Gearova metoda

Numerička analiza

Mili Turić
Dušan Glavaški
Mario Volf

Sadržaj

Uvod

- Rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi
- Promjenjiv korak integracije
- Aproksimacija rješenja sustava
- Kruti sustavi

Metoda

- Gear-ova metoda se odvija u dva koraka:
  - Prediktorski:

    - aproksimacija vrijednosti

  - Korektorski:

    - korekcija vrijednosti dobivenih u prediktorskom dijelu

Prediktorski dio

$$Y_{i,n} = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j Y_{i,n-j} + h_n \beta_0 \dot{Y}_{i,n}$$

$$Y_{i,n}^0 - h_n \beta_0 \dot{Y}_{i,n}^0 = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j Y_{i,n-j}$$

$$h_n \dot{Y}_{i,n} = \sum_{j=1}^{q} \gamma_j Y_{i,n-j} + h_n \delta_0 \dot{Y}_{i,n}$$

$$Y_{i,n} = Y_{i,n}^{[0]} + \beta_0 (h_n \dot{Y}_{i,n} - h_n \dot{Y}_{i,n}^{[0]})$$

- Vrijednosti se računaju na temelju q prethodnih koraka
- α,β,γ,δ – konstante ovisne o metodi

Metoda

- Zajedno se pojavljuju $Y_{i,n}$ i $\dot{Y}_{i,n}$, pa jednadžbu treba riješiti iterativno
- Jednadžbu zapisujemo:

$$P_{ij,n}^{[m]}\left(Y_{j,n}^{[m+1]}-Y_{j,n}^{[m]}\right)=-g_i\left(Y_{1,n}^{[m]},Y_{2,n}^{[m]},\ldots,Y_{n_\alpha,n}^{[m]}\right)$$

- Pronalaženje nula pomoću Newtonove metode

Metoda

- Potreba za praćenjem povijesti rješenja
- Ne pišu se stvarne vrijednosti $Y_{i,n-1}, Y_{i,n-2}, \dots, Y_{i,n-q}$

$$\mathbf{z}_{i,n} = \left[Y_{i,n}, h_n \dot{Y}_{i,n}, \frac{h_n^2}{2!} \ddot{Y}_{i,n}, \dots, \frac{h_n^q}{q!} Y_{i,n}^{(q)} \right]$$

- Vektor aproksimacija vremenskih derivacija
- Predikcija trenutnog vektora se vrši množenjem sa gornjotrokutastom Pascalovom matricom:

$$\mathbf{A}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & \cdots & q \\ & & 1 & 3 & \cdots & \\ & & & 1 & \cdots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{z}_{i,n}^{[0]}$$

Metoda

- Iterativnim putem se izračuna korektor:

$$c_{i,n} = \frac{Y_{i,n} - Y_{i,n}^{[0]}}{l_0}$$

- Korekcija vektora aproksimacija vremenskih derivacija:

$$z_{ik,n} = z_{ik,n}^{[0]} + c_{i,n}\, l_k$$

- Konstante koje ovise o metodi i njenom redu: $l_k,\ (k = 0, \ldots, q)$

Metoda

- Ovisno o metodi raspoložive su tablice izračunatih konstanti

$q =$	1	2	3	4	5	6
l_0	1	2/3	6/11	24/50	120/274	720/1764
l_1	1	1	1	1	1	1
l_2		1/3	6/11	35/50	225/274	1624/1764
l_3			1/11	10/50	85/274	735/1764
l_4				1/50	15/274	175/1764
l_5					1/274	21/1764
l_6						1/1764

Metoda

- Sadrži algoritam za automatsku promjenu veličine koraka i reda metode
- Smanjenje vremena potrebnog za rješavanje sistema običnih diferencijalnih jednadžbi
- Ovisi o krutosti sistema
- U prva dva, tri koraka se reducira u Eulerovu metodu prvog reda s vrlo malim koracima, te se kasnije pokušava povećati korak i red metode

Metoda

- Javljanje grešaka zbog preskakanja mogućih integracija unutar preskočenog vremenskog intervala
- Procjena greške odbacivanja za *i-tu* zavisnu varijablu:

$$C_{q+1} h_n^{q+1} Y_{i,n}^{(q+1)} + O\left(h_n^{q+2}\right)$$

$$Y_{i,n}^{(q+1)} \approx \frac{Y_{i,n}^{(q)} - Y_{i,n-1}^{(q)}}{h_n}$$

Metoda

- Računanje korekcije n-tog koraka konvergira, ako je zadovoljeno:

$$D_2 = \left(\frac{c_{i,n}}{\varepsilon_i} \right)^2 \leq E_2$$

- gdje su:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_r \left| Y_{i,n-1} \right| + \varepsilon_a$$

$$E_2 = n_\alpha \left(\frac{1}{l_q C_{q+1} q!} \right)^2 = n_\alpha \left(\frac{q+1}{l_q q!!} \right)^2$$

Metoda

- ε_r i ε_a su relativna i apsolutna dozvoljena greška
- Za male vrijednosti $|Y_{i,n-1}|$ koristi se apsolutna, a za veće relativna
- U slučaju da uvjet konvergencije nije zadovoljen ponavlja se korak ali s manjim vremenskim intervalom:

$$h_{n,2} = \frac{h_n}{p_2}$$

- gdje je: $p_2 = 1.2\left(\frac{D_2}{E_2}\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}$

Metoda

- Ako se mijenja red metode, mijenja se i greška odbacivanja
- Smanjenje reda: $C_q h_n^q Y_{i,n}^{(q)} + O\left(h_n^{q+1}\right)$
  - Uvjet: $D_1 = \left(\dfrac{z_{iq,n}}{\varepsilon_i}\right)^2 \leq E_1$
  - Faktor promjene koraka: $p_1 = 1.3\left(\dfrac{D_1}{E_1}\right)^{\frac{1}{2q}}$

Metoda

- Za viši red metode: $C_{q+2} h_n^{q+2} Y_{i,n}^{(q+2)} + O\left(h_n^{q+3}\right)$
- Drugi član se zanemaruje, a prvi aproksimira
- Uvjet: $D_3 = \left(\dfrac{c_{i,n} - c_{i,n-1}}{\varepsilon_i} \right)^2 \leq E_3$
- Faktor promjene koraka: $p_3 = 1.4 \left(\dfrac{D_3}{E_3} \right)^{\frac{1}{2(q+2)}}$

Metoda

- Bira se najmanja vrijednost od tri faktora p1, p2 i p3 za dijeljenje koraka h_n:
  - p1 → red metode se smanjuje
  - p3 → red metode se povećava
  - p2 → red se ne mijenja
- Ako je faktor povećanja korak manji od 1.1 onda se povećanje ne ostvaruje jer će greška nastala prilikom povećanja sasvim prebrisati djelovanje ubrzanja integracije
- Nakon promjene koraka integracije, q+2 koraka se ne dozvoljava nova promjena

Primjena

- Kod krutih sistema:
  - Sistemi kemijskih reakcija
  - Automatika
  - Mehanika

Zaključak

- Puno brže rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi od analitičke metode
- Mogućnost automatskog mijenjanja integracijskog koraka
- Prediktor-korektorska metoda
- Potrebni početni uvjeti
- Odvaja podsustave ovisno o vremenskim promjenama
- Gotovo zanemarive greške

Hvala !