Izradili: Ante Aljinović, Goran Ćulum, Antonio Perić-Mažar

Linearne višekoračne metode

Sadržaj

- Linearne višekoračne metode
- Definicija
- Analiza

Linearne višekoračne metode

- **Linearne višekoračne metode** su metode koje se koriste u matematici za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi
- Jednokoračne metode (poput Eulerove i Runge-Kutta) odnose se samo na jednu prethodnu vrijednost kako bi se odredila trenutna vrijednost
- Višekoračne metode odnose se na više prethodnih vrijednosti funkcije kako bi se postigla veća preciznost
- Kod linearnih višekoračnih metoda, koristi se linearna kombinacija prethodnih vrijednosti funkcije

Linearne višekoračne metode

- Linearne višekoračne metode rješavaju probleme početne vrijednosti forme:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

- Dan je problem: $y' = y, \quad y(0) = 1.$

- Točno rješenje je: $y(t) = e^t$
- Korištena je jednostavna numerička metoda (Euler):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

- Ova metoda, primjenjena sa korakom veličine h=1/2 na problemu y' = y, daje slijedeći rezultate:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(y_0) = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 1.5, \\
y_2 &= y_1 + hf(y_1) = 1.5 + \tfrac{1}{2} \cdot 1.5 = 2.25, \\
y_3 &= y_2 + hf(y_2) = 2.25 + \tfrac{1}{2} \cdot 2.25 = 3.375, \\
y_4 &= y_3 + hf(y_3) = 3.375 + \tfrac{1}{2} \cdot 3.375 = 5.0625.
\end{aligned}$$

Linearne višekoračne metode

- Eulerova metoda je jednokoračna metoda
- Jednostavna višekoračna metoda je dvokoračna Adams–Bashforth metoda:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \tfrac{3}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}) - \tfrac{1}{2}hf(t_n, y_n).$$

- Ova metoda zahtijeva dvije vrijednosti y_{n+1} i y_n, kako bi izračunali slijedeću vrijednost y_{n+2}.
- Za Adams–Bashforth metodu potrebne su dvije točke, pa je uz vrijednost $y_0 = 1$ potrebno izračunati i vrijednost y_1¸ koristeći Eulerovu metodu kao drugu vrijednost
- S ovim izborom, Adams–Bashforth metoda daje rezultat (zaokruženo na 4 znamenke):

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \tfrac{3}{2}hf(y_1) - \tfrac{1}{2}hf(y_0) = 1.5 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1.5 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1 = 2.375,\\
y_3 &= y_2 + \tfrac{3}{2}hf(y_2) - \tfrac{1}{2}hf(y_1) = 2.375 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2.375 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1.5 = 3.7812,\\
y_4 &= y_3 + \tfrac{3}{2}hf(y_3) - \tfrac{1}{2}hf(y_2) = 3.7812 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 3.7812 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2.375 = 6.0234.
\end{aligned}$$

Linearne višekoračne metode

- Točno rješenje za $t = t_4 = 2$, $e^2 = 7.3891\ldots$, pa je Adams–Bashforth metoda preciznija od Eulerove.
- Ovo je uvijek slučaj ako je korak dovoljno mali.

LVM - Definicija

- Linearna višekoračna metoda je metoda forme:

$$y_{n+s} + a_{s-1}y_{n+s-1} + a_{s-2}y_{n+s-2} + \cdots + a_0 y_n$$
$$= h\big(b_s f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1}) + \cdots + b_0 f(t_n, y_n)\big),$$

- Gdje je h veličina koraka i f je desna strana diferencijalne jednadžbe. Koeficijenti $a_0, \ldots, a_{s-1}$ i $b_0, \ldots, b_s$ određuju metodu.
- Metoda je eksplicitna ako je $b_s = 0$. U tom slučaju rekurzivna relacija se može koristiti za izračunavanje y_{n+s}. Ako je $b_s \neq 0$, tada je metoda implicitna i rekurzija relacije je jednadžba y_{n+s} koja mora biti riješena.

LVM - Analiza

- Centralni koncept analize lineranih višekoračnih metoda, i svih drugih numeričkih metoda za diferencijalne jednadžbe, je konvergencija, red i stabilnost.
- Prvo pitanje je da li je metoda stabilna: da li je deferencijalna jednadžba

$$\begin{aligned} & y_{n+s} + a_{s-1} y_{n+s-1} + a_{s-2} y_{n+s-2} + \cdots + a_0 y_n \\ & \qquad = h\big(b_s f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1}) + \cdots + b_0 f(t_n, y_n)\big), \end{aligned}$$

- Dobra aproksimacija jednadžbe $y' = f(t,y)$?

LVM - Analiza

- Preciznije, višekoračne metode su stabilne ako lokalna pogreška ide prema nuli kako veličina koraka h ide prema nuli, gdje je lokalna greška definirana kao razlika između rezultata y_{n+s} metode, pretpostavljajući da su sve prethodne vrijednosti jednake, i da je točno rješenje jednadžbe u vremenu t_{n+s}.
- Računanje korištenjem Taylorove serije pokazuje da je linearna više[illegible] a ako i samo ako

$$\sum_{k=0}^{s-1} a_k = -1 \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{s} b_k = s + \sum_{k=0}^{s-1} k a_k .$$

LVM - Analiza

- Ako je metoda stabilna, onda je sljedeće pitanje kako dobro diferencijalna jednadžba koja definira numeričku metodu aproksimira diferencijalnu jednadžbu.
- Za višekoračnu metodu kažemo da ima red p ako je lokalna pogreška reda $O(h^{p+1})$ kako h ide prema nuli. Ova je ekvivalentno sljedećim uvjetima koeficijenata metode: $\sum_{k=0}^{s-1} a_k = -1 \quad \text{and} \quad qk^{q-1} \sum_{k=0}^{s} b_k = s^q + \sum_{k=0}^{s-1} k^q a_k \text{ for } q = 1, \ldots, p.$
- S-koračna Adams–Bashforth ima red s, dok s-koračna Adams–Moulton metoda je reda s + 1.

LVM - Analiza

- Ovi uvjeti su često formulirani koristeći karakteristične polinome:

$$\rho(z) = z^s + \sum_{k=0}^{s-1} a_k z^k \quad \text{and} \quad \sigma(z) = \sum_{k=0}^{s} b_k z^k.$$

- U uvjetima ovih polinoma, gornji uvjet metode mora imati red p i postaje

$$\rho(\mathrm{e}^h) - h\sigma(\mathrm{e}^h) = O(h^{p+1}) \quad \text{as } h \to 0.$$

- Metoda je stabilna ako ima jedan red, za koji vrijedi ρ(1) = 0 i ρ'(1) = σ(1).

LVM - Analiza

- Za višekoračnu metodu kažemo da je stabilna ako nultočke z_j polinoma $\rho(z)$ zadovoljavaju
  - 1. Sve nultočke su po apsolutnoj vrijednosti manje od 1 ($|z_j| \leq 1$).
  - 2. Ako je $|z_j| = 1$ tada je z_j jednostruka nultočka ($\rho'(z_j) = 0$).
- Zajedno uvjete 1 i 2 zovemo uvjet stabilnosti.
- Uvjet stabilnosti se često naziva i uvjet korijena.
- Linearna višekoračna metoda je konvergentna ako i samo ako je konzistentna i stabilna.
- Može se pokazati da stabilna r-koračna metoda ima red

$$p \leq \begin{cases} r+1, & \text{ako je } r \text{ neparan,} \\ r+2, & \text{ako je } r \text{ paran.} \end{cases}$$

KRAJ