Numerička analiza

M. Klaričić Bakula

Listopad, 2008.

1 Uvod

Mnogi praktični problemi se nakon matematičkog modeliranja svode na rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Dok se nekim jednadžbama rješenje može eksplicitno izraziti pomoću poznatih funkcija, mnogo većem broju njih se ne može odrediti egzaktno rješenje. Takve jednadžbe rješavamo numerički, a ponekad se i rješivim jednadžbama može brže izračunati rješenje numeričkim putem nego analitičkim postupkom.
U ovom poglavlju ćemo se upoznati s nekoliko metoda za rješavanje **običnih diferencijalnih jenadžbi** (ODJ) oblika

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in (a, b),$$

uz dodatni početni ili rubni uvjet.
Ako je uz jednadžbu zadan **početni uvjet** $y(a) = y_0$, onda govorimo o **početnom (inicijalnom) problemu**.
Ako je umjesto početnog uvjeta uz jednadžbu zadan **rubni uvjet**

$$r(y(a), y(b)) = 0,$$

pri čemu je r neka zadana funkcija, onda govorimo o **rubnom problemu**.

2 Eulerova metoda

Prije nego se upoznamo općenito s jednokoračnim metodama za rješavanje ODJ, pogledajmo kao ilustraciju najjednostavniju od njih: **Eulerovu metodu**. To je metoda za rješavanje početnog problema oblika

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b].$$

Metoda se zasniva na ideji da se y' u jednadžbi zamjeni podijeljenom razlikom

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h),$$

pa rješenje diferencijalne jednadžbe zadovoljava jednadžbu

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy'(x) - h\mathcal{O}(h) = y(x) + hf(x, y(x)) - h\mathcal{O}(h) \\ &= y(x) + hf(x, y(x)) + \mathcal{O}\left(h^2\right) \end{aligned}$$

Član $-h\mathcal{O}(h) = \mathcal{O}\left(h^2\right)$ za dovoljno mali h možemo zanemariti, pa dobijemo

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)). \tag{1}$$

Očigledno točnost ove formule znatno ovisi o tomu koliku smo pogrešku napravili odbacivanjem člana $h\mathcal{O}(h)$, pa nam je cilj h smanjivati dok ne postignemo željenu točnost. Stoga interval $[a,b]$ podijelimo na n jednakih djelova, te stavimo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Korištenjem dobivene jednakosti (1) dobijemo aproksimaciju rješenja u točki $x_1 = a+h$:

$$y_1 = y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) = y(x_0) + hf(x_0, y_0).$$

Dobivenu aproksimaciju koristimo za računanje aproksimacije rješenja u točki $x_2 = a + 2h = x_1 + h$:

$$y_2 \approx y(x_1) + hf(x_1, y(x_1)) = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Ovaj postupak ponavljamo dok ne dođemo do kraja intervala, odnosno do $x_n = b$.

Opisani postupak nazivamo **Eulerovom metodom** i možemo ga kraće zapisati rekurzijom

$$y_{i+1} \approx y_i + hf\left(x_i, y_i\right), \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

gdje je početni uvjet y_0 zadan kao početni uvjet diferencijalne jednadžbe. Dobivene vrijednosti y_i su **aproksimacije rješenja diferencijalne jednadžbe** u točkama x_i.

3 Jednokoračne metode

Koristeći sličnu ideju kao u Eulerovoj metodi, diferencijalnu jednadžbu

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b]$$

općenito možemo riješiti tako da interval $[a, b]$ podijelimo na n jednakih podintervala označivši

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n,$$

dok aproksimaciju rješenja y_{i+1} u točki x_{i+1} računamo iz y_i korištenjem aproksimacije oblika

$$y(x+h) \approx y(x) + h\Phi(x, y(x), h; f),$$

iz čega dobijemo rekurziju

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h; f), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Funkcija Φ zove se **funkcija prirasta**, a različiti izbori te funkcije definiraju različite metode. Uočimo da je sama funkcija f jedan od parametara funkcije Φ : tako je u Eulerovoj metodi s kojom smo se upoznali

$$\Phi\left(x, y\left(x\right), h; f\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right).$$

Metode oblika

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi\left(x_i, y_i, h; f\right), \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

nazivamo **jednokoračnim metodama** jer za aproksimaciju y_{i+1} koriste samo vrijednost y_i, tj. u jednom koraku dobijemo iz y_i sljedeću aproksimaciju y_{i+1}.
Da bismo pojednostavnili zapis ubuduće ćemo izostaviti parametar f iz zapisa argumenata funkcije Φ.
O odabiru funkcije Φ ovisi i točnost metode. Za očekivati je da ako odaberemo Φ tako da aprosimacija točnog rješenja y dana s

$$y\left(x+h\right) \approx y\left(x\right) + h\Phi\left(x, y\left(x\right), h; f\right)$$

bude što točnija, to će točnija biti i aproksimacija y_{i+1} vrijednosti $y\left(x_i\right)$ dana rekurzijom $\left(2\right)$.

Pogrešku aproksimacije

$$y\left(x+h\right)\approx y\left(x\right)+h\Phi\left(x,y\left(x\right),h;f\right)$$

danu s

$$\gamma\left(x;h\right)=\Delta\left(x;h\right)-\Phi\left(x,y\left(x\right),h\right),$$

pri čemu je y točno rješenje jednadžbe i

$$\Delta\left(x;h\right)=\frac{y\left(x+h\right)-y\left(x\right)}{h}$$

nazivamo **lokalnom pogreškom diskretizacije**.

Red metode odgovara njenoj točnosti. Općenito, za jednokoračnu metodu kažemo da je **reda (konzistencije)** p ako je

$$\gamma(x;h) = \mathcal{O}(h^p).$$

Što je veći p metoda je točnija, a to postižemo odgovarajućim odabirom funkcije Φ. Već smo vidjeli da je npr. Eulerova metoda reda 2.
Pod točnošću metode podrazumijevamo ponašanje pogreške

$$y(x_i) - y_i.$$

Da bismo pojednostavnili argumentaciju, promatrat ćemo pogrešku u fiksiranoj točki y. Ako je jednokoračna metoda reda p, onda je

$$y(b) - y_n = \mathcal{O}(h^p).$$

4 Runge-Kuttine metode

Najpoznatije jednokoračne metode su zasigurno Runge-Kuttine metode. Kod ovih metoda je funkcija prirasta Φ oblika

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{j=1}^{r} \omega_j k_j(x, y, h),$$

gdje su funkcije k_j zadane s

$$k_j(x, y, h) = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^{r} \alpha_{jl} k_l(x, y, h)\right), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Broj r nazivamo **brojem stadija** RK metode, i on označava koliko puta moramo izvrednjavati funkciju f u svako koraku metode. Različiti izbor koeficijenata ω_j, c_j i α_{jl} definira različite RK metode.
Iz gornjeg izraza vidimo da se funkcije k_j javljaju s obje strane jednadžbe, tj. zadane su implicitno: zbog toga govorimo o **implicitnim RK metodama**.

Koeficijenati $\omega_j,\ c_j$ i α_{jl} se najčešće biraju tako da red metode bude što je moguće veći. U praksi se najčešće koriste metode kod kojih je $\alpha_{jl} = 0$ za $l \geq j$. Naime, u tom slučaju k_j možemo izračunati preko $k_1, \ldots, k_{j-1}$, pa su funkcije k_j zadane eksplicitno. Takve Runge-Kuttine metode nazivamo **eksplicitnim RK metodama**. Nadalje, obično se dodaje i uvjet

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{jl} = c_j.$$

Smisao ovog uvjeta bit će objašnjen kasnije.
Što se točno događa i kako se biraju koeficijenti najbolje ćemo vidjeti iz jednoga primjera.

5 Primjer: Eksplicitna RK metoda s dva stadija

Pretpostavimo da za $r = 2$ imamo ispunjene prije spomenute uvjete na koeficijente α_{jl}, tj. da se radi o eksplicitnoj metodi. Tada imamo samo jedan nepoznati koeficijent $\alpha_{jl} = \alpha$ i vrijedi

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,h) &= \sum_{j=1}^{2} \omega_j k_j(x,y,h) = \omega_1 k_1(x,y,h) + \omega_2 k_2(x,y,h),\\ k_1 &= k_1(x,y,h) = f(x,y),\\ k_2 &= k_2(x,y,h) = f(x+\alpha h, y+\alpha h k_1).\end{aligned}$$

Razvojem k_2 u Taylorov red reda 2 oko nule po varijabli h dobijemo

$$k_2 = f + h\left(f_x\alpha + f_y\alpha f\right) + \frac{h^2}{2}\left(f_{xx}\alpha^2 + 2f_{xy}\alpha^2 f + f_{yy}\alpha^2 f^2\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

Razvoj u Taylorov red reda 3 rješenja y diferencijalne jednadžbe $y' = f$ ima oblik

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}\left[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)\right] + \mathcal{O}\left(h^4\right).$$

Koristili smo pravila deriviranja

$$\begin{aligned} y'' &= f_x + f_y f, \\ y''' &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f). \end{aligned}$$

Sada je lokalna pogreška diskretizacije jednaka

$$\begin{aligned} & \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) \\ = & \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h) \\ = & (1 - \omega_1 - \omega_2) f + h(f_x + f_y f)\left(\frac{1}{2} - \omega_2 \alpha\right) \\ & + h^2\left[\left(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_2\alpha^2}{2}\right) + \frac{1}{6}f_y(f_x + f_y f)\right] + \mathcal{O}\left(h^3\right). \end{aligned}$$

Da bi metoda bila reda jedan koeficijente treba odabrati tako da se poništi prvi član u razvoju (tj. član kod kojeg se javlja h^0), dakle treba biti

$$1 - \omega_1 - \omega_2 = 0.$$

Ako je još ispunjeno i

$$\frac{1}{2} - \omega_2 \alpha = 0,$$

metoda će bit reda dva jer će isčeznuti član uz h^1. Kako imamo tri nepoznanice i dvije jednadžbe, očito nam za dobiti jedinstveno rješenje manjka barem jedna jednadžba. Uvođenjem slobodnog koeficijenta t dobivamo jedno moguće parametarsko rješenje gornjeg sustava:

$$\omega_2 = t \neq 0, \quad \omega_1 = 1 - t, \quad \alpha = \frac{1}{2t}.$$

Uočimo da se t ne može odabrati tako da metoda bude reda 3, tj. tako da iščezne i član uz h^2.

U posebnom slučaju $\omega_2 = 0$ radi se o metodi s jednim stadijem, i to upravo o **Eulerovoj metodi**.

Za $\omega_2 = t = 1$ dobijemo **modificiranu Eulerovu metodu** kod koje je

$$\Phi\left(x,y,h\right) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f\left(x,y\right)\right).$$

Za $\omega_2 = t = 1/2$ dobijemo **Heunovu metodu** kod koje je

$$\begin{aligned} \Phi\left(x,y,h\right) &= \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right), \\ k_1 &= f\left(x,y\right), \\ k_2 &= f\left(x+h, y+hk_1\right). \end{aligned}$$

6 Eksplicitne RK metode s četiri stadija (RK-4 metode)

U praksi najčešće susrećemo RK metode s četiri stadija. Odgovarajuće jednadžbe koje moraju zadovoljavati nepoznati koeficijenti RK-4 metoda su:

$$\begin{aligned}
\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 &= 1 && \text{(R1)}\\
\omega_2 c_2 + \omega_3 c_3 + \omega_4 c_4 &= \frac{1}{2} && \text{(R2)}\\
\omega_2 c_2^2 + \omega_3 c_3^2 + \omega_4 c_4^2 &= \frac{1}{3} && \text{(R3a)}\\
\omega_3 c_2 \alpha_{32} + \omega_4 \left(c_2 \alpha_{42} + c_3 \alpha_{43} \right) &= \frac{1}{6} && \text{(R3b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 c_2^3 + \omega_3 c_3^3 + \omega_4 c_4^3 &= \frac{1}{4} && \text{(R4a)}\\
\omega_3 c_2^2 \alpha_{32} + \omega_4 \left(c_2^2 \alpha_{42} + c_3^2 \alpha_{43}\right) &= \frac{1}{12} && \text{(R4b)}\\
\omega_3 c_2 c_3 \alpha_{32} + \omega_4 \left(c_2 \alpha_{42} + c_3 \alpha_{43}\right) c_4 &= \frac{1}{8} && \text{(R4c)}\\
\omega_4 c_2 \alpha_{32} \alpha_{43} &= \frac{1}{24} && \text{(R4d)}
\end{aligned}$$

Pri tom je

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \alpha_{21}, \quad c_3 = \alpha_{31} + \alpha_{32}, \quad c_4 = \alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43}.$$

Dakle, vidimo da (nakon sređivanja) imamo 8 jednadžbi i 10 nepoznatih koeficijenata. Naglasimo sljedeće: ako želimo metodu reda 1, onda treba biti ispunjen samo uvjet $(R1)$, ako želimo metodu reda 2, onda treba biti ispunjen i uvjet $(R2)$, ako želimo metodu reda 3, onda trebaju biti ispunjeni i uvjeti $(R3a)$ i $(R3b)$ i tako dalje. U najboljem slučaju imat ćemo osam jednadžbi, što u konačnici znaći najmanje dva slobodna parametra u rješenju.

Napomenimo da metoda s četiri stadija (RK-4 metoda) može biti **najviše reda 4**: dva stupnja slobode iz sustava jednadžbi ne mogu se iskoristiti tako da se red metode podigne na 5. Općenito, za metode s jednim, dva, tri ili četiri stadija red metode u najboljem slučaju odgovara broju stadija. Za metode s 5, 6 i 7 stadija najveći mogući red je redom 4, 5 ili 6, dok je za metode s 8 ili više stadija najveći mogući red barem za dva manji od broja stadija. **Upravo to je razlog što su metode s četiri stadija najpopularnije**. Naime, da bismo povećali red za jedan (s 4 na 5) moramo povećati broj stadija za dva (s 4 na 6), a to znatno uvećava složenost metode.

7 Neke poznate RK-4 metode

7.1 Klasična Runge-Kutta metoda

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\
k_1 &= f\left(x, y\right), \\
k_2 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 &= f\left(x + h, y + hk_3\right).
\end{aligned}
$$

7.2 3/8 metoda

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right), \\
k_1 &= f\left(x, y\right), \\
k_2 &= f\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(x + \frac{2h}{3}, y - \frac{h}{3}k_1 + hk_2\right), \\
k_4 &= f\left(x + h, y + h\left(k_1 - k_2 + k_3\right)\right).
\end{aligned}
$$

7.3 Gillova metoda

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{6}\left(k_1 + \left(2-\sqrt{2}\right)k_2 + \left(2+\sqrt{2}\right)k_3 + k_4\right),\\
k_1 &= f\left(x, y\right),\\
k_2 &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x+\frac{h}{2}, y+h\frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1 + h\frac{2-\sqrt{2}}{2}k_2\right),\\
k_4 &= f\left(x+h, y-h\frac{\sqrt{2}}{2}k_2 + h\frac{2+\sqrt{2}}{2}k_3\right).
\end{aligned}
$$

8 O koeficijentima Runge-Kuttine metode

Iz prethodnog smo vidjeli da za RK metode s 2 i 4 stadija treba vrijediti

$$\sum_j \omega_j = 1$$

da bi one bile konzistentne s redom barem 1. To općenito vrijedi za sve RK metode, a o tomu nam govori sljedeći teorem.

TEOREM. Runge-Kuttina metoda sa s stadija ima red konzistencije barem 1 ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{j=1}^{s} \omega_j = 1.$$

DOKAZ. Teorem srednje vrijednosti daje nam ocjene

$$y\left(x+h\right)=y\left(x\right)+hy'\left(x\right)+\mathcal{O}_1\left(h^2\right)$$

i

$$k_j=f\left(x+c_jh,y+h\sum\nolimits_l\alpha_{jl}k_l\right)=f\left(x,y\right)+\mathcal{O}_2\left(h\right),$$

pa lokalna greška diskretizacije koja je dana s

$$\gamma\left(x;h\right)=\frac{y\left(x+h\right)-y\left(x\right)}{h}-\sum_j\omega_jk_j$$

zadovoljava jednakost

$$\gamma\left(x;h\right)=y'\left(x\right)+\mathcal{O}_1\left(h\right)-\sum\nolimits_j\omega_j\left(f\left(x,y\right)+\mathcal{O}_2\left(h\right)\right).$$

Budući je y rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = f\left(x, y\right),$$

to vrijedi

$$\begin{aligned}
\gamma\left(x; h\right) &= f\left(x, y\right) + \mathcal{O}_1\left(h\right) - \sum\nolimits_j \omega_j \left(f\left(x, y\right) + \mathcal{O}_2\left(h\right)\right) \\
&= f\left(x, y\right)\left(1 - \sum\nolimits_j \omega_j\right) + \mathcal{O}_3\left(h\right).
\end{aligned}$$

Odavde lako slijedi tvrdnja teorema ■

Sljedeća zanimljivost je vezana uz određivanje koeficijenata c_j. Već smo prije spomenuli da je uobičajen izbor $c_j = \sum_l \alpha_{jl}$. Međutim, ostaje pitanje da li je takav izbor najbolji? Odgovor je **da** i o tomu nam govori naredni teorem.

TEOREM. Neka je RK metoda zadana s

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^{s} \widetilde{k}_j, \quad \widetilde{k}_j = f\left(x + \widetilde{c}_j, y + h \sum_{l=1}^{s} \alpha_{jl} \widetilde{k}_l\right)$$

reda konzistencije $\widetilde{p}$, te neka je p red konzistencije metode zadane s

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^{s} k_j, \quad k_j = f\left(x + c_j, y + h \sum_{l=1}^{s} \alpha_{jl} k_l\right),$$

pri čemu je

$$c_j = \sum_{l=1}^{s} \alpha_{jl}.$$

Tada je $p \geq \widetilde{p}$.

9 Konvergencija jednokoračnih metoda

U ovom odjeljku ćemo promatrati ponašanje konvergencije približnog rješenja y_i dobivenog nekom jednokoračnom metodom.
Označimo s $F_n(a,b)$ prostor svih funkcija $f : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kojima su sve parcijalne derivacije do uključivo reda n neprekidne i ograničene. U daljnjem tekstu ćemo pretpostavljati da je promatrana funkcija $f \in F_1(a,b)$, a s y ćemo označiti egzaktno rješenje početnog problema

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a,b], \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da pretpostavka $f \in F_1(a,b)$ povlači egzistenciju i jedinstvenost rješenja y na intervalu $[a,b]$.
Neka $\Phi(x,y,h)$ definira jednokoračnu metodu

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

gdje je $x_{i+1} = x_i + h$. Zanima nas ponašanje **pogreške**

$$e_i = y_i - y(x_i).$$

Za fiksirani $x \in [a,b]$ definiramo **korak**

$$h_n = \frac{x - x_0}{n}$$

i **globalnu pogrešku diskretizacije**

$$e(x, h_n) = y_n - y(x).$$

Promatrat ćemo globalnu pogrešku diskretizacije kada $n \to \infty$ jer tada $h_n \to 0$ i $x_n = x$.

DEFINICIJA. Jednokoračna metoda je **konvergentna** ako za sve $x \in [a,b]$ i sve $f \in F_1(a,b)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} e(x, h_n) = 0.$$

Ono što je za nas značajno jest da su **sve jednokoračne metode reda** $p > 0$ **konvergentne** i da, štoviše, vrijedi

$$e(x, h_n) = \mathcal{O}(h_n^p).$$

Nadalje, red globalne greške diskretizacije jednak je redu lokalne greške diskretizacije.

LEMA. Ako brojevi ξ_i zadovoljavaju ocjenu oblika

$$|\xi_{i+1}| \leq (1+\delta)\,|\xi_i| + B, \quad \delta > 0, \quad B \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

onda vrijedi

$$|\xi_n| \leq e^{n\delta}\,|\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B.$$

DOKAZ. Iz pretpostavke leme odmah slijedi

$$\begin{aligned} |\xi_n| &\leq (1+\delta)^n\,|\xi_0| + \left[1 + (1+\delta) + \cdots (1+\delta)^{n-1}\right] B \\ &= (1+\delta)^n\,|\xi_0| + \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} B \\ &\leq e^{n\delta}\,|\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B, \end{aligned}$$

jer je $0 \leq 1 + \delta < e^{\delta}$ za $\delta > -1$ ■

TEOREM. Za dane $x_0 \in [a, b]$ i $y_0 \in \mathbb{R}$ promatramo početni problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

koji ima jedinstveno rješenje $y(x)$. Neka je funkcija Φ neprekidna na skupu

$$G = \{(x, y, h) \mid x \in [a, b], \ \ |y - y(x)| \leq \gamma, \ \ |h| \leq h_0\}$$

za neke $h_0, \gamma > 0$. Nadalje, neka postoje pozitivne konstante M i N takve da vrijedi

$$|\Phi(x, y_1, h) - \Phi(x, y_2, h)| \leq M |y_1 - y_2|$$

za sve $(x, y_1, h), (x, y_2, h) \in G$ i

$$|\gamma(x, h)| = |\Delta(x, h) - \Phi(x, y(x), h)| \leq N |h|^p, \quad p > 0$$

za sve $x \in [a, b], \ \ h \leq h_0$. Tada postoji $\overline{h} \in (0, h_0]$ takav da za globalnu pogrešku diskretizacije vrijedi nejednakost

$$|e(x, h_n)| \leq |h_n|^p N \frac{e^{M|x - x_0|} - 1}{M}$$

za sve $x \in [a, b]$ i $h_n = (x - x_0)/n, \ \ n \in \mathbb{N}$, uz $|h_n| \leq \overline{h}$. Ako je $\gamma = \infty$ onda je $\overline{h} = h_0$.

DOKAZ. Funkcija $\widetilde{\Phi}$ definirana s

$$\widetilde{\Phi}(x,y,h) = \begin{cases} \Phi(x,y,h), & (x,y,h) \in G \\ \Phi(x,y(x)+\gamma,h), & x \in [a,b], \ \ |h| \le h_0, \ \ y - y(x) \ge \gamma \\ \Phi(x,y(x)-\gamma,h), & x \in [a,b], \ \ |h| \le h_0, \ \ y - y(x) \le -\gamma \end{cases}$$

je očigledno neprekidna na skupu

$$\widetilde{G} = \{(x,y,h) \mid x \in [a,b], \ \ y \in \mathbb{R}, \ \ |h| \le h_0\}$$

i za sve $(x,y_1,h), (x,y_2,h) \in \widetilde{G}$ zadovoljava uvjet

$$\left|\widetilde{\Phi}(x,y_1,h) - \widetilde{\Phi}(x,y_2,h)\right| \le M\,|y_1 - y_2|\,. \tag{3}$$

Zbog

$$\widetilde{\Phi}(x, y(x), h) = \Phi(x, y(x), h)$$

također vrijedi

$$\left|\Delta(x, h) - \widetilde{\Phi}(x, y(x), h)\right| \leq N|h|^p, \quad x \in [a, b], \quad |h| \leq h_0. \tag{4}$$

Pretpostavimo da jednokoračna metoda generirana s $\widetilde{\Phi}$ definira aproksimacije $\widetilde{y}_i$ za $y(x_i)$, pri čemu je $x_i = x_0 + ih$, tj.

$$\widetilde{y}_{i+1} = \widetilde{y}_i + h\widetilde{\Phi}(x_i, \widetilde{y}_i, h), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Zbog

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\Delta(x_i, h)$$

za pogrešku $\widetilde{e}_i = \widetilde{y}_i - y(x_i)$ lako dobijemo rekurzivnu formulu

$$\widetilde{e}_{i+1} = \widetilde{e}_i + h\left[\widetilde{\Phi}(x, \widetilde{y}_i, h) - \widetilde{\Phi}(x, y(x_i), h)\right] + h\left[\widetilde{\Phi}(x, y(x_i), h) - \Delta(x_i, h)\right].$$

No iz (3) i (4) imamo

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\Phi}\left(x_i, \widetilde{y}_i, h\right) - \widetilde{\Phi}\left(x_i, y\left(x_i\right), h\right)\right| &\leq M\left|\widetilde{y}_i - y\left(x_i\right)\right| = M\left|\widetilde{e}_i\right|, \\ \left|\widetilde{\Phi}\left(x_i, y\left(x_i\right), h\right) - \Delta\left(x_i, h\right)\right| &\leq N\left|h\right|^p, \end{aligned}$$

pa dobivamo i rekurzivnu ocjenu

$$\left|\widetilde{e}_{i+1}\right| \leq \left(1 + |h|\, M\right)\left|\widetilde{e}_i\right| + N\left|h\right|^p, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

pri čemu je $\widetilde{e}_0 = \widetilde{y}_0 - y\left(x_0\right) = 0$. Iz prethodne leme lako slijedi

$$\left|\widetilde{e}_i\right| \leq N\left|h\right|^p \frac{e^{M|x-x_i|} - 1}{M}.$$

Neka je sada $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, fiksiran i $h = h_n = (x - x_0)/n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada zbog

$$x_n = x_0 + nh = x, \quad \widetilde{e}(x, h_n) = \widetilde{e}_n$$

vrijedi

$$|\widetilde{e}(x, h_n)| \leq N |h|^p \frac{e^{M|x-x_0|} - 1}{M}$$

za sve $x \in [a, b]$ i sve h_n za koje je ispunjeno $|h_n| \leq h_0$. Budući je $|x - x_0| \leq |b - a|$ i $\gamma > 0$, to postoji $\overline{h} \in (0, h_0]$ takav da je $|\widetilde{e}(x, h_n)| \leq \gamma$ za sve $x \in [a, b]$ i sve h_n za koje je ispunjeno $|h_n| \leq h_0$. Drugim riječima, za jednokoračnu metodu generiranu funkcijom prirasta Φ zbog definicije $\widetilde{\Phi}$ za $|h| \leq h_0$ imamo ispunjeno

$$\widetilde{y}_i = y_i, \quad \widetilde{e}_i = e_i, \quad \widetilde{\Phi}(x_i, \widetilde{y}_i, h) = \Phi(x_i, y_i, h).$$

Tvrdnja teorema, dakle, slijedi za sve $x \in [a, b]$ i sve $h_n = (x - x_0)/n$, $n \in \mathbb{N}$, uz $|h_n| \leq \overline{h}$ $\blacksquare$

10 Višekoračne metode

…