VERIŽNI RAZLOMCI

Anita Carević

Izraz oblika

$$R = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

nazivamo brojevni verižni razlomak. Praktičniji zapisi za verižni razlomak su

$$R = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots\right], \qquad R = b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \dots \text{ ,} \qquad R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} + \frac{a_2}{b_2 +} + \dots$$

N-ta konvergencija verižnog razlomka je izraz:

$$R_n = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right].$$

Ako postoji vrijednost verižnog razlomka R onda se ona definira kao:

$$R = \lim_{n \to \infty} R_n$$

gdje je R_n n-ta konvergencija.

1 UZLAZNI ALGORITAM ZA IZVREDNJAVANJE BROJEVNIH VERIŽNIH RAZLOMAKA

Sada nam je cilj pronaći izraze pomoću kojih ćemo lakše izračunati n-te konvergencije od R. Očito se svaka od njih može prikazati u obliku razlomka

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Za nultu konvergenciju vrijedi

$$R_0 = b_0$$

pa možemo uzeti $P_0 = b_0$ i $Q_0 = 1$.
Za prvu konvergenciju vrijedi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{P_0 b_1 + a_1}{Q_0 b_1}$$

Ukoliko definiramo $P_{-1} = 1$ i $Q_{-1} = 0$, imamo

$$\begin{aligned} P_1 &= b_1 P_0 + a_1 P_{-1} \\ Q_1 &= b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}. \end{aligned}$$

Pokažimo sada da za svaku n-tu konvergenciju $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}\ . \end{aligned}$$

Baza indukcije su nam prethodno pokazane relacije za P_1 i Q_1. Pokažimo još korak indukcije.

$$R_{n+1} = \frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\vdots \over b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}}\ .$$

Razlika između R_n i R_{n+1} je u tome što je b_n zamijenjeno sa $b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$. Po pretpostavci indukcije slijedi

$$P'_{n+1} = \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) P_{n-1} + a_n P_{n-2} = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1} = P_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n-1}$$

$$Q'_{n+1} = \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1} = Q_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} Q_{n-1}$$

Sada definiramo

$$P_{n+1} = b_{n+1} P'_{n+1} \qquad \text{i} \qquad Q_{n+1} = b_{n+1} Q'_{n+1} \, ,$$

slijedi

$$R_{n+1} = \frac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}} = \frac{b_{n+1} P'_{n+1}}{b_{n+1} Q'_{n+1}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \, ,$$

gdje je

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1} \\ Q_{n+1} &= b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1} \end{aligned}$$

Ovim smo dobili tzv. ulazni algoritam izvrednjavanja verižnog razlomka

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= b_{k+1}P_k + a_{k+1}P_{k-1} \\ Q_{k+1} &= b_{k+1}Q_k + a_{k+1}Q_{k-1} \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n \ . \end{aligned}$$

U ovakvom zapisu algoritma lako možemo dodavati nove a_k i b_k. Uočimo da bi nam algoritam bio jednostavniji kada bi svi a_k ili svi b_k bili jednaki 1, jer tada ne bi morali množiti s tim koeficijentima. Indukcijom po n-tim konvergencijama se pokaže da je vrižni razlomak

$$R = b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \ldots$$

jednak verižnom razlomku

$$R' = b_0 + \frac{a'_1 \mid}{\mid 1} + \frac{a'_2 \mid}{\mid 1} + \ldots$$

Ovim smo dobili **1. tip verižnog razlomka**. Rekurzija za ulazno izvrednjavanje je

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} + a'_k P_{k-2} \\ Q_k &= Q_{k-1} + a'_k Q_{k-2} \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad . \end{aligned}$$

gdje su koefcijenti a'_k dani sa:

$$a'_k = \frac{a_k}{b_{k-1}b_k} \ .$$

Također se može pokazati da je verižni razlomak R jednak verižnom razlomku

$$R' = b_0 + \frac{1\mid}{\mid b'_1} + \frac{1\mid}{\mid b'_2} + \dots$$

Ovaj oblik se naziva **2. tip verižnog razlomka**. Rekurzija za ulazno izvrednjavanje je

$$\begin{aligned} P_k &= b'_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k &= b'_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \qquad\qquad k = 1, 2, \dots, n \ . \end{aligned}$$

2 EULEROVA FORMA VERIŽNIH RAZLOMAKA I NEKI TEOREMI KONVERGENCIJE

Verižni razlomak se može svesti na Eulerovu formu ako i samo ako su svi $Q_k \neq 0$.
Eulerova forma glasi

$$R' = b_0 + \frac{\alpha_1 \mid}{\mid \ 1} + \frac{\alpha_2 \mid}{\mid (1-\alpha_2)} + \frac{\alpha_3 \mid}{\mid (1-\alpha_3)} + \ldots$$

Zbroj brojnika i nazivnika u svakoj karici, osim u prvoj, je 1.
Vezu između originalnog i Eulerovog verižnog razlomka pokažemo indukcijom te dobijemo:

$$\alpha_k = \frac{Q_{k-2}}{Q_k} a_k, \quad k \geq 2 \; .$$

Da bi dokazali konvergenciju verižnog razlomka, potreban nam je jednostavan izraz za R_k, po mogućnosti neki red.

Nađimo prvo $R_k - R_{k-1}$ i $R_k - R_{k-2}$.

$$\begin{aligned}
R_k - R_{k-1} &= \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{P_k\,Q_{k-1} - P_{k-1}Q_k}{Q_k\,Q_{k-1}} \\
&= \frac{(b_k\,P_{k-1} + a_k\,P_{k-2})\;Q_{k-1} - P_{k-1}\;(b_k\,Q_{k-1} + a_k\,Q_{k-2})}{Q_k\,Q_{k-1}} \\
&= \frac{a_k\,P_{k-2}\,Q_{k-1} - P_{k-1}\,a_k\,Q_{k-2}}{Q_k\,Q_{k-1}} \\
&= \frac{-a_k\;(P_{k-1}\,Q_{k-2} - P_{k-2}\,Q_{k-1})}{Q_k\,Q_{k-1}} \\
&= \frac{-a_k\;(-a_{k-1})\;(P_{k-2}\,Q_{k-3} - P_{k-3}\,Q_{k-2})}{Q_k\,Q_{k-1}} \\
&= \ldots \\
&= (-1)^k\,\frac{P_0\,Q_{-1} - P_{-1}\,Q_0}{Q_k\,Q_{k-1}}\,a_k\,a_{k-1}\ldots a_1 \\
&= \frac{(-1)^{k+1}\;a_k\,a_{k-1}\ldots a_1}{Q_k\,Q_{k-1}}
\end{aligned}$$

Na sličan način se dokazuje

$$R_k - R_{k-2} = (-1)^k \frac{b_k\, a_{k-1} \dots a_1}{Q_k\, Q_{k-2}}, \qquad k \geq 2$$

Iskoristimo

$$\alpha_k = \frac{Q_{k-2}}{Q_k}\, a_k$$

pa dobivamo

$$R_k - R_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}\ a_k\, a_{k-1} \dots a_1}{Q_k\, Q_{k-1}} = (-1)^{k+1}\, \alpha_k\, \alpha_{k-1} \dots \alpha_1 \, .$$

Slijedi

$$R_k = (-1)^{k+1}\, \alpha_k\, \alpha_{k-1} \dots \alpha_1 + R_{k-1} = \dots = b_0 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\, \alpha_i\, \alpha_{i-1} \dots \alpha_1$$

Ako verižni razlomak konvergira, onda je

$$R = \lim_{k\to\infty} R_k = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\, \alpha_i\, \alpha_{i-1} \dots \alpha_1$$

pa je

$$|\, R - R_k| = \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} (-1)^{i+1}\, \alpha_i\, \alpha_{i-1} \dots \alpha_1 \right| .$$

Theorem 1 Ako su a_k, $b_k \gneqq 0$, tada vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned} R_1 &\gneqq R_3 \gneqq \dots \gneqq R_{2k-1} \gneqq \dots \quad , \\ R_0 &\lneqq R_2 \lneqq \dots \lneqq R_{2k} \lneqq \dots \end{aligned}$$

i

$$R_{2m-1} \gneqq R_{2k}$$

za svako m i k.

Theorem 2 Ako su a_k, $b_k \gneqq 0$ i vrijedi $a_k \leq b_k$ i $b_k \geq \varepsilon \gneqq 0$ za $k \geq 1$, gdje je ε neka konstanta, onda je verižni razlomak

$$R = b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \dots$$

konvergentan.

Nećemo raspisivat cijeli dokaz nego ćemo samo dati njegovu skicu. Iz uvjeta a_k, $b_k \gneqq 0$ slijedi $Q_k \gneqq 0$. Tada je

$$\alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_i = \frac{a_1 \, a_2 \dots a_i}{Q_i \, Q_{i-1}} \gneqq 0$$

Red

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} (-1)^{i+1} \alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_i$$

alternirajuć pa je po Leibnitzovom kriteriju dovoljno pokazati da n-ti član tog reda teži u 0 i da mu članovi opadaju po apsolutnoj vrijednosti.

Da bi pokazali konvergenciju, dovoljno je pokazati da je $\alpha_i \leq q$ za neko $q \lneqq 1$ (D'Alembertov kriterij).
Također, red je alternirajuć, pa po Leibnitzovom kriteriju, greška koju smo napravili ako R aproksimiramo sa R_k manja je ili jednaka prvom odbačenom članu reda, tj. vrijedi

$$|\, R_k - R| \leq \frac{a_1\, a_2 \ldots a_{k+1}}{Q_k\, Q_{k+1}}$$

3 SILAZNI ALGORITAM ZA IZVREDNJAVANJE BROJEVNIH VERIŽNIH RAZLOMAKA

Budući sada imamo neke ocjene o tome koliko dobro R_n aproksimira R, možemo predpostaviti da nam je unaprijed poznato koliko konvergencija trebamo da bi smo dobro aproksimirali neki verižni razlomak.
Definiramo li $F_n = b_n$ i računamo

$$F_k = b_k + \frac{a_{k+1}}{F_{k+1}} \qquad k = n-1, \ldots, 0$$

na kraju ćemo dobiti

$$R_n = F_0 \; .$$

Ova silazna rekurzija u svakom koraku ima točno jedno zbrajanje i jedno dijeljenje što je bolje od uzlazne rekurzije koja ima 2 zbrajanja i 4 množenja.