Izvrednjavanje funkcija

1. Pomoću Hornerove sheme podijelite polinom
$$p(x) = 3x^8 - 6x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1$$
polinomom
$$g(x) = x - 1.$$

2. Korištenjem potpune Hornerove sheme nađi sve derivacije polinoma p iz prethodnog zadatka u točki $x_0 = 1$. Provjerite rješenja.

3. Odredite Taylorov polinom reda 4 za funkciju f zadanu izrazom
$$f(x) = e^{x^2}$$
u točki $x_0 = 0$.
UPUTA. Koristiti razvoj u red funkcije g zadane izrazom $g(t) = e^t$.

4. Kvocijent
$$g(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$$
nije definiran u nuli. Odredite prirodnu definiciju vrijednosti $g(0)$ koristeći razvoj u Taylorov red funkcije f zadane s
$$f(x) = \log(x+1).$$

5. Odredite Taylorov polinom reda 2 za funkciju f danu izrazom
$$f(x) = e^x \sin x$$
oko točke $x_0 = 0$. Omeđite pritom nastalu grešku na intervalu $[-\pi/4, \pi/4]$.
UPUTA. Koristiti formula za razvoj u Taylorov red s greškom $R(\xi)$ izraženom za $\xi \in [-\pi/4, \pi/4]$. Srediti dobiveni izraz dok se ne dobiju konkretne granice za grešku.

Sustavi linearnih jednadžbi

1. Neka je w stupčani vektor iz $\mathbb{R}^n$ za koga vrijedi $w^\tau w = 1$. Ako je $A = ww^\tau$ dokažite da vrijedi $A^2 = A$.

2. Neka je w kao u prethodnom zadatku i matrica B definirana s
$$B = I - 2ww^\tau.$$
Dokažite da je matrica B simetrična (tj. da vrijedi $B^\tau = B$) i da vrijedi $B^2 = I$. Što je B^{-1}?

3. Neka su A i B kvadratne matrice istoga reda n i takve da je matrica AB singularna. Dokažite da je tada A ili B singularna, tj. da ne mogu obje biti regularne.

4. Gaussovom metodom eliminacija riješite linearni sustav
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_1 - 3x_2 \qquad &= 2. \end{aligned}$$

5. Riješite sustav iz prethodnog zadatka nekom od matričnih metoda koju poznajete i nabrojite ostale metode koje znate.

6. Gaussovom metodom eliminacija riješite linearni sustav
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 \ - 1/2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 \qquad &= 2. \end{aligned}$$
U čemu je razlika u odnosu na prethodni zadatak?

7. Riješite sustav
$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$
Gaussovim eliminacijama svođenjem na gornjetrokutastu matricu sustava i eliminacijama unazad (Rj. $x_1 = 2.6,\ x_2 = -3.8,\ x_3 = -5.0$).

8. Sustav iz prethodnog zadatka riješite koristeći decimalni zapis do na 4 značajne znamenke (ne na 4 decimale!) sa zaokruživanjem i usporedite rješenja (trebalo bi se pojaviti znatno odstupanje!). Gdje je nastupio problem? Kako smo to mogli izbjeći? Riješite na takav način i usporedite.

9. Uz uvjete kao u prehodnom zadatku riješite sustav (najprije egzaktno, a zatim uz zapis na 4 značajne znamenke)

$$\begin{aligned} 0.729x_1 + 0.81x_2 + 0.9x_3 &= 0.6867 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0.8338 \\ 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(Rj.egz. $x_1 = 0.2245,\ x_2 = 0.2814,\ x_3 = 0.3279$)
(Rj. $x_1 = 0.2251,\ x_2 = 0.2790,\ x_3 = 0.3295$).

10. Rješite sustav iz prethodnog zadatka ali sada s pivotiranjem. Usporedite rezultate. (Rj. $x_1 = 0.2246,\ x_2 = 0.2812,\ x_3 = 0.3280$)

11. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite LU faktorizaciju matrice A bez pivotiranja.

12. Bez pivotiranja nađite LU faktorizaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

13. Odredite LU faktorizaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

14. Iterativnom Jacobijevom metodom ("ručno") u tri koraka odredite rješenje sustava $Ax = b$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

počevši od $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Poznato je da je rješenje sustava $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

15. Napišite kratki program koji rješava kvadratni sustav Jacobijevom metodom i demonstrirajte njegov rad na primjeru iz prethodnog zadatka. Koliko je koraka iteracije potrebno da se postigne točnost od 0.00005? Program mora biti takav da "radi" za proizvoljni kvadratni sustav s jedinstvenim rješenjem uz dovoljno dobru početnu iteraciju. Ulaz mora biti i zadana točnost (norma razlike dviju uzastopnih iteracija). Na seminaru ćete dobiti mali testni zadatak kako bi se provjerila korektnost programa.

16. Iterativnom Gauss-Seidelovom metodom ("ručno") u tri koraka odredite rješenje sustava iz Zadatka 14.

17. Sve kao u Zadatku 15 ali za Gauss-Seidelovu metodu.

Interpolacijski polinomi

1. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \cos x$, te neka je $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$. Izračunajte $f[x_0, x_1]$ i $f[x_0, x_1, x_2]$. Usporedite ovu potonju s $\frac{1}{2} f''(c)$, gdje je $\min\{x_0, x_1, x_2\} < c < \max\{x_0, x_1, x_2\}$.
   UPUTA: Podsjetimo se da vrijedi
   $$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c),$$
   gdje je
   $$\min\{x_0, \ldots, x_n\} < c < \max\{x_0, \ldots, x_n\},$$
   te da se (ako ovaj interval nije prevelik) obično može s velikom točnošću uzeti
   $$c = \frac{x_0 + \ldots + x_n}{n}.$$

2. Neka je f polinom stupnja m. Definiramo funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s
   $$g(x) = f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
   Dokažite da je g polinom stupnja $m - 1$. U kakvoj je to vezi s činjenicom da je
   $$f[x_0, x] = \frac{1}{1!} f'(c),$$
   gdje je c između x_0 i x?
   UPUTA: Podsjetiti se teorema o nultačkama polinoma.

3. Odredite funkciju P čija je jednadžba oblika
   $$P(x) = a + b\cos \pi x + c \sin \pi x,$$
   a koja interpolira podatke zadane tablicom

x	0	0.5	1
y	2	5	4

4. Za podatke iz prethodnog zadatka odredite kvadratni polinom koji ih interpolira. Usporedite s rezultatom iz prethodnog zadatka na nekoliko točaka.

5. Dokažite da u prostoru polinoma stupnja najviše 2 postoji točno jedan polinom stupnja 2 koji interpolira podatke zadane tablicom

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

   pod uvjetom da su svi x_i međusobno različiti.

6. Podsjetimo se da je opći interpolacijski polinom koji interpolira podatke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, zadan s

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x),$$

gdje je za $i = 0, 1, \ldots, n$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Bez svođenja na zajednički nazivnik i računanja dokažite da je

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) = 1.$$

UPUTA: U formuli za p_n zgodno izabrati $y-$ne.

7. Odredite kvadratni polinom q takav da vrijedi

$$q(0) = -1, \quad q(1) = -1, \quad q'(1) = 4.$$

8. Odredite polinom p stupnja ne većeg od 3 takav da za fiksne ali neodređene y_1, y_2, y_1', y_2' vrijedi

$$\begin{aligned} p(0) &= y_1, \quad p(1) = y_2, \\ p'(0) &= y_1', \quad p'(1) = y_2'. \end{aligned}$$

UPUTA: Napišite p u obliku

$$p(x) = y_1 H_1(x) + y_1' H_2(x) + y_2 H_3(x) + y_2' H_4(x),$$

gdje su polonomi H_i, $i = 1, 2, 3, 4$, kubni polinomi koji zadovoljavaju odgovarajuće uvjete. Npr.

$$H_1(0) = 1, \; H_1'(0) = 0, \; H_1(1) = 0, \; H_1'(1) = 0.$$

9. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = e^x$. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne ali različite $x_0, \ldots, x_n$ ispunjeno

$$f[x_0, \ldots, x_n] > 0.$$

U kakvoj je to vezi s derivacijom funkcije f?

10. Neka je f kao u prethodnom zadatku, te neka su dani čvorovi $0 \le x_0 < x_1 \le 1$. Ocijenite grešku koja nastaje u proizvoljnoj točki $x \in [x_0, x_1]$ interpoliranjem polinomom stupnja 1 kroz ta dva čvora. Provjerite da li je greška nastala za konkretne točke

$$x_0 = 0.82, \quad x_1 = 0.83, \quad x = 0.826$$

u tim granicama.
UPUTA: Vrijedi

$$e(x) = f(x) - p_1(x) = e^x - p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} e^c, \quad c \in [x_0, x_1].$$

Treba ocijeniti odozgo posebno $(x - x_0)(x - x_1)/2$ i posebno e^c, a znamo da je $c \in [0, 1]$.
Rješenje:

$$e(x) \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} e.$$

11. Nadopunite tablicu

$x_0 = 0.0$	$f[x_0] = ?$		
		$f[x_0, x_1] = ?$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1] = ?$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

12. Tablicom su zadani mjerni podaci

$$\begin{array}{cccccc} x & 0.0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ f(x) & 1.00000 & 1.22140 & 1.49182 & 1.82212 & 2.22554 \end{array}.$$

Interpoliranjem Newtonovim polinomom odredite $f(0.05)$.
RJEŠENJE. $f(0.05) \approx 1.05126$.

Splajnovi

1. Odredite prirodni kubični splajn za podatke

x	1	2	3	4
y	1	1/2	1/3	1/4

.

   Rješenje:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{17}{6}, & 2 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{12}x + \frac{7}{12}, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

2. Lako se vidi da su čvorovi iz zadatka 1. čvorovi funkcije f definirane s $f(x) = 1/x$. Odredite grešku splajna u točki $x = 2.5$.

3. Odredite kubični splajn koji zadovoljava uvjete

$$\begin{aligned} s(0) &= 0, \quad s(1) = 1, \quad s(2) = 2, \\ s'(0) &= 0, \quad s''(2) = 2. \end{aligned}$$

4. Ispitajte da li je funkcija s zadana s

$$s(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   kubični splajn.
   Rješenje: Jest!

5. Odredite $\beta \in \mathbb{R}$ tako da funkcija s zadana s

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -2x^3 + \beta x^2 - 36x + 25, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

   bude prirodni kubični splajn.
   Rješenje: $\beta = 20$.

6. Odredite potpuni kubični splajn za podatke

x	0	1	2
y	0	1	2

   uz dodatne uvjete $s'(0) = s'(2) = 1$.

7. Odredite vrijednosti a, b, c, d tako da funkcija

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   bude prirodni kubični splajn.
   Rješenje: $a = 1, \ b = -3, \ c = -1, \ d = 2$.

Aproksimacija funkcija

1. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = e^x$. Aproksimirajte funkciju f na segmentu $[-1, 1]$ funkcijom φ oblika $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$ metodom najmanjih kvadrata, a koristeći pritom sklarni umnožak definiran s

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

RJEŠENJE: $a_0 = 1.1752, \; a_1 = 1.1036.$

2. Dokažite da je za aproksimaciju dobivenu u prethodnom zadatku najveća napravljena greška

$$\max_{x \in [-1,1]} |e^x - \varphi(x)| = 0.439.$$

3. Neka je $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ familija ortogonalnih polinoma s obzirom na neki skalarni umnožak $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pretpostavimo da funkciju f želimo metodom najmanjih kvadrata s obziroma na isti skalarni umnožak $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aproksimirati funkcijom p oblika

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i(x)$$

za neki $n \in \mathbb{N}$. Odredite eksplicitnu formulu po kojoj se računaju nepoznati koeficijenti β_i.
UPUTA: Treba minimizirati funkciju g zadanu s

$$g(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \langle f - p, f - p \rangle.$$

Treba dobiti

$$\beta_i = \frac{\langle f, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle}.$$

4. Uzmite kao poseban slučaj familije $\mathcal{P}$ iz prethodnog zadatka familiju Legendreovih polinoma. Za $n = 2$ izračunajte aproksimaciju funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = e^x$ na $[-1, 1]$.

5. Zadane su funkcije f i p izrazima

$$f(x) = e^{3x+1}, \qquad p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x.$$

Na intervalu $[-1, 1]$ aproksimiraj f funkcijom p kontinuiranom metodom najmanjih kvadrata.
Rješenje: Definiramo funkciju g s

$$g(\alpha_0, \alpha_1) = \int_{-1}^{1} \left(e^{3x+1} - \alpha_0 - \alpha_1 x\right)^2 \mathrm{d}x$$

i postavimo uvjete

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_1} = 0.$$

Nije nužno najprije integrirati, već možemo odmah derivirati. Dobijemo:

$$\begin{aligned} -2\int_{-1}^{1} \left(e^{3x+1} - \alpha_0 - \alpha_1 x\right) \mathrm{d}x &= 0 \\ -2\int_{-1}^{1} \left(e^{3x+1} - \alpha_0 - \alpha_1 x\right) x\mathrm{d}x &= 0. \end{aligned}$$

Sređivanjem i integriranjem slijedi rezultat.

Numeričko integriranje

1. Ocijenite grešku koja nastaje kada se integral
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$
izračuna Simpsonovom formulom.

2. Koristeći produljenu trapeznu formulu odredite potreban broj podintervala da bi se integral
$$\int_1^3 e^{-x^2}dx$$
izračunao s točnošću $\varepsilon = 10^{-8}$.

3. Koristeći trapeznu formulu napravite tablicu u kojoj su dane vrijednosti integrala I i pripadne greške ako se formula koristi za redom 1,2,3 podintervala točaka ako je
$$I = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = 2/3.$$

4. Koristeći trapeznu formulu napravite tablicu u kojoj su dane vrijednosti integrala I i pripadne greške ako se formula koristi za redom 1,2,3 podintervala ako je
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x}\mathrm{d}x \simeq 7.95492.$$

5. Koristeći Simpsonovu formulu napravite tablicu u kojoj su dane vrijednosti integrala I i pripadne greške ako se formula koristi za redom 1,2,3 podintervala ako je
$$I = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = 2/3.$$

6. Izračunajte duljinu krivulje zadane jednadžbom
$$y = e^{x^2}, \qquad x \in [0,1],$$
koristeći trapeznu formulu za redom 1,2,3 podintervala.
UPUTA. Sjetite se da je
$$l = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x.$$

7. Izračunajte duljinu krivulje zadane jednadžbom
$$y = e^{x^2}, \qquad x \in [0,1],$$
koristeći Simpsonovu formulu za redom 1,2,3 podintervala.

8. Odredite konstante x_0, x_1 i c_1 tako da formuli
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{2}f(x_0) + c_1 f(x_1)$$
stupanj egzaktnosti bude 3.

Nelinearne jednadžbe

1. Napišite program za metodu polovljenja. Ulazni podaci moraju biti: ulazna funkcija f kojoj se računa nultočka α, krajevi polaznog segmenta $[a, b]$, točnost ε. Kriterij zaustavljanja neka bude $|c - b| \leq \varepsilon$, pri čemu je c tekuća iteracija. Neka program ispisuje redom sve iteracije i greške u obliku dvostupčanog zapisa.

2. Upotrebite napisani program da biste našli korijen jednadžbe

$$x^6 - x - 1 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 0.001$. Program radi demonstracije riješite i ručno na tabli opisujući koji se kraj intervala zamjenjuje, ali s točnošću $\varepsilon = 0.01$.

3. Programski s točnošću $\varepsilon = 0.001$ odredite rješenje jednadžbe

$$\cos x = 1/2 + \sin x.$$

Posebno opišite kako ste došli do početnog segmenta $[a, b]$.

4. Odredite dovoljno mali interval $[a, b]$ koji sadrži najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$\sin x = e^{-x}.$$

Odredite broj iteracija potreban da se metodom polovljenje zadovolji točnost $\varepsilon = 10^{-10}$.

5. Neka je α najveći korijen jednadžbe

$$e^x - x - 2 = 0.$$

Odredi dovoljno mali interval $[a, b]$ koji sadrži α. Odredite broj iteracija potreban da se metodom polovljenje zadovolji točnost $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$.

6. Newtonovom metodom odredite rješenje jednadžbe

$$x^6 - x - 1 = 0$$

počevši od $x_0 = 1.5$ i s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Rješenje prikažite tablično s kriterijem zaustavljanja

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Točno rješenje je $\alpha = 1.134724$.

7. Newtonovom metodom odredite rješenje jednadžbe

$$x + e^{-5x^2} \cos x = 0$$

počevši od $x_0 = 0$ i s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Rješenje prikažite tablično.

8. Promotrite jednadžbu

$$x^2 - 5 = 0.$$

Iteracije:

(a) $x_{n+1} = 5 + x_n - x_n^2$

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$

(c) $x_{n+1} = \frac{5}{x_n}$

pod pretpostvkom konvergencije redom daju rješenja $\alpha = \pm\sqrt{5}$ (ovo se lako provjeri uvrštavanjem $x_{n+1} = x_n = x$). Ispitajte koja od ovih iteracija konvergira k točnom rješenju $\alpha = \pm\sqrt{5}$ pod pretpostavkom da je početna iteracija x_0 izabrana dovoljno blizu točnog rješenja $\alpha = \sqrt{5}$.

9. Ispitajte da li iteracija

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$$

konvergira k rješenju jednadžbe $x = \sqrt{1+x}$ pod pretpostavkom da je početna iteracija x_0 izabrana dovoljno blizu točnog rješenja α.

10. Odredite $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tako da iteracija

$$x_{n+1} = x_n + c\left(x_n^2 - 5\right)$$

konvergira k točnom rješenju $\alpha = \sqrt{5}$ jednadžbe

$$x = x + c\left(x^2 - 5\right).$$

11. Ispitajte da li dane iteracije konvergiraju točnim rješenjima α ako je:

(a)

$$x_{n+1} = \frac{15x_n^2 - 24x_n + 13}{4x_n}, \qquad \alpha = 1,$$

(b)

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}, \qquad \alpha = \sqrt{2},$$

pod pretpostavkom da je početna iteracija x_0 izabrana dovoljno blizu točnog rješenja α.