Zadaci UTB

1. Djeljivost

Napomena: Ako je

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

gdje su p_i različiti prosti brojevi i $\alpha_i \in \mathbb{N}$ njihove kratnosti, onda je ukupan broj različitih prirodnih djelitelja od n dan formulom

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

1. Ako prirodni broj n ima prost broj pozitivnih djelitelja, dokažite da je onda n jednak potenciji nekoga prostoga broja.

2. Odredite najmanji prirodni broj koji ima točno 15 različitih prirodnih djelitelja i koji su svi neparni.

3. Koliko ima pozitivnih djelitelja broja 1980000 koji nisu potpuni kvadrati ?

4. Dokažite za svaki $m \in \mathbb{N}$ broj:

a) $n = m^{12} - m^6$ je djeljiv s 8;

b) $n = m^5 - 5m^3 + 4m$ je djeljiv s 120;

Napomena:

i) Od pet uzastopnih prirodnih brojeva:

- barem dva su parna;
- barem jedan je djeljiv s 3;
- točno jedan je djeljiv s 5;

ii) Od četiri uzastopna prirodna broja:

- dva su parna i jedan od njih je djeljiv s 4, a drugi nije;

5. Dokažite:

a) Ako je p prost broj i $p > 3$ dokažite da je onda broj $p^2 - 1$ djeljiv s 24.

b) Ako su p i q prosti brojevi i $p, q > 3$ dokažite da je onda broj $p^2 - q^2$ djeljiv s 24.

6. Dokažite:

- Produkt dva uzastopna cijela broja je djeljiv s 2;
- Zbroj dva uzastopna neparna cijela broja je djeljiv s 4;
- Produkt tri uzastopna cijela broja je djeljiv s 6;
- Razlika kvadrata dva neparna broja je djeljiva s 8;
- Suma kubova tri uzastopna cijela broja je djeljiva s 9;

7. Postoji li prirodan broj m, takav da njegova četvrta potencija pri dijeljenju s 4 daje kvocijent koji je prost broj i ostatak 1?

Napomena:

$$(abcd)_{10} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d$$

gdje je $a \in \{1, 2, ...9\}$ i $b, c, d \in \{0, 1, 2, ...9\}$
Slično,
$$(abcd)_2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d$$

gdje je $a \in \{1\}$ i $b, c, d \in \{0, 1\}$.

8. Dokažite:

- Ako se od dvoznamenkastog broja oduzme broj koji se dobije zamjenom njegovih znamenaka, dobije se broj djeljiv s 9.

- Analognu tvrdnju dokažite za $n-$znamenkasti broj: Ako se od $n-$znamenkastog broja oduzme broj s obrnutim poretkom znamenaka, dobije se broj djeljiv s 9.

9. Kriteriji djeljivosti u bazi 10:

- Broj je djeliv s 2 ako mu je zadnja znamenaka parna;
- Broj je djeliv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv 3;
- Broj je djeliv s 5 ako mu je zadnja znamenaka 0 ili 5;
- Broj je djeliv s 6 ako je djeljiv s 2 i s 3;
- Broj je djeliv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4 ili ako je suma dvostruke znamenke desetice i znamenke jedinice djeljiva s 4;
- Broj je djeliv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8;
- Broj je djeliv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv 9;
- Broj je djeliv s 10 ako mu je zadnja znamenaka 0;

Goldbachova slutnja: svaki se paran broj $2n$, $2n \geq 4$, može izraziti kao suma dva prosta broja p i q, tj.

$$p + q = 2n.$$

Tvrdnja je još ne dokazana. (Nagrada 1.000.000 \$ - za dokaz do travnja 2002.)

10. Odredite cijele brojeve x i y (ako postoje) takve da je

$$852x + 548y = 12. \tag{1}$$

a)

$$\begin{aligned} 852 &= 548 \cdot \mathbf{1} + 304 \\ 548 &= 304 \cdot \mathbf{1} + 244 \\ 304 &= 244 \cdot \mathbf{1} + 60 \\ 244 &= 60 \cdot \mathbf{4} + \underline{4} \\ 60 &= 4 \cdot 15 \end{aligned}$$

$\gcd(852, 548) = 4$ i $4 \,|\, 12 \Longrightarrow$ (1) ima rješenje

b)

$$852x + 548y = 12 \Longleftrightarrow 213x + 137y = 3$$

$\gcd(213, 137) = 1$ i $1 \,|\, 3 \Longrightarrow$ $213x+137y = 3$ ima rješenje

$213x + 137y = 1$ ima rješenje $(x, y) = (a, b) \Longrightarrow$

$(x, y) = (3a, 3b)$ je rješenje od $213x + 137y = 3$

Tražimo rješenje od:

$$213x + 137y = 1. \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
213 &= 137 \cdot \mathbf{1} + 76 \\
137 &= 76 \cdot \mathbf{1} + 61 \\
76 &= 61 \cdot \mathbf{1} + 15 \\
61 &= 15 \cdot \mathbf{4} + 1 \\
15 &= 15 \cdot 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{-1} &= 1, x_0 = 0, x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1} \\
y_{-1} &= 0, y_0 = 1, y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}
\end{aligned}
$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	1	1	4
x_i	1	0	1	-1	2	$\mathbf{-9}$
y_i	0	1	-1	2	-3	$\mathbf{14}$

Rješenje od (2): $(x, y) = (-9, 14)$

Provjera:

$$213 \cdot (-9) + 137 \cdot 14 = 1$$

Rješenje od (1): $(x, y) = (-9 \cdot 3, 14 \cdot 3) = (-27, 42)$

Provjera:

$$213 \cdot (-27) + 137 \cdot 42 = 3$$

$$852 \cdot (-27) + 548 \cdot 42 = 12$$