

NUMERIČKA ANALIZA

KRAĆENJE GREŠKE ZAOKRUŽIVANJA

Grupa 3:

Srđan Popara

Mirko Čorić

Slaven Zebić

Agenda

- Greška zaokruživanja
 - Značaj greške zaokruživanja
 - Primjer (teoretski)
 - Ilustracija
 - Primjer (praktični)
- Kraćenje greške zaokruživanja
 - Primjer
 - Algoritam 1
 - Algoritam 2
- Zaključak

Greška zaokruživanja

- Zaokruživanje je svođenje broja na proizvoljan broj značajnih znamenki.
- Zaokruživanje može dovesti do značajnih greški!
- **Primjer 1:** $x = 1.2 \times 10^{-5}$

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$\cos(x) = 0.9999999999$$

$$1 - \cos(x) = 0.0000000001$$

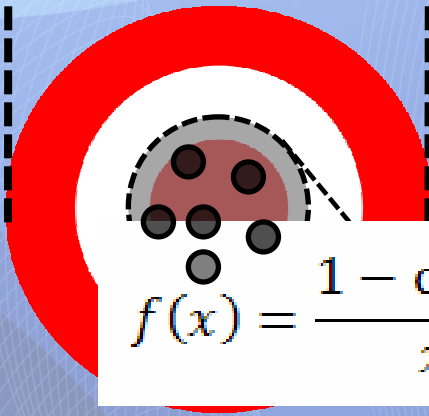
$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{10^{-10}}{1.44 \times 10^{-10}} \approx 0.6944$$

$$0 \leq f(x) \leq 0.5$$

Greška zaokruživanja

1

Cos(x)



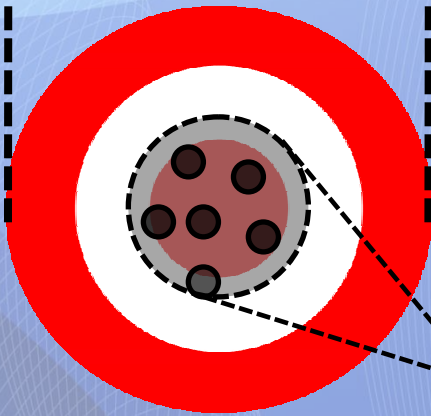
$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$



Greška zaokruživanja

1

Cos(x)



$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Rješenje:

$$\cos(x) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 6 \times 10^{-6}$$

Greška zaokruživanja

- Određivanje približne vrijednosti derivacije neke realne funkcije realnog argumenta:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Primjer 2:**

Funkciji koja je eksplicitno zadana želimo numerički izračunati derivaciju.

Funkcija $f(x)$:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Derivacija $f'(x)$:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$x = 1$$

$$ch(1) \approx 1.5431$$

$$sh(1) \approx 1.1752$$

Greška zaokruživanja

- Računat ćemo na računalu koristeći dvostruki IEEE format:

```
x = 1.0;
fx = f(x);
der = (exp(x) - exp(-x))/2.0;
do i = 1, 17
h = 10**(-i);
xh = x + h;
fh = f(xh);
dif = fh - fx;
g = dif / h;
apsgr = g - der;
relgr = (g - der)/der
enddo
```

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Za varijablu h ćemo uzeti padajući niz vrijednosti od 10^{-1} do 10^{-17} pri čemu je $f(x) = (\exp(x) + \exp(-x))/2$

Greška zaokruživanja

- Rezultat:

h	der	g	apsg	relgr
0.10e + 00	0.11752012e + 01	0.12543792e + 01	0.79e - 01	0.67e - 01
0.10e - 01	0.11752012e + 01	0.11829362e + 01	0.77e - 02	0.66e - 02
0.10e - 02	0.11752012e + 01	0.11759729e + 01	0.77e - 03	0.66e - 03
0.10e - 03	0.11752012e + 01	0.11752783e + 01	0.77e - 04	0.66e - 04
0.10e - 04	0.11752012e + 01	0.11752089e + 01	0.77e - 05	0.66e - 05
0.10e - 05	0.11752012e + 01	0.11752020e + 01	0.77e - 06	0.66e - 06
0.10e - 06	0.11752012e + 01	0.11752013e + 01	0.78e - 07	0.67e - 07
0.10e - 07	0.11752012e + 01	0.11752012e + 01	0.94e - 08	0.80e - 08
0.10e - 08	0.11752012e + 01	0.11752013e + 01	0.76e - 07	0.65e - 07
0.10e - 09	0.11752012e + 01	0.11752022e + 01	0.96e - 06	0.82e - 06
0.10e - 10	0.11752012e + 01	0.11752155e + 01	0.14e - 04	0.12e - 04
0.10e - 11	0.11752012e + 01	0.11752821e + 01	0.81e - 04	0.69e - 04
0.10e - 12	0.11752012e + 01	0.11746160e + 01	-0.59e - 03	-0.50e - 03
0.10e - 13	0.11752012e + 01	0.11768364e + 01	0.16e - 02	0.14e - 02
0.10e - 14	0.11752012e + 01	0.13322676e + 01	0.16e + 00	0.13e + 00
0.10e - 15	0.11752012e + 01	0.00000000e + 00	-0.12e + 01	-0.10e + 01
0.10e - 16	0.11752012e + 01	0.00000000e + 00	-0.12e + 01	-0.10e + 01

Kraćenje grešaka zaokruživanja

- U stabilnim algoritmima greške zaokruživanja se krata na taj način da konačni rezultat bude mnogo točniji nego međurezultati.

Primjer:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!}$$

Uočimo da $f(x) \rightarrow 1$ kada $x \rightarrow 0$.

Kraćenje grešaka zaokruživanja

Algoritam 1

```
y = exp(x)
if (x .eq. 0.0) then
f = 1.0
else
f = (y - 1.0)/x
endif
```

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Algoritam 2

```
y = exp(x)
z = alog(y)
if (y .eq. 1.0) then
f = 1.0
else
f = (y - 1.0)/z
endif
```

Kraćenje grešaka zaokruživanja

- Rezultat:

x	Algoritam 1	Algoritam 2	Egzaktno
0.1000000e + 00	0.1051710e + 01	0.1051709e + 01	0.1051709e + 01
0.1000000e - 01	0.1005018e + 01	0.1005017e + 01	0.1005017e + 01
0.1000000e - 02	0.1000524e + 01	0.1000500e + 01	0.1000500e + 01
0.1000000e - 03	0.1000166e + 01	0.1000050e + 01	0.1000050e + 01
0.1000000e - 04	0.1001358e + 01	0.1000005e + 01	0.1000005e + 01
0.1000000e - 05	0.9536742e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 06	0.1192093e + 01	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 07	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 08	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 09	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 10	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 11	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 12	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 13	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 14	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01
0.1000000e - 15	0.0000000e + 00	0.1000000e + 01	0.1000000e + 01

Zaključak

- Zaokruživanje nije uvijek loše iz nekoliko razloga:
 - Ponekad nam velika preciznost u rezultatima nije potrebna.
 - Ubrzava proces računanja u računalu jer radi sa kraćim brojevima.
 - Efekt zaokruživanja ovisi o ulozi koju taj rezultat (međurezultat) igra u preostalom računanju.