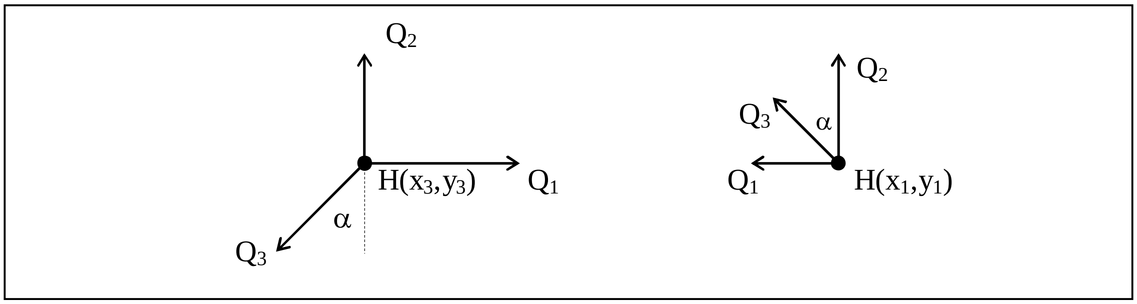
Slika 44. Generalizirana koordinata Q_3

Postoje i dva linearno nezavisna simetriļna pomaka prikazana na Slici 45. koje odaberimo za generalizirane koordinate Q_1 i Q_2 . Q_1 i Q_2 ostaju nepromjenjeni pod djelovanjem operacija simetrije molekule vode.



Slika 45. Simetriļne generalizirane koordinate Q_1 i Q_2

Veza Kartezijevih koordinata ļestica i novih generaliziranih koordinata lako se nalazi sa Slike 46. koja prikazuje individualne pomake atoma vodika za generalizirane koordinate Q_i (i = 1,2,3):



Slika 46. Pomaci atoma vodika za generalizirane koordinate Q_i

$$x_1 = -\,Q_1\ \text{ï}\ Q_3 \sin\alpha\,; \qquad y_1 = Q_2 + Q_3 \cos\alpha\,; \tag{6.75}$$

$$x_3 = Q_1\ \text{ï}\ Q_3 \sin\alpha\,; \qquad y_3 = Q_2 - Q_3 \cos\alpha\,. \tag{6.76}$$

Uvjet (6.72) eliminiranja translacije molekule prema (6.75) i (6.76) za koordinate atoma kisika daje:

$$x_2 = -\frac{m}{M}(x_1 + x_3) = 2\frac{m}{M} Q_3 \sin\alpha\,; \qquad y_2 = -\frac{m}{M}(y_1 + y_3) = -\,2\frac{m}{M} Q_2\,; \tag{6.77}$$

Sad se kinetiļka energiju $T = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^{\,2} + \dot{y}_i^{\,2}\right)$ molekule vode moģe izraziti u novim generaliziranim koordinatama. Deriviranjem po vremenu izraza (6.75) – (6.77) za kinetiļku energiju molekule dobije se:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\,j=1}^{3} T_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j\,, \tag{6.78}$$

gdje su jedino tri dijagonalna koeficijenta razliļita od nule:

$$T_{11} = 2m\,, \quad T_{22} = 2am\,, \quad T_{33} = 2bm\,, \tag{6.79}$$

a nove konstante su:

$$a \equiv 1 + 2\frac{m}{M} \quad \text{i} \quad b \equiv 1 + 2\frac{m}{M}\sin^2\alpha\,. \tag{6.80}$$

Treba izraziti i potencijalnu energiju molekule vode (6.73) u novim generaliziranim koordinatama. Prema (6.74) i (6.75)–(6.77) je:

$$q_1 = -\,Q_1 \sin\alpha - aQ_2 \cos\alpha - bQ_3\,; \qquad q_2 = -\,Q_1 \sin\alpha - aQ_2 \cos\alpha + bQ_3\,. \tag{6.81}$$

Da se naĽe veza koordinate δ i novih generaliziranih koordinata treba razmotriti promjenu kuta α molekule pri simetriļnim pomacima pomacima Q_1 i Q_2 . U aproksimaciji malih oscilacija kut α ostaje nepromjenjen pri infinitezimalnom pomaku Q_3 ï preciznije, promjena potencijalne energije srazmerna je s $Q_3^{\,4}$.

Ako se pri infinitezimalnom pomaku Q_1 kut α promijeni za infinitezimalni kut $\frac{\breve{u}_1}{2}$, koristeĺ i:

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{h}{d}$, gdje je visina molekule $h = l\cos\alpha$, a $d = l\sin\alpha$ polovica baze molekule, dobija se:

$$\mathrm{ctg}\left(\breve{U} + \frac{\breve{u}_1}{2}\right) - \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{h}{d - Q_1} - \frac{h}{d} \cong \frac{hQ_1}{d^2} = \frac{Q_1 \cos\breve{U}}{l \sin^2\breve{U}},$$

pa je razvojem u Taylorov red:

$$\mathrm{ctg}\left(\breve{U} + \frac{\breve{u}_1}{2}\right) \cong \mathrm{ctg}\,\alpha - \frac{\breve{u}_1}{2\sin^2\breve{U}}, \text{ te:}$$

$$\breve{u}_1 = -\frac{2}{l} Q_1 \cos\breve{U}. \tag{6.82}$$

Za infinitezimalni pomak Q_2 je:

$$\mathrm{ctg}\left(\breve{U} + \frac{\breve{u}_2}{2}\right) - \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{h - Q_2 - 2\frac{m}{M}Q_2}{d} - \frac{h}{d} \cong -\frac{aQ_2}{l\sin\breve{U}},$$

ġto na isti naļ in razvojem u red daje:

$$\breve{u}_2 = \frac{2}{l} a\, Q_2 \sin\breve{U}. \tag{6.83}$$

Prema (6.82) i (6.83) je konaļ no:

$$\breve{u} = \breve{u}_1 + \breve{u}_2 = \frac{2}{l}\left(-Q_1 \cos\breve{U} + a\, Q_2 \sin\breve{U}\right). \tag{6.84}$$

Uvrġtavanje (6.81) i (6.84) u (6.73) za potencijalnu energiju molekule vode u generaliziranim koordinatama Q_i dobija se:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{3} V_{ij} Q_i Q_j\,, \tag{6.85}$$

gdje su jedini koeficijenti razliļ iti od nule:

$$\begin{gathered} V_{11} = 2k\sin^2\alpha + 4k'\cos^2\alpha; \quad V_{22} = 2a^2(k\cos^2\alpha + 2k'\sin^2\alpha); \quad V_{33} = 2b^2k, \\ V_{12} = V_{21} = 2a(k - 2k')\sin\alpha\cos\alpha. \end{gathered} \tag{6.86}$$

Jasno je da su generalizirane koordinate Q_i dobro odabrane ï kinetiļ ka energija sadrġi samo dijagonalne ļ lanove, a u potencijalnoj energiji jedini nedijagonalni elementi razliļ iti od nule su $V_{12} = V_{21}$.

Svojstvene frekvencije određuju se iz karakteristične jednadžbe (6.18) koja je za molekulu vode:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - w^2 T_{11} & V_{12} & 0 \\ V_{21} & V_{22} - w^2 T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} - w^2 T_{33} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{6.87}$$

i odmah daje jednu svojstvenu frekvenciju:

$$w_3^2 = \frac{V_{33}}{T_{33}} = b\frac{k}{m} = \left(1 + 2\frac{m}{M}\sin^2\alpha\right)\frac{k}{m}\,. \tag{6.88}$$

Druge dvije svojstvene frekvencije su rješenja jednadžbe:

$$w^4 - w^2\frac{T_{11}V_{22} + T_{22}V_{11}}{T_{11}T_{22}} + \frac{V_{11}V_{22} - V_{12}^{\,2}}{T_{11}T_{22}} = 0\,, \tag{6.89}$$

gdje je:

$$\frac{T_{11}V_{22} + T_{22}V_{11}}{T_{11}T_{22}} = \frac{ak + 2k'}{m}\cos^2\alpha + \frac{k + 2ak'}{m}\sin^2\alpha, \tag{6.90}$$

i

$$\frac{V_{11}V_{22} - V_{12}^{\,2}}{T_{11}T_{22}} = 2a\frac{kk'}{m^2}\,. \tag{6.90´}$$

Za numeričko rješavanje zgodnije je rješenja jednadžbe (6.89) kombinirati u par jednadžbi:

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{T_{11}V_{22} + T_{22}V_{11}}{T_{11}T_{22}} = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\cos^2\alpha\right) + \frac{2k'}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\sin^2\alpha\right), \tag{6.91}$$

$$w_1^2\, w_2^2 = \frac{V_{11}V_{22} - V_{12}^{\,2}}{T_{11}T_{22}} = 2\left(1 + 2\frac{m}{M}\right)\frac{kk'}{m^2}, \tag{6.92}$$

u kojima su, uz izraz (6.88), svojstvene frekvencije titraja izražene preko parametara molekule vode m, M, k, k´ i α.

U eksperimentima se puno lakše mjere frekvencije vibracija i kut α, pa se konstante harmoničkih sila određuju iz (6.88) i (6.92). Relacija (6.91) se onda koristi za provjeru konzistentnosti i ocjenu valjanosti aproksimacije.

Za molekulu vode je eksperimentalno izmjereno:

$$\frac{w_1}{2\text{´}\, c} = 3652\ \text{cm}^{-1} \qquad \frac{w_2}{2\text{´}\, c} = 1595\ \text{cm}^{-1} \qquad \frac{w_3}{2\text{´}\, c} = 3756\ \text{cm}^{-1}, \qquad (6.93)$$

gdje je brzina svjetlosti u vakuumu $c = 3 \times 10^8\,\text{ms}^{-1}$.

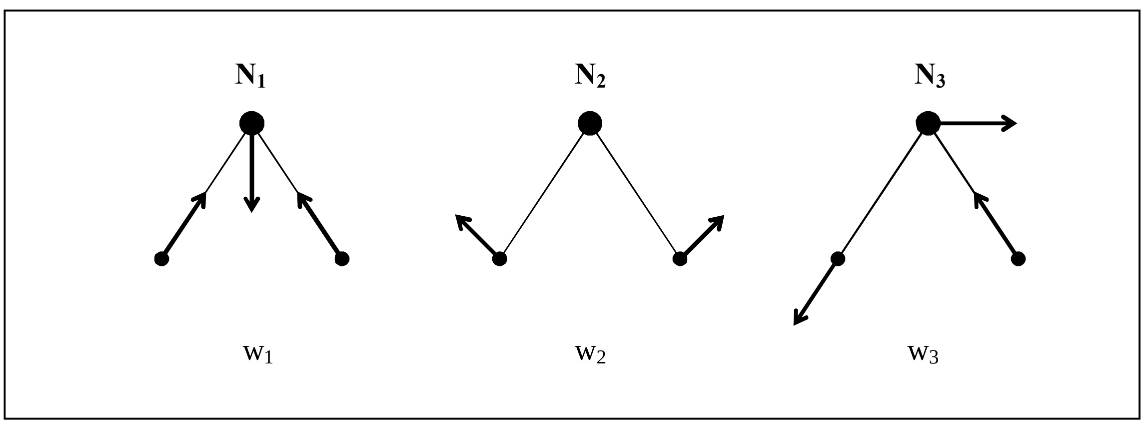
Numeriļke vrijednosti svojstvenih frekvencija (6.93) i kuta $2\alpha = 104{,}5^o$ uz vrijednosti atomskih masa m = 1,00797u i M = 15,9994u ($u = 1{,}660539 \times 10^{-27}\,\text{Kg}$) daju konstante sila:

$$k = 775\,\frac{\text{N}}{\text{m}}; \qquad \frac{k\text{´}}{l^2} = 68{,}7\,\frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Kako je efektivna konstanta $\frac{k\text{´}}{l^2}$ za red veliļine manja od k, kemijske veze u molekuli vode se puno lakģe savijaju (mijenja kut α) nego isteģu (mijenja udaljenost l). Provjera uvrģtavanjem numeriļkih vrijednosti u (6.91) pokazuje da se lijeva i desna strana razlikuju svega za oko 2%, ģto se tumaļi kao prisutnost make komponente anharmoniļke sile meĽu atomima.

Normalne koordinate moģemo naĺi na uobiļajeni naļin rjeģavajuĺi karakteristiļnu jednadģbu (6.87) i nalazeĺi svojstvene vektore. Kako kinetiļka (6.78) i potencijalna energija (6.86) sadrģe samo kvadratne ļlanove po Q_3, jasno je da koordinata $Q_3 \equiv N_3$ jeste jedan normalni mod titranja molekule vode sa svojstvenom frekvencijom (6.88).

Preostala dva normalna moda osciliranja N_1 i N_2 su linearne kombinacije simetriļnih koordinata Q_1 i Q_2. Dijagonalizacijom matrice potencijalne energije (6.86) za prva dva stupnja slobode moģe se pokazati da normalni mod N_1 predstavljaju titranje atoma vodika uzduģ OH veza, dok N_2 predstavlja titraje okomite na pravce OH veza, kao na Slici 47.



Slika 47. Normalni modovi titranja molekule vode
(pomaci atoma su preuveliļani radi jasnoĺe)

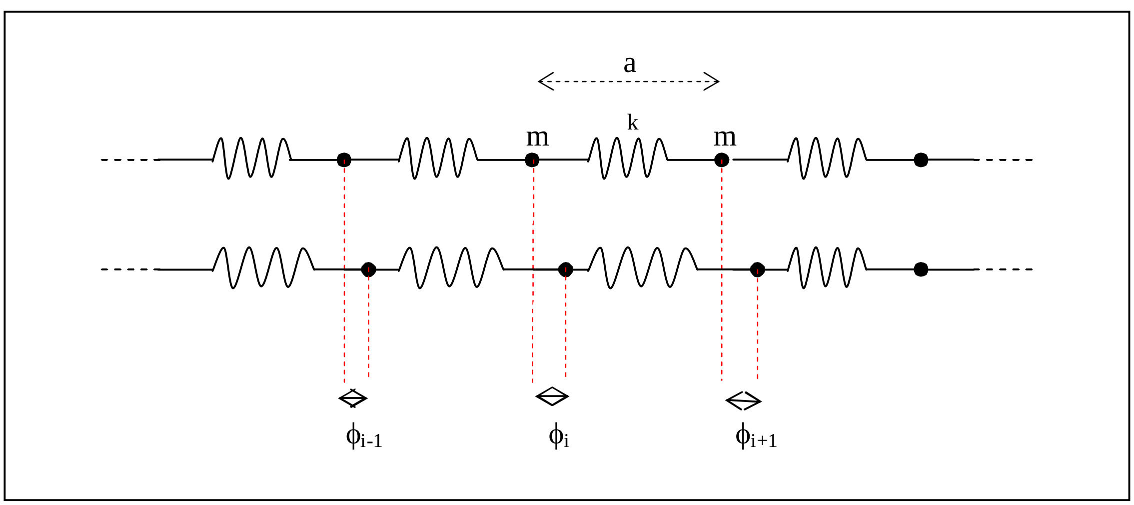
7. Mehanika kontinuuma

Do sada smo razmatrali gibanje sustava sa konaļno ili prebrojivo mnogo stupnjeva slobode. Problemi gibanja deformabilnih tijela ili fluida zahtijevaju poopĺenje klasiļne mehanike sustava ļestica i krutih tijela na mehaniku sustava sa neprebrojivo mnogo stupnjeva slobode gibanja ï mehaniku kontinuuma tj. klasiļnu teoriju polja.

Materija je diskretna, a ne kontinuirana. Ultimativno, materija se sastoji od elementarnih ļestica koje su kvantne, a ne klasiļne ļestice. Objekti u svemiru su izgraĽeni od molekula koji se sastoje od atoma sastavljenih od elementarnih ļestica. Ipak, postoji ogromna skupina problema gibanja razliļitih fizikalnih sustava koja se moģe klasiļno razmatrati potpuno zanemarujuĺi stvarnu kompliciranu molekularnu strukturu tijela koja ļine te sustave. Ģelimo aproksimativnu klasiļnu teoriju koja moģe opisati svojstva i gibanja materijalnih objekata, ali koja ne zavisi od individualih svojstava pojedinih ļestica (molekula). U mehanici kontinuuma svako tijelo smatramo sastavljenim od neprebrojivo mnogo prostorno distribuiranih klasiļnih ļestica. Materiju od koje je tijelo sastavljeno smatramo beskonaļno djeljivom ï kontinuiranom. Svako tijelo smatramo zbrojem individualnih infinitezimalnih 3-dimenzionalnih elemenata materijala pri ļemu svaki pojedini element tretiramo kao jednu klasiļnu ļesticu. Jasno je da takva teorija moģe dobro opisati samo Ămakroskopskañ svojstva tijela ï vrijednosti fizikalnih veliļina definiranih na skalama duljina mnogo veĺim od dimenzija pojedinih molekula. Npr., oļekujemo da ĺe mehanika kontinuuma dobro opisati prostiranje zvuka (frekvencija 20 - 20000 Hz, tj. valne duljine 17 m ï 1.7 cm) u zraku, ali nikako ne oļekujemo da ĺe isto vrijediti za prostiranje 200 GHz ultrazvuka (valna duljina 1.7×10^{-9} m).

7.1 Prijelaz na kontinuirani sustav

Da razumijemo prijelaz sa mehanike sustava ļestica na mehaniku kontinuuma uzmimo najjednostavniji primjer ï longitudinalne titraje beskonaļnog jednodimenzionog elestiļnog kristala. Smatramo da je taj kontinuirani ğtap naļinjen od diskretnih klasiļnih ļestica mase m spojenih idealnim oprugama konstante k i duljine a bez mase, kao na Slici 48. Svaka ļestica moģe titrati duģ osi kristala koju ĺemo odabrati za x-os.



Slika 48.

Ovaj problem je očigledno poopćenje problema titranja linearne molekule iz Poglavlja **6.5** i može se riješiti standardnim tretmanom malih oscilacija. Označimo li pomak iz ravnotežnog položaja (elongaciju) i-te čestice ϕ_i , kinetička energija sustava je

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m\dot{\phi}_i^2 . \tag{7.1}$$

Potencijalna energija je zbroj elastičnih potencijalnih energija svake opruge

$$U = \frac{1}{2}\sum_i k(\phi_{i+1} - \phi_i)^2. \tag{7.2}$$

pa je Lagrangian sustava

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_i\left[m\dot{\phi}_i^2 - k(\phi_{i+1} - \phi_i)^2\right] . \tag{7.3}$$

Da se jednostavnije nađe kontinuum limes uvedimo prvo u Lagrangian ravnotežnu udaljenost čestica a koja je ravnotežna duljina opruge

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\phi}_i^2 - ka\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a}\right)^2\right] = \sum_i aL_i . \tag{7.4}$$

Iz Lagrangiana (7.4) slijede jednadžbe gibanja za svaku generaliziranu koordinatu ϕ_i

$$\frac{m}{a}\ddot{\phi}_i - ka\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a^2}\right) + ka\left(\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{a^2}\right) = 0. \tag{7.5}$$

U kontinuum limesu, kad a i m teže nuli, m/a teži linijskoj gustoći kristala μ (masa po jedinici duljine). Pretpostavimo da je kristal linearno elastičan, tj. da vrijedi Hookov zakon: F = Eε gdje je F sila tenzije, a E je Youngov modul elestičnosti kristala. Za naš jednodimenzioni lanac relativna deformacija (elongacija po jedinici duljine) je $\varepsilon = \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a}$, pa je sila potrebna da se opruga istegne za taj iznos

$$F = k(\phi_{i+1} - \phi_i) = ka\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a}\right), \tag{7.6}$$

što znači da je E = ka u kontinuum limesu. Prelazak na kontinuum zahtijeva da indeks „i" koji označava položaj čestice u lancu zamijenimo kontinuiranom koordinatom x, tako da generalizirana koordinata – pomak iz ravnotežnog položaja čestice kristala u točci x postaje kontinuirana finkcija (polje) koju ćemo označavati $\phi(x)$. Bolja oznaka je ϕ (x,t), jer je polje funkcija nezavisnih prostorno-vremenskih varijabli x i t. Članovi u (7.4) se onda u kontinuum limesu prirodno generaliziraju na:

$$a \to dx, \qquad \sum_i a\ldots \to \int dx \ldots , \qquad \dot{\phi}_i \to \frac{\partial\phi(x)}{\partial t} = \dot{\phi}, \qquad \frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{a} = \frac{\phi(x+a)-\phi(x)}{a} \to \frac{\partial\phi}{\partial x}, \tag{7.7}$$

i Lagrangian kontinuiranog jednodimenzionog elastičnog kristala postaje

$$L = \frac{1}{2}\int dx\left[\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] = \int dx\, \mathcal{L} , \tag{7.8}$$

gdje $\mathcal{L}$ označava gustoću Lagrangiana.

Prema zadnjoj relaciji u (7.7), drugi i treći član u Lagrangeovim jednadžbama gibanja (7.5) u kontinuum limesu postaju

$$-\frac{E}{a}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x-a}\right] \to -E\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\,,$$

pa Lagrangeova jednadžba elastičnih longitidinalnih deformacija jednodimenzionog kristala postaje parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda – valna jednadžba

$$\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t} - E\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x} = 0 \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t} = 0, \tag{7.9}$$

što daje poznati izraz za brzinu longitudinalnih valova u kristalu

$$v = \sqrt{\frac{E}{\mu}}\,. \tag{7.10}$$

U prijelazu na kontinuum mehaniku ili teoriju polja najvažnije je točno razumjeti ulogu kontinuirane prostorne koordinate x čestice kristala koja zamjenjuje diskretni indeks „i“ (x označava, tj. „imenuje“ česticu materijala u prostornoj točci čija koordinata je x). Prema pravilu $\phi_i(t) \to \phi(x,t)$ generalizirana koordinata (elongacija) pridružena čestici materijala u točci x u trenutku t je vrijednost skalarnog polja $\phi(x,t)$ u toj točci prostor-vremena. To znači da u svakoj teoriji polja generaliziranih koordinata ima koliko i točaka u prostor-vremenu – neprebrojivo mnogo. U slučaju mehanike sustava čestica svakom stupnju slobode gibanja pridruje se jedna generalizirana koordinata $\phi_i(t)$ kojoj odgovara jedna Lagrangeova jednadžba gibanja (7.5) koja je obična diferencijalna jednadžba drugog reda po vremenu. Za jedno-dimenzioni kristal opisan Lagrangianom (7.3) ili (7.4), jednadžbi gibanja ima točno koliko i čestica. U kontinuum limesu, tj. u teoriji polja opisanoj Lagrangianom (7.8), zamišljamo da se kristal sastoji od neprebrojivo mnogo kontinuirano raspoređenih čestica, čije titranje je određeno samo jednom Lagrangeovom jednadžbom gibanja – valnom jednadžbom (7.9). Jedna parcijalna diferencijalna jednadžba (7.9) je kontinuum limes sustava od neprebrojivo mnogo običnih diferencijalnih jednadžbi (u svakoj točci prostora x po jedna).

Lako je napraviti generalizaciju na tri prostorne dimenzije. Da je kontinuirani kristal bio trodimenzionalan, umjesto (7.8) Lagrangian bi bio volumni integral Lagrangeove gustoće *L* (koja se skoro uvijek neprecizno također naziva Lagrangianom)

$$L = \int d^3x\,\mathcal{L}\,. \tag{7.11}$$

Lagrangeova gustoća *L* je funkcija polja i njihovih prvih parcijalnih derivacija po prostoru i vremenu po analogiji sa mehanikom sustava čestica

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \to \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu\phi, x^\mu)\,, \tag{7.12}$$

gdje indeks $\mu = 0,1,2,3$ označava prostorno-vremenske koordinate ($x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$), a $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ označava prvu parcijalnu derivaciju po x^μ. Polje ϕ (ili više polja $\phi, \chi, \ldots$ u nekom poopćenju teorije) u (7.12) je po pretpostavci bar dva puta derivabilna funkcija točke u prostor-vremenu $x^\mu = (\vec{r}, t)$, što se označava kao $\phi(x^\mu)$ ili jednostavnije $\phi(x)$, ali je u (7.12) izostavljeno radi preglednosti izraza.

Kontinuirani fizikalni sustav je onda opisan poljem $\phi(x^{\mu})$ ļija svojstva odreĽuje Lagrangian (gustoĺa) L koji kao i u mehanici sustava ļestica ima kinetiļki i potencijalni dio. Na primjer, najjednostavniji Lagrangian u teoriji polja je Lagrangian (gustoĺa) skalarnog polja $\phi(x^{\mu})$ koji je

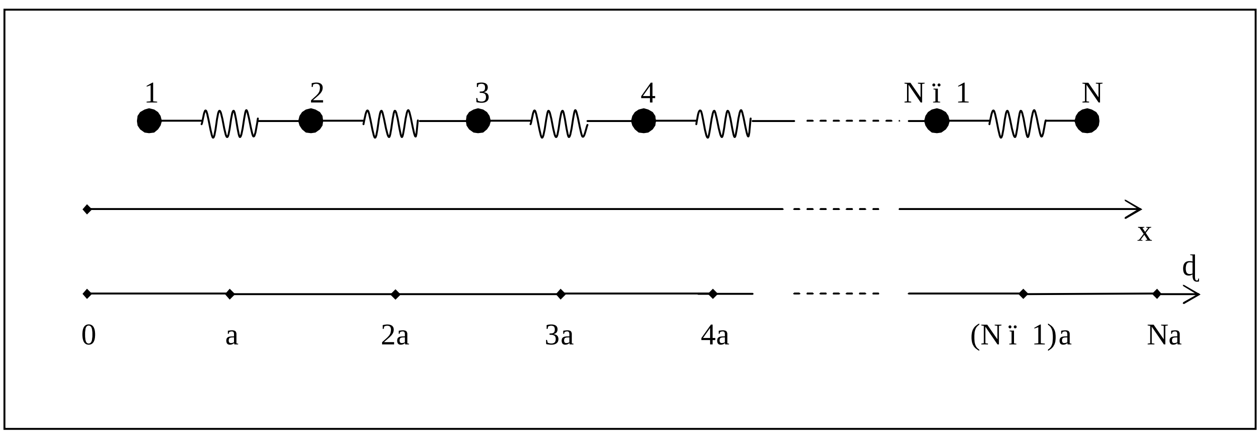
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^1\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^2\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^3\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{7.13}$$

Postojanje Lagrangiana polja L i akcije (djelovanja) I(ϕ) koja je integral Lagrangiana po vremenu $I = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}$, omoguĺuju proġirenje Lagrangeove i Hamiltonove formulacije klasiļne mehanike sustava ļestica i na kontinuirane sustave, tj. na teoriju polja. U klasiļnoj fizici najvaģniji primjer teorije polja je svakako Maxwell-ova elektrodinamika koja je ustvari relativistiļki (Lorentz) invarijantna teorija polja.

7.2 Lagrangeova formulacija za kontinuirane sustave

Jednostavni primjer jednodimenzionog elastiļnog kristala moģemo iskoristiti da detaljnije razumijemo prijelaz na kontinuum i koriġtenje Hamiltonova principa $\delta I = 0$ za dobijanje jednadġbi gibanja teorije polja, kao i ograniļenja tako dobijene teorije.

Raznotrimo opet longitudinalne vibracije jednodimenzionog lanca ļestica mase m vezanih idealnim oprugama konstante k i ravnoteģne duljine a, ali sad uzmimo da je sistem konaļan i ima N ļestica, ġto znaļi N stupnjeva slobode gibanja. Generalizirane koordinate su poloģaji $x_i(t)$ (i = 1,2,é ,N) svake ļestice na osi kristala. Izaberimo ishodiġte x-osi tako da je ravnoteģni poloģaj svake ļestice x_i = (i ï ½) a kao na Slici 49.



Slika 49.

Svaka ļestica uma samo interakcije sa svojim najbliģim susjedima, tj. na i-tu ļesticu djeluju elastiļne sile $F = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$ lijeve i desne opruge, osim na prvu i zadnju ļesticu u lancu na koje djeluje samo po jedna sila. Elastiļna potencijalna energija jedne, recimo, prve opruge u lancu je $U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2$, pa je Lagrangian sustava

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m(\dot{x}_i)^2 - \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{2} k(x_i - x_{i-1} - a)^2. \tag{7.14}$$

Lako je naĺi Lagrangeove jednadģbe

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - a),$$

$$m\ddot{x}_i = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \qquad (i = 2,3,é\ ,N\ ï\ 1), \qquad (7.15)$$

$$m\ddot{x}_N = k(x_{N-1} - x_N + a)k\ .$$

Iako sustav ima N stupnjeva slobode gibanja, oļekujemo da ima samo N ï 1 netrivijalnu svojstvenu frekvenciju malih oscilacija (sigurno postoji jedan normalni mod sa svojstvenom frekvencijom w = 0 koji reprezentira translaciju cijelog kristala kao krutog tijela).

Eksplicitno rjeģenje je (provjeriti)

$$x_i(t)=\left(i-\frac{1}{2}\right)a+x_0+v_0t+\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i\cos\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)ak_i\right]\cos(\omega_i t+\varphi_i)\ , \qquad (7.16)$$

gdje su x_0, v_0, Ǖ$_i$, ű$_i$ (i = 1,2,é ,N ï 1) konstante koje se odreĽuju iz poļetnih uvjeta, a valni vektori k_i i svojstvene frekvencije w_i su

$$w_i^2 = 2\frac{k}{m}\left[1-\cos(ak_i)\right]\ , \qquad k_i = \frac{\pi}{Na}i\ . \qquad (7.17)$$

Na primjer, za drugu ļesticu je

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_2 = 2\sum_{n=1}^{N-1}\left[\cos(ak_n)-1\right]\cos\left(\frac{3}{2}ak_n\right)\alpha_n\cos(w_nt+\varphi_n),$$

pa kako vrijedi $2\cos\left(\frac{3}{2}ak_n\right)\cos(ak_n)=\cos\left(\frac{1}{2}ak_n\right)+\cos\left(\frac{5}{2}ak_n\right)$, odmah se dobije

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_2 = x_3 - 2x_2 + x_1\ .$$

Ovo je Ămikroskopskiñ model kristala koji oļito zavisi od svojstava i sila na pojedinu ļesticu kristala. Konaļni jednodimenzioni elastiļni kristal od N ļestica vezanih oprugama konstante k ravnoteģne duljine a ima N ï 1 svojstvenu frekvenciju longitudinalnih titraja

$$w_n^2 = 2\frac{k}{m}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{N}n\right)\right]\ , \qquad (n = 1,é\ , N\ ï\ 1) \qquad (7.18)$$

valnih duljina

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2N}{n}a\ . \qquad (7.19)$$

Eksperimentalno bi se ovaj model mogao provjeriti mjerenjem brzine zvuļnih valova razliļitih frekvencija $v_n = \frac{w_n}{k_n}$ u kristalu. Mjerenje Ămikroskopskihñ svojstava ļestica kristala (kostante k) u pravilu nije moguĺe. Poģeljno je imati aproksimativni Ămakroskopskiñ model u kome se pojavljuju samo veliļine koje je lako moguĺe mjeriti ï to je kontinuirani model teorije polja.

Ako umjesto N-ļestiļnog diskretnog modela ġelimo model teorije polja za naġ kristal zamislimo da mu je masa kontinuirano rasporeĽena. Prvo moramo diskretni indeks Ăiñ zamjeniti kontinuiranim indeksom η koji izima vrijednosti 0 Ò η Ò Na. Zatim generalizirane koordinate ļestica $x_i(t)$ treba zamjeniti realnim kontinuiranim i derivabilnim poljem $x(\eta,t)$ za koje zamiġljamo da u toļkama $\eta = \left(i-\frac{1}{2}\right)a$ ima upravo vrijednosti $x_i(t)$, tj. vrijedi $x\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)a, t\right) = x_i(t)$. U kontinuum limesu, kao u (7.7), iz (7.14) dobijamo Lagrangian jednodimenzione teorije polja

$$L = \int_0^{Na} d\eta\, \mathcal{L}\,, \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - 1\right)^2, \tag{7.20}$$

analogan sa (7.8), gdje je Youngov modul elastiļnosti B = ka, a linijska gustoĺa $\mu = \rho m$, gdje je Ăgustoĺa ļesticañ (koncentracija) $\rho = 1/a$.

Jednadġbe gibanja teorije polja odreĽene Lagrangianom (7.20) moġemo izvesti iz Hamiltonovog (varijacionog) principa minimalnog djelovanja $\delta I = 0$. Akcija (djelovanje) $I(x)$ je

$$I = \int_0^T dt\, L = \frac{1}{2}\int_0^T dt \int_0^{Na} d\eta \left[\mu\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - 1\right)^2\right]. \tag{7.21}$$

Hamiltonov princip $\delta I(x) = 0$ traġi da naĽemo promjenu akcije δI kad variramo polje $x(\eta,t) \to x(\eta,t) + \delta x(\eta,t)$ tako da ostanu zadovoljeni isti rubni (poļetni) uvjeti $\delta x(\eta,0) = \delta x(\eta,T) = 0$ i zahtijevamo da je ta varijacija nula, ġto daje

$$\delta I = 0 = \int_0^T dt \int_0^{Na} d\eta \left[\mu\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial\, \delta x}{\partial t} - E\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - 1\right)\frac{\partial\, \delta x}{\partial \eta}\right].$$

U gornjem integralu napravimo parcijalnu integraciju po obe nezavisne varijable t i η, tj.

$$\mu\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial \delta x}{\partial t} = -\mu\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta x\right] \quad \text{i}$$

$$-E\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - 1\right)\frac{\partial \delta x}{\partial \eta} = E\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\delta x - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[E\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - 1\right)\delta x\right].$$

Rubni uvjeti osiguravaju da integral potpune derivacije po vremenu daje nulu

$$\int_0^T dt\, \frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta x\right] = \left[\mu\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta x\right]_0^T = 0,$$

pa Hamiltonov princip daje

$$0 = -\int_0^T dt \int_0^{Na} d\eta \left\{\mu\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right\}\delta x - \int_0^T dt \left[E\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - 1\right)\delta x\right]_{\eta=0}^{\eta=Na}. \tag{7.22}$$

Kako je varijacija polja $\delta x(\eta,t)$ proizvoljna koeficijenti uz δx u (7.22) moraju biti nula, ġto daje Lagrangeovu jednadġbu gibanja za polje $x(\eta,t)$ koja je valna jednadġba jednodimenzionih longitudinalnih valova

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < \eta < Na\,, \tag{7.23}$$

i rubni uvjet na krajevima kristala

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = 1, \qquad \eta = 0 \quad \text{i} \quad \eta = Na\,. \tag{7.24}$$

Rješenje je (provjeriti)

$$x(\eta,t) = \eta + x_0 + v_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(k_n \eta)\cos(\overline{w}_n t + \varphi_n)\,, \tag{7.25}$$

gdje su valni vektori i svojstvene frekvencije

$$k_n = \frac{\pi n}{Na}, \qquad \overline{w}_n^2 = \frac{E}{\mu} k_n^2 = \frac{k}{m}\pi^2 \frac{n^2}{N^2}. \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{7.26}$$

Usporedimo ovo rješenje kontinuiranog modela s rješenjem „mikroskopskog“ diskretnog N-čestičnog modela

$$x_n(t) = \left(n - \frac{1}{2}\right)a + x_0 + v_0 t + \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) a k_n\right]\cos(\omega_n t + \varphi_n)\,, \tag{7.16}$$

gdje je

$$k_n = \frac{\pi n}{Na}, \qquad w_n^2 = 2\frac{k}{m}[1 - \cos(k_n a)]\,, \qquad (n = 1,\ldots, N-1). \tag{7.18}$$

Teorija polja (kontinuirani model) uvijek ima bezbroj normalnih modova, dok svaki konačni sustav uvijek ima konačan N − 1 broj modova titranja. Odgovarajući valni vektori imaju iste vrijednosti, ali teorija polja predviđa valove proizvoljno male valne duljine, dok N-čestični model zahtijeva minimalnu valnu duljinu $\lambda_{min.} = 2a\frac{N}{N-1} > 2a$ za $k_{max.} = \frac{\pi}{a}\frac{N-1}{N}$. Kao što fizikalno i očekujemo, dva modela se bitno razlikuju na „mikroskopskoj skali“, tj. za svojstvene modove titranja čija valna duljina je reda veličine među-čestične udaljenosti a. S druge strane, oba modela daju praktično identične rezultate na „makroskopskoj skali“ duljina, tj. za modove titranja valne duljine $\lambda >> a$, što znači za niske svojstvene frekvencije.

Sa kolikom ogromnom točnošću teorija polja predviđa iste vrijednosti niskofrekvetnih oscilacija kao i diskretni model najbolje se vidi ako za $n << N$ razvijemo u red $\cos(k_n a)$ u (7.18)

$$w_n^2 = 2\frac{k}{m}[1 - \cos(k_n a)] = 2\frac{k}{m}\left[1 - \cos\left(\pi\frac{n}{N}\right)\right] = \frac{k}{m}\left(\pi\frac{n}{N}\right)^2 + O\left[\left(\pi\frac{n}{N}\right)^4\right] \cong \overline{w}_n^2, \tag{7.27}$$

jer je za makroskopski komad bilo kojeg realnog materijal u uobičajenim zemaljskim uvjetima broj čestica N bar 10^8 po cm duljine.

Ovaj idealizirani i jednostavni primjer dobro ilustrira opći rezultat koji dokazuje da se sa velikom točnošću može klasičnom kontinuum mehanikom (teorijom polja) opisati ponašanje realnih (sastavljenih od molekula) objekata, ako nas zanimaju samo vrijednosti fizikalnih veličina na makroskopskoj skali duljina, dok detalji fizike svakog sustava ultimativno uvijek zahtijevaju kvantnu teoriju.

7.3 Jednadžbe gibanja u teoriji polja

Kontinuum teorija uvedena je na primjeru longitudinalnih titraja jedno-dimenzionog kristala čiji Lagrangian (7.20) i akcija (7.21) zavise od polja $x(\xi,t)$. Čestica kontinuiranog jednodimenzionog sustava označena je sa ξ – što je njena koordinata, ali u sustavu vezanom za kristal. Vrijednost polja $x(\xi,t)$ onda daje koordinatu u inercijalnom referentnom sustavu (laboratorijskom) čestice kristala ξ. U općem slučaju gibanja i deformacija kristala referentni sustav vezan za materijal je neinercijalni. Uvijek je moguće izbjeći komplikacije vezane za neinercijalne sustave, ako se teorija formulira (smjenom varijabli, recimo) na ekvivalentan način pomoću inverznog polja $\xi(x,t)$ koje daje pomak (deformaciju) čestice materijala ξ u točci (x,t) prostor-vremena nekog inercijalnog sustava referencije. Teorija polja se u pravilu formulira na ovaj, jednostavniji način pomoću polja $\phi(\vec{r},t) = \phi(x)$.

Budući da je su u teoriji polja nezavisne varijable i položaj u prostoru $\vec{r} = (x,y,z)$ i trenutak u vremenu t, svi izrazi su znatno jednostavniji ako se koristi 4-dimenzionalna notacija: $x^\mu = (x^0, x^i) \equiv (ct, x, y, z)$, gdje grčki indeksi uzimaju 4 vrijednosti μ = 0,1,2,3, a latinski samo 3 prostorne vrijednosti i = 1,2,3. Uvijek se podrazumijeva odgovarajuća sumacija po ponovljenom indeksu (jednom gornjem i jednom donjem). Brzina svjetlosti c se uvodi u $x^0 = ct$ da bi sve četri komponente 4-vektora (tenzora prvog reda u četvoro dimenzionalnom prostor-vremenu) bile istih dimenzija. Ovakva notacija je specijalno korisna u relativističkim (Lorentz invarijantnim) teorijama. Relativistička invarijantnost (isti oblik fizikalnih zakona u različitim inercijalnim sustavima referencije povezanim Lorentz-ovim transformacijama) zahtijeva da se prostorne i vremenske komponente tenzora tretiraju na isti način. Iako nećemo razmatrati relativističku mehaniku koristićemo 4-dimenzionu notaciju.

U klasičnoj fizici prostor-vrijeme je skup točaka $x^\mu = (x^0, \vec{r})$ koje tvore 4-dimenzionalni Euklidski prostor ($R^3 \times R$), dok u relativističkoj fizici točke prostor-vremena tvore 4-dimenzionalni prostor Minkowskog M^4. Razlika između prostora R^4 i M^4 je u njihovoj metričkoj strukturi (načinu na koji se mjeri udaljenost točaka), tj. u njihovom metričkom tenzoru $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{za } R^4; \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \text{za } M^4. \qquad (7.28)$$

Sumaciona konvencija pojednostavljuje izraze kao: $a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} a_\mu b^\mu$, ili $a^i b_i = a_i b^i = \sum_{i=1}^{i=3} a_i b^i$. Simetrični metrički tenzor $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ spušta i diže indekse tenzora. Npr. za bilo koji kontravarijantni 4-vektor a^μ, postoji odgovarajući kovarijantni 4-vektor $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$. U R^4 su i kontravarijantne (gornje) i kovarijantne (donje) komponente tenzora jednake, dok su u M^4 vremenske (nulte) komponente istog, ali prostorne komponente su suprotnog znaka, npr. $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$. Za fiziku najvažnija razlika između R^4 i M^4 je u skalarnom produktu dva 4-vektora. Na primjer, kvadrat udaljenosti dvije infinitezimalno bliske točke prostor-vremena je u 4-dimenzionom Euklidskom prostoru

$$dx^\mu dx_\mu = c^2 (dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = c^2 (dt)^2 + (d\vec{r})^2 \ - \text{u } R^4, \qquad (7.29)$$

dok je u 4-dimenzionom hiperboličnom prostoru M^4 specijalne teorije relativnosti

$$dx^\mu dx_\mu = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = c^2 (dt)^2 - (d\vec{r})^2 \ - \text{u } M^4. \qquad (7.30)$$

Formuliranje teorije polja za neko klasiļno polje $\phi(x^\mu)$ polazi od Lagrangiana (gustoÍe) tog polja L, koji je kao u (7.12) funkcija polja ϕ i njegovih prvih parcijalnih derivacija $\partial^\mu\phi$ po prostorno-vremenskim koordinatama x^μ ġto se oznaļava $L = L(\phi, \partial^\mu\phi)$. Najjednostavniji primjer je Lagrangian (7.13) skalarnog polja $\phi(x)$, koji sa moġe skraÍeno zapisati

$$L = \frac{1}{2}(\partial^0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^i\phi)(\partial_i\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi. \tag{7.31}$$

Ļlanovi u Lagrangianu (7.31) koji zavise od derivacija polja po vremenskoj $(\partial^0\phi)^2$ i po prostornim koordinatama $(\partial^i\phi)^2$ su suprotnog znaka, ġto je posljedica definicije Lagrangiana kao razlike kinetiļke i potencijalne energije L = T ï U.

<u>Napomena</u>: U kvantnoj teoriji polja (7.31) je Lagrangian slobodnog kvantnog polja $\phi(x)$ spina nula i mase m, na primjer, polja Higgs bozona. Do sada nije poznat ni jedan fizikalni sustav u klasiļnoj fizici koji bi bio opisan Lagrangianom (7.31). Relativistiļka fizika je opÍenitija od klasiļne jer vrijedi i u sluļajevima kad brzine nisu zanemarive u odnosu na c. Prednost relativistiļke 4-dimenzione tenzorske notacije moġemo vidjeti veÍ i na ovom najjednostavnijem primjeru. Koristimo li ļetvoro-dimenzionu notaciju (u prostoru M^4), zbog $\partial_0\phi = \partial^0\phi$ i $\partial_i\phi = -\partial^i\phi$, prva dva (ustvari ļetri) ļlana u Lagrangianu (7.31) skalarnog polja $\phi(x)$ moġemo jednostavnije zapisati kao jedan ļlan

$$L(\phi, \partial^\mu\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \;. \tag{7.32}$$

Kako nas, za sada, zanima klasiļna mehanika kontinuuma, tj. klasiļna teorija polja, da formule uļinimo jednostavnijim u ostatku ovog poglavlja Íemo *koristiti četvoro-dimenzionu notaciju (u prostoru R^4 klasične fizike) podrazumjevajući sumacionu konvenciju po jednom ponovljenom (bilo gornjem, bilo donjem) indeksu.*

Ako ġelimo da polje $\phi(x)$ ima izvore (kao distribucija naboja za elektromagnetsko polje) moramo dozvoliti da Lagrangian eksplicitno zavisi i od koordinata toļke prostor-vremena x^μ preko gustoÍe izvora [npr. gustoÍa naboja $\rho(x)$ i struja $\vec{j}(x)$], tj.

$$L = L(\phi, \partial^\mu\phi, x^\mu), \tag{7.33}$$

ġto kao i u mehanici sustava ļestica, znaļi da sustav (polje ϕ) nije izoliran jer postoji razmjena energije i impulsa izmeĽu izvora i polja. Na primjer, najjednostavniji izvor za skalarno polje $\phi(x)$ je neka zadana funkcija $S(x^\mu)$ tako da Lagrangian umjesto (7.31) ima dodatni ļlan

$$L(\phi, \partial^\mu\phi, x^\mu) = \frac{1}{2}(\partial^0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial^i\phi)(\partial_i\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \phi S \;. \tag{7.34}$$

Oblik Lagrangiana nije odreĽen i za svaku pojedinu teoriju polja se posebno bira. Odabir Lagrangiana je rukovoĽen nekim generalnim principima, kao ġto su: zahtjev da je Lagrangian skalar, zahtjev invarijantnosti u odnosu na neke simetrije, odreĽeni ġeljeni limes u analogiji s klasiļnom mehanikom sustava ļestica, jednostavnost, itd. Valjanost tako dobijene teorije polja za opis nekog realnog fizikalnog sustava se onda utvrĽuje eksperimentalnom provjerom konzekvenci teorije.

Integracijom gustoĺe Lagrangiana L po nekom regionu prostora Ω unutar kojeg je polje $\phi(x)$ razliļito od nule, kao u (7.11), dobijamo Lagrangian L teorije polja. Akciju (djelovanje) $I(\phi)$ polja $\phi(x)$ definiramo kao integral po vremenu, od nekog poļetnog ($t = 0$) do nekog krajnjeg ($t = T$) trenutka, Lagrangiana L polja, tj.

$$I = \int d^4x \; L(\phi, \partial^\mu\phi, x^\mu)\,. \tag{7.35}$$

Akcija je integral Lagangiana (gustoĺe) po nekom 4-dimenzionom regionu prostor-vremena Ω_4 na ļijem rubu polje $\phi(x)$ i njegove derivacije isļezavaju [ļesto se, kao u (7.35), ne oznaļavaju granice integracije i podrazumijeva integral po cijelom prostor-vremenu, ġto ne mijenja rezultat jer je pod-integralna funkcija nula u svim toļkama van regiona Ω_4]. Jasno je da akcija ostaje nepromjenjena ako gustoĺi Lagrangiana dodamo proizvoljnu 4-divergenciju (totalnu derivaciju): $L \to L + \partial^\mu M$.

Da se dobiju jednadġbe gibanja teorije polja u skladu s Hamiltonovim principom treba odrediti varijaciju akcije i izjednaļiti je s nulom. Varijacija akcije δI kad polje infinitezimalno variramo za $\delta\phi$ je

$$\delta I = \int d^4x \left\{\frac{\partial L}{\partial\phi}\,\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\mu\delta\phi\right\}.$$

Kao i u primjeru jednodimenzionog kristala, napravimo li parcijalnu integraciju u drugom ļlanu te iskoristimo rubni uvjet, da je u poļetnom i krajnjem trenutku vremena i na rubu regiona Ω varijacija polja $\delta\phi = 0$, varijacija akcije postaje

$$\delta I - \int d^4x \, \delta\psi \left\{\frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\} = 0\,, \tag{7.36}$$

ġto, zbog proizvoljnosti varijacije polja $\delta\phi$, odmah daje Lagrangeove jednadġbe teorije polja

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0. \tag{7.37}$$

U sluļaju da u teoriji imamo viġe od jednog polja $\phi_A(x^\mu)$, zbog nezavisnosti njihovih varijacija, dobili bi po jednu jednadġbu gibanja (7.37) za svako polje, tj.

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_A)} - \frac{\partial L}{\partial\phi_A} = 0, \qquad A=1,2,\ldots. \tag{7.38}$$

potpuno analogno generalizaciji sa jednog na viġe stupnjeva slobode gibanja $q \to q_i$ u mehanici sustava ļestica.

Lako se provjeri da Lagrangian (7.34) skalarnog polja $\phi(x)$ ļiji su izvori $S(x)$ daje jednadġbu gibanja polja

$$\left(\partial_0\partial^0 - \partial_k\partial^k + m^2\right)\phi(x) = -S(x)\,, \tag{7.39}$$

koja se naziva nehomogena (tj. sa izvorima S) Klein-Gordonova jednadġba i koja je ustvari generalizacija nehomogene valne jednadġbe. Prepiġemo li ovu jednadġbu u 3-dimenzionalnoj notaciji (7.39) je

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi(\vec{r}, t) = -\,S(\vec{r}, t), \tag{7.40}$$

ġto je nehomogena valna jednadġba za m = 0.

Da vidimo vezu sa elektrostatikom i ilustriramo rjeġenja Klein-Gordonove jednadġbe naĽimo njeno najjednostavnije rjeġenje. Jednostavnosti radi potraġimo statiļno rjeġenje, tj. pretpostavimo da izvori S(x) i polje ϕ(x) ne zavise od vremena. Klein-Gordonova jednadġba onda postaje

$$(\nabla^2 - m^2)\phi(\vec{r}) = S(\vec{r}). \tag{7.41}$$

Za izvor polja odaberimo najjednostavniji sluļaj samo jednog toļkastog Ănabojañ q koji miruje u nekoj toļci prostora $\vec{r}'$, tako da je gustoĺa izvora $S(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, pa (7.41) postaje

$$(\nabla^2 - m^2)\phi(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \tag{7.42}$$

Jedino sferno simetriļno rjeġenje jednadġbe (7.42) koje iġļezava u beskonaļnosti naziva se Yukawa potencijal i predstavlja potencijal ļestice mase m koji eksponencijalno opada sa udaljenoġĺu, ġto je klasiļni model za potencijal nuklearnih sila

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi}\frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{7.43}$$

Za takve brzo (eksponencijalno) opadajuĺe sile se kaġe da su kratkog dosega $\frac{1}{m}$ jer na udaljenosti m od ļestice intenzitet sile opadne na e ï 1 = 0.368 poļetne vrijednosti. Za specijalni sluļaj m = 0 dobijamo uobiļajeni gravitacijski ili elektriļni potencijal koji opada s udaljenoġĺu od izvora (ļestice) kao $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$.

Da se dokaġe da je (7.43) zaista rjeġenje jednadġbe (7.42) treba izraļunati $\nabla^2\phi$. To je najlakġe uraditi ako se u potencijalu (7.43) prvo definira pomoĺna funkcija Ψ kao

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi}\frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\psi(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \tag{7.44}$$

te iskoristi formula iz vektorske analize: $\nabla^2(AB) = A\nabla^2 B + B\nabla^2 A + 2(\nabla A)\cdot(\nabla B)$ koja vrijedi za proizvoljna skalarna polja A i B. U naġem sluļaju je $A \equiv \Psi$ i $B \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$.

Dokaz je jednostavan ako se prvo pokaġe da vrijedi (pokazati):

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \nabla\Psi = -m\Psi\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \nabla^2\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

$$\nabla^2\Psi = \nabla\cdot(\nabla\Psi) = \nabla\cdot\left(-m\Psi\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -m(\nabla\Psi)\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - m\Psi\,\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

te

$$\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{2}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \qquad e^{-m|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}'),$$

gdje zadnja relacija vrijedi jer je Diracova δ-funkcija nula osim ako je $\vec{r} = \vec{r}'$.

Da se pokaže da vrijedi $\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$, najjednostavnije je odabrati sustav sa ishodištem u čestici, tako da je $\vec{r}' = 0$, pa $|\vec{r}-\vec{r}'|$ postaje $|\vec{r}| = r$. Odaberemo li sferne koordinate (r,θ,φ), Laplacijan ∇^2 funkcije f koja zavisi samo od r je

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \cdots,$$

gdje … označavaju članove koji su nula jer sadrže derivacije po kutevima θ i φ. Za $f = r^{-1}$ je $\nabla^2 r^{-1} = 0$ za svako $r \neq 0$. Ali, za $r = 0$, mora biti

$$\lim_{r\to 0}\left(\nabla^2\frac{1}{r}\right) = -\infty,$$

što se vidi ako integriramo $\nabla^2 r^{-1}$ po volumenu kugle radijusa $\varepsilon > 0$ sa centrom u ishodištu i iskoristimo teorem o divergenciji:

$$\int d^3x\left(\nabla^2\frac{1}{r}\right) = \int d^3x\;\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \oint d\vec{s}_\varepsilon\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \oint ds_\varepsilon\,\hat{r}\cdot\left(-\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = -4\pi,$$

gdje je $ds_\varepsilon = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ element površine sfere radijusa ε. U limesu kad $\varepsilon \to 0$, dobija se

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}),$$

pa smjenom varijabli $\vec{r} \to \vec{r}-\vec{r}'$, dobijamo $\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$.

Yukawa potencijal (7.43) pokazuje da je Klein-Gordonova jednadžba (7.39), koja slijedi iz Lagrangiana skalarnog polja (7.34), fizikalno relevantna bar za klasični model opisa nuklearnih interakcija u statičkom limesu, a u specijalnom slučaju polja bez mase m = 0 može biti model teorije polja za gravitacijske ili elektromagnetske interakcije.

Do sada smo vidjeli kako se dobijaju jednadžbe gibanja teorije polja, tj. Lagrangeove jednadžbe (7.37) ili (7.38) i fizikalnu relevantnost teorije polja na jednostavnim primjerima jednodimenzionog elastičnog kristala i skalarnog polja čiji su Lagrangiani (7.20) i (7.31).

Da bi se dalje razvila fizika teorije polja (mehanike kontinuuma) neophodno je razmotriti očuvane veličine, tj. konstante gibanja. U cjelokupnoj fizici vrijede osnovni zakoni očuvanja – energije, impulsa, angularnog momenta, naboja, … pa je neophodno vidjeti kako se oni implementiraju i u teoriju polja.

7.4 Očuvane veličine (struje) u teoriji polja

Danas vjerujemo da su svi osnovni zakoni oļuvanja u fizici posljedica simetrije kvantne teorije polja koja opisuje najsitnije djeliĺe materije ï elementarne ļestice od kojih se sastoje svi objekti u svemiru. Teorem Emmi Noether daje vezu kontinuiranih simetrija Lagrangiana (akcije) fizikalnog sustava i njegovih oļuvanih veliļina originalno je dokazan upravo u teoriji polja. Iako vrijedi i za sustave ļestica, Noether teorem ima najveĺi znaļaj u klasiļnoj i naroļito, u kvantnoj teoriji polja. Veza simetrija teorije polja i zakona oļuvanja omoguĺuje odabir simetriļnog Lagrangiana relativistiļke kvantne teorije polja koji osigurava valjanost eksperimentalno otkrivenih zakoni oļuvanja.

Noether teorem tvrdi da za svaku grupu kontinuiranih transformacija koje ostavljaju invarijantnim (nepromjenjenog oblika) gustoĺu Lagrangiana L teorije polja mora postojati jedna oļuvana (bez divergencije, tj. bez izvora) 4-struja $J_\varepsilon(x)$,

$$\delta L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\mu J_\mu = 0\,, \tag{7.45}$$

takva da je ukupni ònabojñ Q koji je volumni integral vremenske komponente struje $J_0(x)$

$$Q(t) = \int d^3x\, J_0(x)\,, \tag{7.46}$$

oļuvana veliļina, tj. vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t) = 0\,. \tag{7.47}$$

Najopĺenitija formulacija Noether teorema odnosi se na invarijantnost akcije (djelovanja) sustava, koja je ekvivalentna gornjoj formulaciji ako dozvolimo da promjena gustoĺe Lagrangiana bude totalna derivacija (4-divergencija).

Jednostavnosti radi dokaz izvedimo za sluļaj translatorne invarijantnosti teorije polja. Translacije su transformacije kojima se prelazi u inercijalni sustav referencije ļije ishodiġte je u nekoj drugoj toļci prostor-vremena. Trivijalno se vidi da translacije tvore kontinuiranu grupu transformacija. Lagrangian je invarijantan pri translacijama ako ne zavisi eksplicitno od koordinata x^μ, veĺ samo implicitno preko zavisnosti polja $\phi(x)$ i njegovih prvih parcijalnih derivacija $\partial^\mu\phi(x)$. Dovoljno je razmatrati samo infinitezimalne translacije, jer grupoidnost osigurava da teorem onda vrijedi i za sve konaļne prostorno-vremenske translacije. Pri infinitezimalnoj translaciji prostorno-vremenske koordinate se transformiraju prema

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \varepsilon^\mu, \tag{7.48}$$

a promjena Lagrangiana do na prvi red po konstantnim infinitezimalnim veliļinama ε^μ je

$$\delta L = L' - L = \varepsilon^\mu \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \varepsilon^\mu\, \partial_\mu L\,. \tag{7.49}$$

S druge strane, kako L ne zavisi eksplicitno od x^μ, promjena Lagrangiana je i

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)}\delta(\partial^\mu\phi)\,, \tag{7.50}$$

gdje je varijacija polja $\phi(x)$

$$\delta\phi = \phi(x+\varepsilon) - \phi(x) = \varepsilon^{\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} \,. \tag{7.51}$$

Iskoristimo li Lagrangeovu jednadġu (7.37) da zamijenimo $\frac{\partial L}{\partial\phi} = \partial^{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\phi)}$ izraz (7.50) postaje

$$\varepsilon^{\mu}\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = \left(\partial^{\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\phi)}\partial^{\mu}(\delta\phi) = \partial^{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\phi)}\,\delta\phi\right), \tag{7.52}$$

gdje smo iskoristili (7.49) i u zadnjem ļlanu promjenili redosled deriviranja $\partial^{\mu}(\delta\phi) = \delta(\partial^{\mu}\phi)$. Koristeĺi (7.51), zadnji izraz moġemo prepisati u sugestivnom obliku

$$0 = \partial^{\mu}\left\{ - g_{\mu\nu}L + \frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\phi)}\partial_{\nu}\phi \right\} \varepsilon^{\nu}, \tag{7.53}$$

ġto vrijedi za svaku infinitezimalnu translaciju za ε^{ν} samo ako vrijedi zakon oļuvanja tenzora energije-impulsa $T_{\mu\nu}(x)$

$$\partial^{\mu} T_{\mu\nu}(x) = 0\,, \tag{7.54}$$

koji je po definiciji

$$T_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu}L + \frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\phi)}\partial_{\nu}\phi \,. \tag{7.55}$$

Ime koje se daje veliļini $T_{\mu\nu}(x)$ ï tenzor energije-impulsa, daje naslutiti da njegove komponente imaju veze sa energijom i impulsom polja $\phi(x)$. Izraz (7.55) omoguĺuje da se komponente $T_{\mu\nu}(x)$ lako izraļunaju parcijalnim deriviranjem Lagrangiana polja. Naravno, treba joġ pokazati da identifikacija (naziv) komponenti tenzora $T_{\mu\nu}(x)$ sa raznim veliļinama kojima se opisuje polje $\phi(x)$ zaista ima fizikalnog smisla.

Izraz (7.54) je dokaz da:

ako je Lagrangian neke teorije polja $L = L(\phi, \partial^{\mu}\phi)$ invarijantan pri prostorno-vremenskim translacijama (ne zavisi eksplicitno od koordinata x^{μ}) tada je 4-divergencija tenzora energije-impulsa $T_{\mu\nu}(x)$ polja $\phi(x)$ jednaka nuli. To je lokalni (koji vrijedi u svakoj toļci x) oblik zakona oļuvanja energije i impulsa za polje $\phi(x)$. Pojednostavljeno, poġto je $\partial^{\mu} T_{\mu\nu}(x) = 0$ u svakoj toļci prostor-vremena, tenzor $T_{\mu\nu}(x)$ nema izvora (ni ponora) ni u jednoj toļci x, pa je svuda (i uvijek) oļuvan.

Izraz (7.54) je specijalni sluļaj izraza (7.45). U sluļaju invarijantnosti Lagrangiana pri translacijama lokalno oļuvana veliļina je tenzor drugog reda $T_{\mu\nu}(x)$, pa za polje $\phi(x)$ postoje 4 oļuvane struje, po jedna za nezavisne translacije duġ svake od ļetri osi prostorno-vremenskog koordinatnog sustava. Te 4 konstante gibanja (za $\mu = 0$), koje su 4 globalno oļuvane fizikalne veliļine, meĽusobno razlikuje indeks ν. U skladu s (7.46) ļetri oļuvana ukupna Ănabojañ polja $\phi(x)$ su

$$\mathrm{P}_\nu(\mathrm{t}) = \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\; T_{0\nu} = \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial^0\phi)}\partial_\nu\phi - \mathrm{g}_{0\nu}\, L\right], \tag{7.56}$$

koje za $\nu = 0$ identificiramo s energijom i tri prostorne komponente ($\nu = 1,2,3$) impulsa polja $\phi(x)$. Četri komponente $T_{0\nu}(x)$ [prvi redak njegove matrične reprezentacije] tenzora $T_{\mu\nu}(x)$ energije-impulsa onda predstavljaju gustoće energije-impulsa polja $\phi(x)$, što pojašnjava naziv tenzora.

Treba još dokazati da, u skladu sa (7.47), zaista vrijede četri (globalna) zakona očuvanja koji su zakon očuvanja energije ($\nu = 0$) i tri zakona očuvanja pojedinih komponenti ukupnog impulsa ($\nu = 1,2,3$) polja $\phi(x)$, tj. da vrijedi

$$\frac{\mathrm{dP}_\nu(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = 0\,. \tag{7.57}$$

Dokaz je elementarna primjena teorema o divergenciji (Gauss-ovog teorema). Lokalni oblik zakona očuvanja energije-impulsa (7.54) možemo napisati u obliku

$$\partial^0 T_{0\nu} + \partial^i T_{i\nu} = 0\,. \tag{7.58}$$

Ako integriramo gornji izraz po nekom regionu prostora Ω na čijem rubu polje $\phi(x)$ pada u nulu, i u prvom članu zamjenimo redoslijed integracije po d^3x i derivacije po x^0 odmah dobijamo

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,t}}\mathrm{P}_\nu(\mathrm{t}) = \partial^0 \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\; T_{0\nu} = -\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\;\partial^k T_{k\nu} = -\oint \mathrm{ds}^k_\Omega\, T_{k\nu}\,, \tag{7.59}$$

gdje je zadnji član površinski integral (integral po ds^k_Ω) po rubu regiona Ω. P_ν je ukupna energija-impuls polja $\phi(x)$ u regionu Ω.

Ovaj dokaz je možda razumljiviji ako ga eksplicitno napišemo u 3-dimenzionoj notaciji. Izraz (7.59) je

$$0 = \partial^\mu T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{0\nu}}{c\,\partial t} + \frac{\partial T_{1\nu}}{\partial x} + \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial y} + \frac{\partial T_{3\nu}}{\partial z} = \frac{\partial T_{0\nu}}{c\,\partial t} + \nabla\cdot\vec{T}_\nu\,, \tag{7.60}$$

gdje su tri prostorne komponente $T_{i\nu}$, koje se nazivaju strujama, označene kao 3-vektor $\vec{T}_\nu \equiv (T_{1\nu}, T_{2\nu}, T_{3\nu})$. Takvih 3-vektora ima 4, za $\nu = 0,1,2,3$.

Jednadžbe oblika (7.60) se nazivaju jednadžbama kontinuiteta (ima ih 4) i fizikalnu predstavljaju lokalne (u točci x) zakone očuvanja po analogiji sa lokalnim oblikom zakona očuvanja električnog naboja u elektrodinamici

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0\,, \tag{7.61}$$

gdje $\rho(x)$ gustoća naboja, a $\vec{j}(x)$ gustoća struja. Za jednu nabijenu česticu je $\vec{j} = \rho\,\dot{\vec{r}}$.

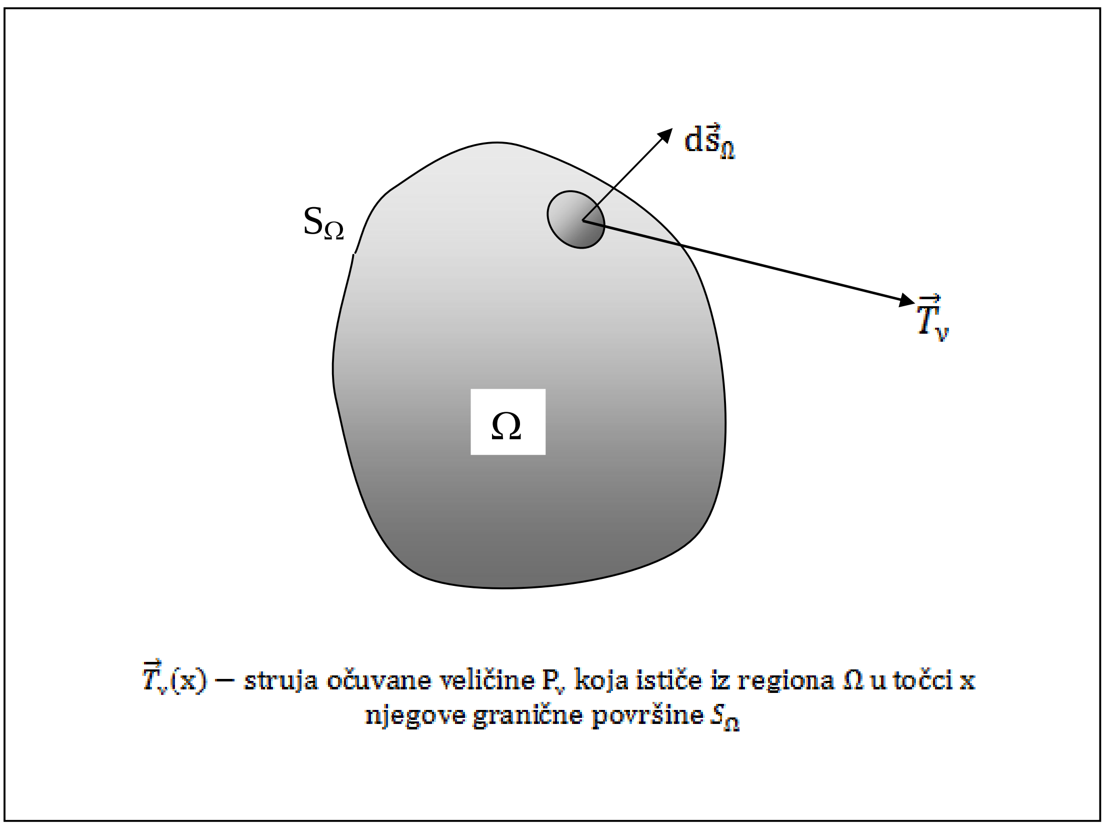
Opravdanost naziva vidimo integriramo li (7.60) po nekom regionu prostora Ω na ļijem rubu je polje $\phi(x)$ [pa, onda i sve komponente $T_{\mu\nu}(x)$] nula. Ako derivaciju po vremenu izvuļemo ispred integrala, dobijamo

$$0 = \int d^3x \frac{\partial T_{0\nu}}{c\,\partial t} + \int d^3x\, \nabla \cdot \vec{T}_\nu = \frac{\partial \mathrm{P}_\nu}{c\,\partial t} + \oint d\vec{s}_\Omega \cdot \vec{T}_\nu\,, \tag{7.62}$$

tj.

$$-\frac{\partial \mathrm{P}_\nu}{c\,\partial t} = \oint d\vec{s}_\Omega \cdot \vec{T}_\nu\,, \tag{7.63}$$

gdje je $\mathrm{P}_\nu(t)$ ukupna vrijednost ν-te oļuvane veliļina (energija za $\nu = 0$, k-ta komponenta impulsa za k = 1,2,3) u regionu Ω, a $\vec{T}_\nu$ je struja te oļuvane veliļine koja istjeļe kroz graniļnu povrģine S_Ω regiona Ω, kao na Slici 50. Za $\nu = 0$, izraz (7.63) pokazuje da smanjenje ukupne energije polja u regionu prostora Ω mora biti jednako struji (intenzitetu) energije polja koja istiļe kroz graniļnu povrģinu regiona Ω ī ģto je zakon oļuvanja energije polja $\phi(x)$.



Slika 50.

Na primjeru prostorno-vremenskih translacija dokazali smo Noether teorem u teoriji polja. Zakoni oļuvanja energije i impulsa za polje $\phi(x)$ mogu se razumjeti kao posljedica ļinjenice da Lagrangian tog polja nije eksplicitna funkcija koordinata x^μ (i obrnuto).

Polje $\phi(x)$ je kontinuuirana funkcija i postoji u svim toļkama (nekog regiona) prostor-vremena, kao elektriļno polje ili magnetsko polje, na primjer. Onda Íe i sve veliļine kojima opisujemo fiziku nekog sustava biti distribuirane kao kontinuirane funkcije po prostorno-vremenskim toļkama i njihova vrijednost u pojedinoj toļci x je gustoÍa te fizikalne veliļine.

Kako je $g_{00} = 1$, prema (7.55) ili (7.56) gustoÍa energije polja $\phi(x)$ je

$$T_{00} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0 \phi)} \partial_0 \phi - L\,, \tag{7.64}$$

a, ukupna energija je

$$E = P_0 = \int d^3x\; T_{00}\,. \tag{7.65}$$

Analogno mehanici sustava ļestica i Hamiltonova formulacija se moġe proġiriti na teoriju polja. Za svako polje $\phi_A(x)$ u teoriji, definira se pridruġeni moment $\pi_A(x)$

$$\pi_A = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0 \phi_A)} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_A}\,, \tag{7.66}$$

i polje se onda opisuje (gustoÍom) Hamiltoniana H koji je po definiciji

$$H - \sum_A \pi_A \dot{\phi}_A - L\,. \tag{7.67}$$

Ukupni Hamiltonian je $H = \int d^3x\, H$. Izraz (7.64) za gustoÍu energije polja je upravo gustoÍa Hamiltoniana $T_{00} \equiv H$, pa je Hamiltonian ukupna energija polja $H = E$, kao ġto i treba biti za svaki konzervativni sustav. Ovo je indikacija da smo dobro identificirali $T_{00}(x)$ kao gustoÍu energije polja. Lako je vidjeti da je za Lagrangian jednodimenzionog elastiļnog kristala (7.8) (gustoÍa) Hamiltoniana $T_{00} = H$ zaista zbroj gustoÍa kinetiļke i potencijalne energije polja

$$T_{00} = H = \frac{1}{2}\mu\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2, \tag{7.68}$$

a, isto vrijedi i za skalarno polje $\phi(x)$ ļiji Lagrangian je (7.31),

$$T_{00} = H = \frac{1}{2}(\partial^0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial^i\phi)(\partial_i\phi) + \frac{1}{2}m^2\phi\,. \tag{7.69}$$

Lokalni odlik zakona oļuvanja energije za polje $\phi(x)$ je (7.58) za $\nu = 0$, tj.

$$\partial^0 T_{00} = -\partial^k T_{k0} = -\nabla \cdot \vec{T}_0 = -\frac{\partial T_{10}}{\partial x} - \frac{\partial T_{20}}{\partial y} - \frac{\partial T_{30}}{\partial z}\,, \tag{7.70}$$

pokazuje da je vremenska promjena gustoÍe energije polja u nekoj toļci jednaka zbroju tri komponente gustoÍe struje energije koja otiļe iz te toļke ($-\frac{\partial T_{20}}{\partial y}$ je gustoÍa struje energije koja teļe duġ y-osi).

Na primjer, lako se vidi da je za jednodimenzioni kristal $T_{10} = -\mu E \dot{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$, što je brzina toka gustoće energije duž x-osi, jer je prema (7.6) i (7.7) sila na česticu kristala $E \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

Potpuno analogno, zbog $g_{0i} = 0$, prema (7.56), tri komponente gustoće impulsa $T_{0i}(x)$ polja $\phi(x)$ su

$$T_{0i} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0 \phi)} \partial_i \phi = \pi \, \partial_i \phi \,, \tag{7.71}$$

pa je i-ta komponenta ukupnog impulsa polja $P_i(t) = \int d^3x \, T_{0i}(x)$. Tri veličine $T_{ki}(x)$ su komponente gustoće struja i-te komponente impulsa polja.

Identificirali smo fizikalni smisao svih 16 komponenti $T_{\mu\nu}(x)$ tenzora energije-impulsa (7.55) polja $\phi(x)$ opisanog Lagrangianom $L = L(\phi, \partial^\mu \phi)$ i to:

$T_{00}(x) \equiv H$ – gustoća energije polja $= \frac{dE}{d^3x}$,

$T_{0i}(x)$ – gustoća i-te komponente impulsa $= \frac{dP_i}{d^3x}$

$T_{k0}(x)$ – k-ta komponenta gustoće struje energije

$T_{ki}(x)$ – k-ta komponenta gustoće struje i-te komponente impulsa

Očigledno je da komponente tenzora energije-impulsa, tj. 16 veličina $T_{\mu\nu}(x)$ kompletno opisuju gustoću i tok energije i impulsa polja $\phi(x)$ u svim točkama prostor-vremena x. [Naziv tenzor energije-impulsa, a ne tenzor energije i impulsa, dolazi iz relativističke fizike koja ujedinjuje energiju E i impuls $\vec{p}$ u jedan 4-vektor $p^\mu \equiv (E, \vec{p})$ u prostoru M^4, analogan sa $x^\mu = (t, \vec{r})$. U prostoru M^4 je $T_{\mu\nu}(x)$ stvarno tenzor drugog reda].

Na analogan, ali matematički kompliciraniji, način može se pokazati veza prostornih rotacija i zakona očuvanja angularnog momenta. Rezultat je da za svako polje postoji antisimetrični tenzor drugog reda $M_{ij}(x)$ koji je gustoća angularnog momenta polja

$$M_{ij} = -(x_i T_{j0} - x_j T_{i0}) \,, \tag{7.72}$$

tako da je ukupni angularni moment $M_{ij}(t)$ polja $\phi(x)$ volumni integral $M_{ij} = \int d^3x \, M_{ij}(x)$. Zakon očuvanja angularnog momenta vrijedi za svako polje čiji je tenzor (7.55) energije-impulsa simetričan, što je skoro uvijek slučaj.

7.5 Jednadžbe gibanja u mehanici kontinuuma

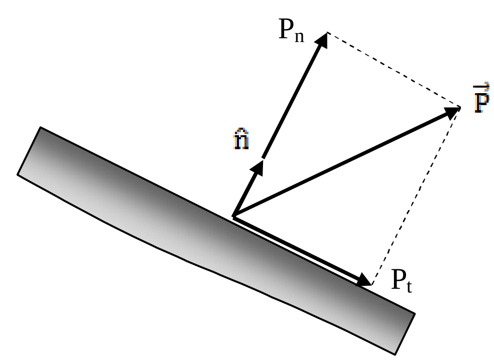
U mehanici kontinuuma se prave modeli za opis fizike razliļitih materijalnih tijela kao elastiļnih ili plastiļnih ļvrstih tijeka, raznih tekuĺina i plinova, itd. Gustoĺa tijela moģe varirati u prostoru i vremenu i opisje se skalarnim poljem $\rho(x)$. Optereĺenjem takvih deformabilnih tijela smatramo djelovanje drugih tijela ili ostalog dijela kontinuuma. Optereĺenja mogu biti povrġinska, ako sile djeluju samo na spoljaġnju povrġinu ili volumna, ako sile djeluju na sve djelove tijela. Gustoĺa $\vec{f}(x)$ volumnih sila koje djeluju na bilo koju toļku unutar deformabilnog tijela definira se kao

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V},$$

gdje je $dV = d^3x$ element volumena tijela. Ako element unutarnjih (koje stvaraju drugi djelovi istog tijela) sila $d\vec{F}$ djeluje na element povrġine ds s centrom u toļci x unutar deformabilnog tijela, vektor naprezanja (napona) $\vec{P}(x)$ u toļci x materijala definira se kao

$$\vec{P} = \frac{d\vec{F}}{ds}.$$

Ako je $\hat{n}$ jediniļni vektor normale na element povrġine ds u toļci x, tj. $d\vec{s} = \hat{n}\,ds$, vektor naprezanja $\vec{P}$ u opĺem sluļaju tvori kut α s jediniļnim vektorom elementa povrġine $\hat{n}$, kao na Slici 51.



$P_n = |\vec{P}| \cos\alpha$, $P_t = |\vec{P}| \sin\alpha$

Slika 51.

Okomita komponeneta P_n naprezanja (normal stress) uzrokuje sile tlaka, a tangencijalna komponenta (shearnig stress) P_t uzrokuje sile smicanja na element povrġine.

U mehanici kontinuuma se devet prostornih kompomenti gustoĺe struja impulsa $T_{kj}(x)$ tenzora energije-impulsa [9 komponenti 3-dimentionog tenzora] nazivaju stres tenzor (tenzor naprezanja). Stres tenzor potpuno karakterizira svako deformabilno tijelo. Komponente stres tenzora su naprezanja koja mjere komponente unutarnjih sila tlaka i smicanja po jedinici povrġine koje djeluju na bilo koji element povrġine unutar deformabilnog tijela.

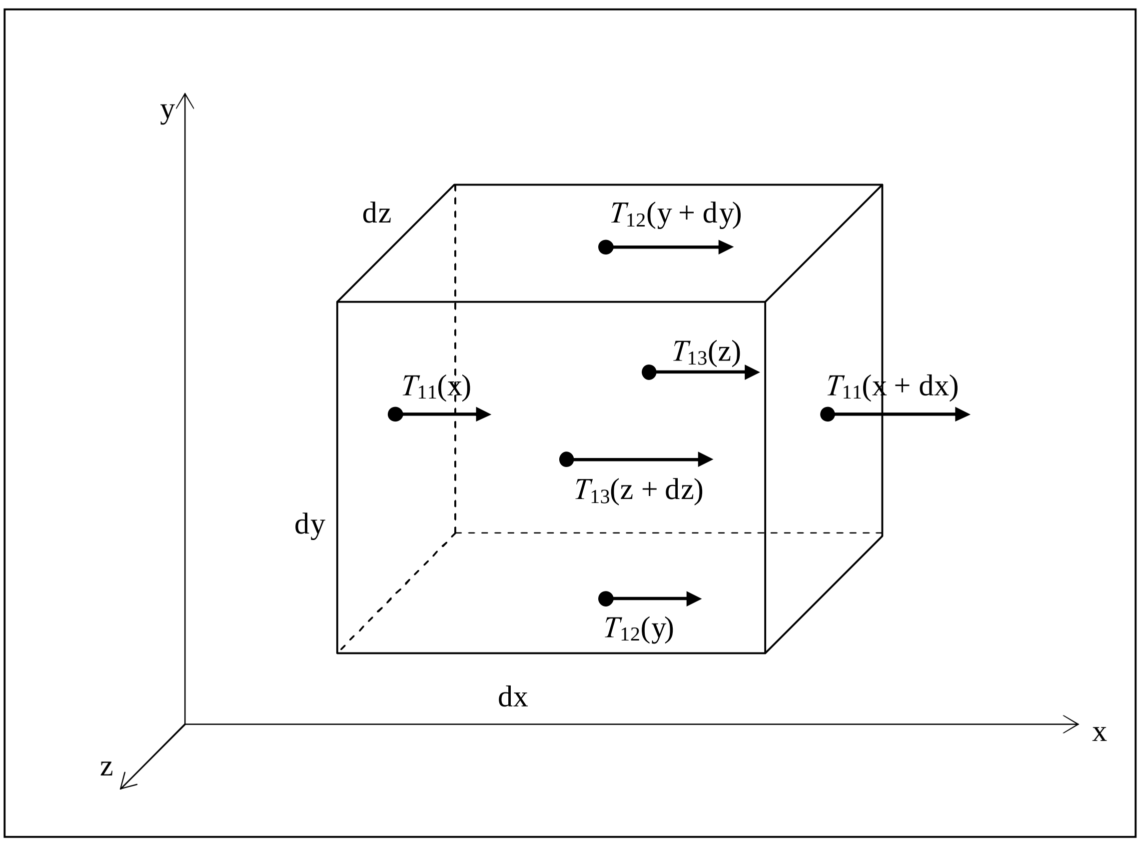
Ako na bilo koji infinitezimalni element povrġine $d\vec{s}$ deformabilnog tijela djeluje element sile $d\vec{F}$ vrijedi

$$d\vec{F} = \boldsymbol{T} \cdot d\vec{s}\,, \tag{7.73}$$

gdje je $T(x)$ stres tenzor. Gornju tenzorsku jednadġbu lakġe je analizirati ako je prepiġemo pomoĺu komponenti. Ako su komponente elementa sile $d\vec{F} = dF_i\,\hat{e}_i = \hat{\imath}\,dF_1 + \hat{\jmath}\,dF_2 + \hat{k}\,dF_3$, tada (7.73) znaļi

$$dF_i = T_{ji}\,ds^j = T_{1i}ds^1 + T_{2i}\,ds^2 + T_{3i}\,ds^3\,. \tag{7.74}$$

Zamislimo infinitezimalni element materijala kao paralelopiped volumena $d^3x = dx\,dy\,dz$ ļije su strane paralelne koordinatnim plohama kao na Slici 52.



Slika 52.

Na sredini svake od 6 strana elementarnog paralelopipeda predstavljene su vrijednosti x-komponenti odgovarajuĺih gustoĺa struja impulsa koje stvaraju sile tlaka i smicanja na volumni element deformabilnog tijela unutar paralelopipeda. Ukupna sila na element volumena dxdydz zavisi od vrijednosti povrğinskih sila na sve strane paralelopipeda. X-komponenta sila tlaka na strane paralelopipeda paralelne yz-ravnini je

$$[T_{11}(\mathrm{x}+\mathrm{dx}) - T_{11}(\mathrm{x})]\,\mathrm{dydz} = \frac{\partial T_{11}}{\partial \mathrm{x}}\,\mathrm{dxdydz}, \tag{7.75}$$

dok je x-komponenta sila smicanja na strane paralelne xz-ravnini

$$[T_{12}(\mathrm{y}+\mathrm{dy}) - T_{12}(\mathrm{y})]\,\mathrm{dxdz} = \frac{\partial T_{12}}{\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dxdydz}, \tag{7.76}$$

a, x-komponenta sila smicanja na strane paralelne xy-ravnini je

$$[T_{13}(\mathrm{z}+\mathrm{dz}) - T_{13}(\mathrm{z})]\,\mathrm{dxdy} = \frac{\partial T_{13}}{\partial \mathrm{z}}\,\mathrm{dxdydz}. \tag{7.77}$$

X-komponenta ukupne povrğinske sile na svih 6 strana paralelopipeda po jedinici volumena jednaka je

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial T_{13}}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\partial T^*_{11}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial T^*_{21}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial T^*_{31}}{\partial \mathrm{z}} = \partial^{\mathrm{k}} T^*_{\mathrm{k}1} = (\nabla \cdot T^*)_1, \tag{7.78}$$

gdje je T^* transponirani stres tenzor ($T^*_{ij} = T_{ji}$), a divergencija stres tenzora je

$$\nabla \cdot T = \left(\partial^{\mathrm{k}} T_{\mathrm{ki}}\right)\hat{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}. \tag{7.79}$$

U opĺem sluļaju na elementarni paralelopiped moğe djelovati joğ i volumna sila (kao teğina, na primjer) gustoĺe $\vec{\mathrm{f}}$ (na element mase dm = $\rho\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}$ djeluje element sile $\mathrm{d}\vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{f}}\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}$, gdje je ρ gustoĺa tijela).

II Newtonov zakon kağe da je x-komponenta ukupne sile jednaka prvoj vremenskoj derivaciji x-komponente impulsa, pa za element $\mathrm{d}^3\mathrm{x}$ volumena deformabilnog tijela dobijamo jednadğbu gibanja

$$\mathrm{f}_\mathrm{x}\,\mathrm{d}^3\mathrm{x} + \left(\frac{\partial T^*_{11}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial T^*_{21}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial T^*_{31}}{\partial \mathrm{z}}\right)_\mathrm{x} \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \rho\,\frac{\mathrm{dv_x}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}^3\mathrm{x},$$

tj.

$$\mathrm{f}_\mathrm{x} + (\nabla \cdot T^*)_\mathrm{x} = \rho\,\frac{\mathrm{dv_x}}{\mathrm{dt}}, \tag{7.80}$$

ğto se moğe zapisati u obliku parcijalne diferencijalne tenzorske jednadğbe koja vrijedi u svakom inercijalnom sustavu referencije

$$\vec{\mathrm{f}} + \nabla \cdot T^* = \rho\,\dot{\vec{\mathrm{v}}}. \tag{7.81}$$

Na primjer, u prvoj aproksimaciji voda je idealna tekućina. Za takav materijal gustoća je konstantna (nestlačiva tekućina) i stres tenzor je jednostavno

$$T = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

U takvoj tekućini je prema (7.74)

$$dF_i = p\, \delta_{ij}\, ds^j = p\, ds_i ,$$

što znači da je vektor naprezanja (napona) okomit na svaku površinu tekućine $\vec{P}(x) = p\, \hat{n}$, tj. unutar idealne tekućine nema sila smicanja.

Iz ovih naznaka i primjera se vidi da se mehanika sustava čestica može proširiti i na mehaniku kontinuuma, tj. klasičnu teoriju polja. Detaljnije razmatranje tih teorija prelazi okvire ovog kolegija.

Popis riješenih primjera:

6. Male oscilacije

Literatura

1. Finkelstein R. J., **Nonrelativistic mechanics**, W. A. Benjamin, 1973

2. Goldstein H., Poole C. & Safko J., **Classical Mechanics**, 3rd edition, Benjamin Cummings, 2002.

3. Halliday D. & Resnick R., **Physics**, 6th edition, John Wiley & Sons, 2001.

4. Jackson J. D., **Classical Electrodynamics**, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998.

5. Landau L. D. & Lifshitz E. M., **Mechanics**, 3th edition, Pergamon Press , 1976.

6. Muģicki ņ ., **Teorijska mehanika**, Nauļ na kniga, 1980.

7. Rindler W., **Introduction to Special Relativity**, Oxword University Press, 1982.

8. Scheck F., **Mechanics**, Springer-Verlag, 1990.

9. Supek I., **Teorijska fizika i struktura materije**, 6. izdanje, Ġkolska knjiga, 1992.

10. Starzhinskii V. M., **An Advanced Course of Theoretical Mechanics**, Mir Publishers 1982.

11. Tipler P. A. & Llewellyn R. A., **Modern Physics**, 4th edition, W. H. Freeman and Co., 2003.

12. Wachter A. & Hoeber H., **Compendium of Theoretical Physics**, Springer, 2006.

13. Alfireviĺ I., **Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma**, Golden marketing, 2003.