VERIŽNI RAZLOMCI I RACIONALNE APROKSIMACIJE

Kolegij: Numerička analiza
Studenti: Gaši Ana
Mijan Tamara
Projić Ante

Brojevni verižni razlomci

$$R = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots}}}}$$

$$R = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots\right], \quad R = b_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \frac{a_2 \mid}{\mid b_2} + \frac{a_3 \mid}{\mid b_3} + \cdots,$$

$$R = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots$$

Brojevni verižni razlomci

- Ako verižni razlomak *R* ograničimo na n članova dobivamo n-tu konvergenciju verižnog razlomka R_n

$$R_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots \frac{a_n}{b_n},$$

- Ako postoji vrijednost verižnog razlomka onda se ona definira kao

$$R = \lim_{n \to \infty} R_n,$$

Uzlazni algoritam za izvrednjavanje brojevnih verižnih razlomaka

- N-tu konvergenciju verižnog razlomka možemo prikazati kao kvocijent P_n i Q_n

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \cdots \frac{a_n}{b_n}.$$

- Za nultu konvergenciju vrijedi

$$R_0 = \frac{P_0}{Q_0} = b_0,$$

- Uz uvjet da je $P_0=b_0$, a $Q_0=1$, za prvu konvergenciju vrijedi

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1}{b_1 Q_0}.$$

Uzlazni algoritam za izvrednjavanje brojevnih verižnih razlomaka

- Ako još dodamo uvjet da je $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$, onda prethodna relacija dobiva oblik

$$R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_1 P_0 + a_1 P_{-1}}{b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}},$$

- Vidimo da smo brojnik zapisali korištenjem prethodnih brojnika, a nazivnik korištenjem prethodnih nazivnika

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2},$$
$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}.$$

Uzlazni algoritam za izvrednjavanje brojevnih verižnih razlomaka

- Zaključak: Ako definiramo

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = b_0, \quad Q_0 = 1,$$

onda dobivamo uzlazni algoritam za izvrednjavanje verižnih razlomaka koji glasi

$$\boxed{\begin{aligned} P_k &= b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}, \\ Q_k &= b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.}$$

Prvi tip verižnih razlomaka

- Kod prvog tipa verižnih razlomaka nazivnici su jednaki jedinici:

$$R' = b_0 + \frac{a'_1}{1^+} \frac{a'_2}{1^+} \frac{a'_3}{1^+} \cdots$$

- Koeficijenti a_k' iznose:

$$a'_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad a'_2 = \frac{a_2}{b_1 b_2}, \quad a'_3 = \frac{a_3}{b_2 b_3},$$

$$a'_k = \frac{a_k}{b_{k-1} b_k}.$$

Prvi tip verižnih razlomaka

- Uzlazni algoritam za izvrednjavanje kod prvog tipa verižnih razlomaka poprima sljedeći oblik:

$$\boxed{\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} + a'_k P_{k-2}, \\ Q_k &= Q_{k-1} + a'_k Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n,}$$

Drugi tip verižnih razlomaka

- Kod drugog tipa verižnih razlomaka brojnici su jednaki jedinici:

$$R' = b_0 + \frac{1}{b'_1+}\,\frac{1}{b'_2+}\,\frac{1}{b'_3+}\,\cdots$$

- Pripadni algoritam uzlaznog izvrednjavanja tada poprima oblik:

$$\boxed{\begin{aligned} P_k &= b'_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= b'_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n,}$$

Eulerova forma verižnih razlomaka

$$\boxed{R' = b_0 + \frac{\alpha_1}{1^+}\,\frac{\alpha_2}{(1-\alpha_2)^+}\,\frac{\alpha_3}{(1-\alpha_3)^+}\,\cdots}$$

- Veza između prije definiranog verižnog razlomka i Eulerove forme je:

$$\alpha_k = \frac{Q_{k-2}}{Q_k}\,a_k, \quad k \geq 2.$$

Eulerova forma verižnih razlomaka

- Eulerova forma se uglavnom koristi za dokazivanje tvrdnji vezanih uz konvergenciju verižnog razlomka
- Ako verižni razlomak konvergira onda je

$$R = \lim_{k\to\infty} R_k = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1,$$

pa je

$$|R_k - R| = \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} (-1)^{i+1} \alpha_i \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \right|.$$

Neki teoremi

- **Teorem 1.**
  - Ako su a_k, $b_k > 0$, tada vrijede nejednakosti

$$R_1 > R_3 > \cdots > R_{2k-1} > \cdots,$$
$$R_0 < R_2 < \cdots < R_{2k} < \cdots$$

$$R_{2m-1} > R_{2k}$$

  za svako m i k.
  - Vrijednosti neparnih konvergencija padaju porastom indeksa, a vrijednosti parnih rastu

Neki teoremi

- **Teorem 2.**
  - Ako su a_k, $b_k > 0$ i vrijedi $a_k \leq b_k$ i $b_k \geq \varepsilon > 0$ za $k \geq 1$, gdje je ε neka konstanta, onda je verižni razlomak konvergentan.
  - Teorem se može dokazati preko Eulerove forme

Silazni algoritam za izvrednjavanje verižnih razlomaka

- Unaprijed znamo koliko konvergencija nam je potrebno za dobru aproksimaciju
- Krenemo li "silazno" od b_n na sljedeći način ($F_n = b_n$)

$$F_k = b_k + \frac{a_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = (n), n-1, \ldots, 0,$$

- Na kraju dobivamo $R_n = F_0.$

- Silazna rekurzija u svakom koraku ima jedno zbrajanje i dijeljenje, a uzlazna 4 množenja i 2 zbrajanja

Funkcijski verižni razlomci

- **Tip I** – varijabla u brojniku:

$$f(x) = \beta_0 + \frac{x - x_1}{\beta_1 +} \frac{x - x_2}{\beta_2 +} \frac{x - x_3}{\beta_3 +} \cdots$$

- **Tip II** – varijabla u nazivniku:

$$f(x) = b_0 + \frac{a_1}{(x + b_1)+} \frac{a_2}{(x + b_2)+} \frac{a_3}{(x + b_3)+} \cdots$$

- Za izvrednjavanje se koristi silazni algoritam

Funkcijski verižni razlomci - izvrednjavanje

- **Tip I:** $F_n = \beta_n$

$$F_k = \beta_k + \frac{x - x_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = (n), n-1, \ldots, 0,$$

i na kraju je $f_n(x) = F_0.$

- **Tip II:** $F_n = b_n$

$$F_k = b_k + \frac{a_{k+1}}{x + F_{k+1}}, \quad k = (n), n-1, \ldots, 0,$$

i na kraju je $f_n(x) = F_0.$

Neki “poznati” verižni razlomci

$$e^x = \frac{1}{1^-}\,\frac{x}{1^+}\,\frac{x}{2^-}\,\frac{x}{3^+}\,\frac{x}{2^-}\,\frac{x}{5^+}\,\frac{x}{2^-}\,\frac{x}{7^+}\,\cdots.$$

$$= 1 + \frac{x}{1^-}\,\frac{x}{2^+}\,\frac{x}{3^-}\,\frac{x}{2^+}\,\frac{x}{5^-}\,\frac{x}{2^+}\,\frac{x}{7^-}\,\cdots,$$

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1^+}\,\frac{x}{2^+}\,\frac{x}{3^+}\,\frac{4x}{4^+}\,\frac{4x}{5^+}\,\frac{9x}{6^+}\,\frac{9x}{7^+}\,\frac{16x}{8^+}\,\frac{16x}{9^+}\,\cdots,$$

$$x \operatorname{tg} x = \frac{x^2}{1^-}\,\frac{x^2}{3^-}\,\frac{x^2}{5^-}\,\frac{x^2}{7^-}\,\cdots, \quad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

$$x \operatorname{arctg} x = \frac{x^2}{1^+}\,\frac{x^2}{3^+}\,\frac{4x^2}{5^+}\,\frac{9x^2}{7^+}\,\frac{16x^2}{9^+}\,\cdots,$$

$$x \operatorname{th} x = \frac{x^2}{1^+}\,\frac{x^2}{3^+}\,\frac{x^2}{5^+}\,\frac{x^2}{7^+}\,\cdots$$

$$x \operatorname{Arth} x = \frac{x^2}{1^-}\,\frac{x^2}{3^-}\,\frac{4x^2}{5^-}\,\frac{9x^2}{7^-}\,\frac{16x^2}{9^-}\,\cdots.$$

Hvala na pozornosti!!!