Zakrivljenost

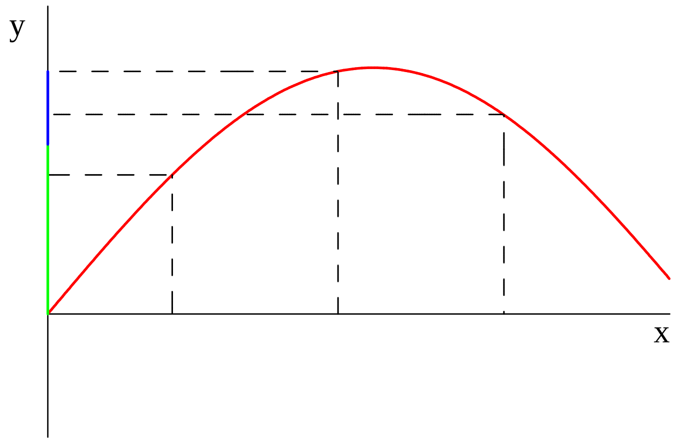
Definicija 4 Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na intervalu $(a,b) \subseteq A$ ako za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$, vrijedi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

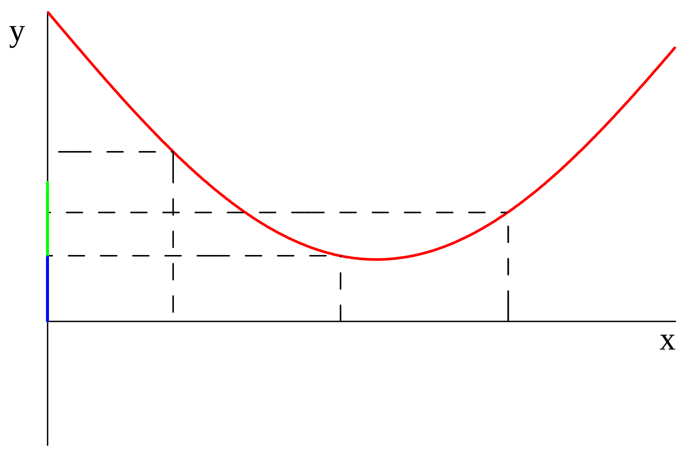
Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je konkavna na intervalu $(a,b) \subseteq A$ ako za proizvoljne točke $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$, vrijedi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

U slučaju strogih nejednakosti, za funkciju f kažemo da je strogo konveksna odnosno strogo konkavna.



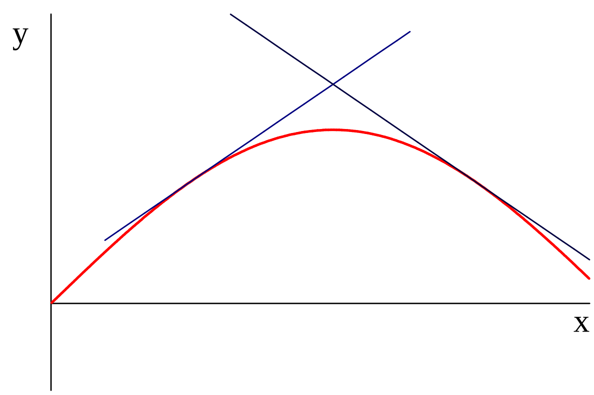
graf strogo konkavne funkcije



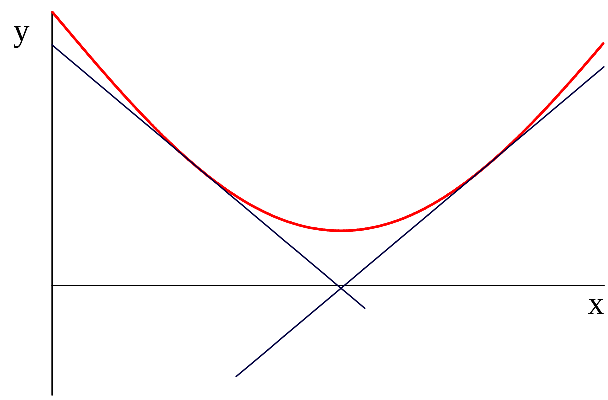
graf strogo konveksne funkcije

Geometrijska interpretacija:

- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ <u>konveksna</u> na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda se njen graf nalazi <u>iznad</u> tangente u svakoj točki $x \in (a, b)$.
- Ako je $f : A \to \mathbb{R}$ <u>konkavna</u> na intervalu $(a, b) \subseteq A$, onda se njen graf nalazi <u>ispod</u> tangente u svakoj točki $x \in (a, b)$.



graf strogo konkavne funkcije i tangenta



graf strogo konveksne funkcije i tangenta

Teorem 9 Neka je funkcija f dvaput derivabilna na intervalu (a,b). Tada vrijedi:

i) funkcija je konveksna na intervalu (a,b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in (a,b)$,

ii) funkcija je padajuća na intervalu (a,b) ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in (a,b)$,

iii) ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo konveksna na intervalu (a,b),

iv) ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo konkavna na intervalu (a,b).

Obrat tvrdnji iii) i iv) općenito ne vrijedi.

Definicija 4 Za neprekidno derivabilnu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da ima infleksiju u točki $x_0 \in A$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je funkcija f na intr-ervalu $(x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ strogo konveksna, a na intervalu $(x_0,\ x_0 + \varepsilon)$ strogo konkavna ili obrnuto.
Točku $(x_0, f(x_0))$ nazivamo točkom infleksije grafa funkcije f.

Teorem 10 (Nužan uvjet za postojanje infleksije)
Ako funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima infleksiju u točki $x_0 \in A$ i ako $f''(x_0)$ postoji, onda je $f''(x_0) = 0$.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi.

Teorem 11 (Dovoljan uvjet za postojanje infleksije)
Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ dvaput derivabilna na nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ točke $x_0 \in A$ osim možda u točki x_0. Ako f'' mijenja predznak u točki x_0 onda f u točki x_0 ima infleksiju.

Teorem 12 Neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ ima na nekoj okolini $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ točke $x_0 \in A$ neprekidne derivacije do uključivo reda n, za $n \geq 3$. Neka je

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ako je n neparan, tada funkcija f ima infleksiju u točki x_0.

Ako je još $f'(x_0) = 0$ i ako je n paran, tada funkcija f ima ekstrem u točki x_0 i to lokalni minimum za $f^{(n)}(x_0) > 0$ i lokalni maksimum za $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Primjer

1.

$$f(x) = x^3, \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nužan uvjet:

Sada je

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$f''(x) = 6x, \qquad f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Imamo

$f'(x) = 6x = 0 \implies x_0 = 0.$ (moguća infleksija)

Dovoljan uvjet:

- I. način

$$x < 0 \implies f''(x) = 6x < 0$$

$$x > 0 \implies f''(x) = 6x > 0.$$

Derivacija mijenja predznak u točki $x_0 = 0$, pa po Teoremu 11, f u $x_0 = 0$ ima infleksiju.

- II. način

$$f'''(x) = 6, \implies f'''(0) = 6 \neq 0,$$

pa po Teoremu 12 ($n = 3$), f ima u $x_0 = 0$ infleksiju.

2.

$$f\left(x\right)=x^{4},\qquad f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Nužan uvjet:

Sada je

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= 4x^{3}, \qquad f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \\ f''\left(x\right) &= 12x^{2}, \qquad f'':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \end{aligned}$$

Imamo

$f''\left(x\right)=12x^{2}=0 \implies x_{0}=0$ (moguća infleksija).

Dovoljan uvjet:

- I. način

$$\begin{aligned} x &< 0 \implies f''\left(x\right)=12x^{2}>0 \\ x &> 0 \implies f'\left(x\right)=12x^{2}>0. \end{aligned}$$

Druga derivacija ne mijenja predznak u $x_{0}=0$, pa po Teoremu 11, f u $x_{0}=0$ nema infleksiju.

- II. način

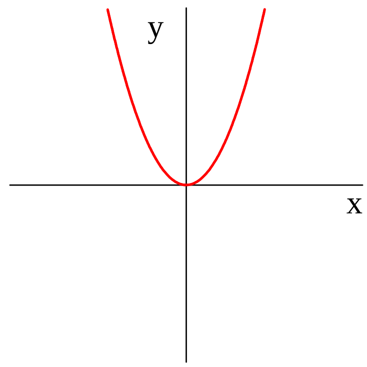
$$\begin{aligned} f'''\left(x\right) &= 24x, \implies f'''\left(0\right)=24\cdot 0=0, \\ f^{iv}\left(x\right) &= 24, \implies f^{iv}\left(0\right)=24\neq 0, \end{aligned}$$

pa po Teoremu 12 ($n=4$), f nema u $x_{0}=0$ infleksiju.

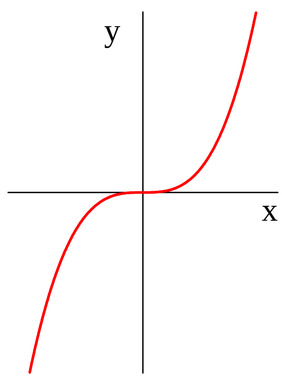
Napomena: Točka $x_0 = 0$ je stacionarna točka od f ($f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$) i vrijedi

$$f''(0) = f'''(0) = 0, \qquad f^{iv}(0) = 24 > 0,$$

pa f, po Teoremu 12 ($n = 4$), ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum.



$y = x^4$



$y = x^3$

Ispitivanje toka i crtanje grafa funkcije

Ispitivanje toka funkcije $y = f(x)$ sastoji se od sljedećih koraka:

1. **Prirodno područje definicije** $D(f)$ (potrebno je poznavati elementarne funkcije i rješavanje jednadžbi i nejednadžbi),

2. **Provjeriti ima li funkcija neka specijalna svojstva** (parnost-neparnost, periodičnost,...),

3. **Nul-točke** (riješiti jednadžbu $f(x) = 0$),

4. **Asimptote (vertikalne, horizontalne i kose) i ponašanje funkcije na rubovima područja definicije** (limesi),

5. **Ekstremi** (nužan i dovoljan uvjet - prva derivacija $f'(x)$),

6. **Intervali monotonosti** (predznak prve derivacije $f'(x)$),

7. **Točke infleksije** (nužan i dovoljan uvjet - druga derivacija $f''(x)$),

8. **Intervali zakrivljenosti** (predznak druge derivacije $f''(x)$),

9. **Skiciranje grafa funkcije** (na osnovi informacija iz točaka 1. - 8. + tablica).

4. NIZOVI I REDOVI

1. Nizovi

Definicija 1 Svaku funkciju $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo niz realnih brojeva (kraće niz).

Broj $a(n) \equiv a_n$ nazivamo opći član niza (ili $n-$ti član niza).

Niz obično označavamo sa (a_n) ili $\{a_n\}$ ili ponekad sa

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \quad .$$

Primjer

1. Niz čiji je opći član $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ je

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \; -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \; ... \; , \; \frac{(-1)^n}{2n+1}, ... \quad .$$

2. Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} \frac{1-n}{n}, & n \text{ neparan,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

je

$$0, \; \frac{1}{2}, \; -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \; -\frac{4}{5} ....$$

Definicija 2 Niz (a_n) za koji vrijedi

$(\exists r \in \mathbb{R})\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})$ **takvi da** $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow a_n = r)$

nazivamo <u>stacionarni niz.</u>

Primjer Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} 3n, & n \leq 4, \\ 2, & n > 4 \end{cases}$$

je

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 2,\ 2,\ 2, ...,\ 2,\ ....$$

Dakle, ovo je stacionaran niz.
<u>Uočimo:</u> ovdje je $r = 2, n_0 = 5$ (u oznakama iz Def. 2).

Definicija 3 Za niz $\{a_n\}$ kažemo da je <u>rastući</u> (<u>padajući</u>, <u>strogo rastući</u>, <u>strogo padajući</u>, <u>monoton</u>, <u>strogo monoton</u>) ako je takva pripadna funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Napomena: Da bi niz $\{a_n\}$ bio rastući nužno je i dovoljno da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$.
Slično za ostale tvrdnje.

Primjer

1. Niz čiji je opći član $a_n = \frac{1}{n}$ je strogo padajući jer je

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Niz čiji je opći član $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nije monoton (nije ni padajući ni rastući).

Uočimo: ovdje je za n paran

$$a_n = \frac{1}{n} > a_{n+1} = \frac{-1}{n+1},$$

a za n neparan

$$a_n = \frac{-1}{n} < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

3. Niz čiji je opći član $a_n = 3$ je padajući i rastući, tj. monoton je, jer je

$$a_n \;=\; 3 \geq 3 = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{i}$$

$$a_n \;=\; 3 \leq 3 = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovo je i stacionaran niz ($r = 3$, $n_0 = 1$).

Definicija 4 Kažemo da je realan broj a granična vrijednost ili limes niza $\{a_n\}$ ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0$$
$$\Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ako limes postoji kažemo da je niz $\{a_n\}$ konvergentan odnosno da konvergira (prema a). U protivnom kažemo da je divergentan odnosno da divergira.

Napomena: nejednakost (1) se naziva osnovna nejednakost konvergencije niza $\{a_n\}$.

Gornja definicija znači da kod konvergentnog niza $\{a_n\}$, za svaki $\varepsilon > 0$, intreval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ oko granične vrijednosti a ($\varepsilon-$ okolina od a), sadrži beskonačno članova niza, dok se izvan tog intervala nalazi samo konačno mnogo članova niza.

Teorem 1 Svaki niz $\{a_n\}$ ima najviše jednu graničnu vrijednost.

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

Pokažimo to koristeći Definiciju 4.

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Treba pronaći n_0 (iz Definicije 4). Imamo

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dakle, nejednakost (2) vrijedi za svaki $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, tj. za sve $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 = n_0$.

Napomena: funkcija $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ("najveće cijelo") je definirana na sljedeći način: $\lfloor x \rfloor \equiv k$, $k \in \mathbb{Z}$, gdje je k najveći cijeli broj manji ili jednak x.

Za $\varepsilon = \frac{1}{100}$ je

$$n_0 = \left\lfloor \sqrt{100} \right\rfloor + 1 = 10 + 1 = 11,$$

tj. u intervalu

$$(0 - \frac{1}{100}, \ \ 0 + \frac{1}{100}) = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$$

se nalaze gotovo svi članovi niza $\left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prvih 10.

Vidjeti: sliku 1. u dodatku.

<u>Zadatak:</u>

Pokažite:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$:
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

Odredite n_0 za $\varepsilon = \frac{1}{100}$ i $\varepsilon = 0.035.$

Definicija 5 Kažemo da niz $\{a_n\}$ divergira prema $+\infty$ ako vrijedi

$$(\forall r > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \implies a_n > r.$$

Pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Slično, kažemo da niz $\{a_n\}$ divergira prema $-\infty$ ako vrijedi

$$(\forall r < 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ takav da } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \implies a_n < r.$$

Pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Gornja definicija znači:

- ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, onda je, za svaki $r > 0$, beskonačno članova niza $\{a_n\}$ veće od r, dok je samo konačno mnogo članova niza manje od r.

- ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, onda je, za svaki $r < 0$, beskonačno članova niza $\{a_n\}$ manje od r, dok je samo konačno mnogo članova niza veće od r.

Primjer

1. Za niz čiji je opći član $a_n = n^2$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

Pokažimo to koristeći Definiciju 5. Imamo

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \dots,\ n^2,\ \dots\ .$$

Dakle, za $r > 0$ treba pronaći n_0 (iz Definicije 5). Očito je

$$n_0 = \left\lfloor \sqrt{r} \right\rfloor + 1.$$

Npr. imamo:

- za $r = 18$ je $n_0 = \left\lfloor \sqrt{18} \right\rfloor + 1 = 4 + 1 = 5$ (gotovo svi članovi niza $\left\{n^2\right\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prva 4, su veći od $r = 18$);

- za $r = 95$ je $n_0 = \left\lfloor \sqrt{95} \right\rfloor + 1 = 9 + 1 = 10$ (gotovo svi članovi niza $\left\{n^2\right\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prvih 9, su veći od $r = 95$);

2. Za niz čiji je opći član $a_n = -(2n-1)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} -(2n-1) = -\infty.$$

Pokažimo to koristeći Definiciju 5. Imamo

$$-1,\ -3,\ -5,\ -7,\ -9,\ \ldots,\ -(2n-1),\ \ldots .$$

Dakle, za $r < 0$ treba pronaći n_0 (iz Definicije 5). Očito je

$$n_0 = \left\lfloor \frac{-r+1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Npr. imamo:

- za $r = -8$ je $n_0 = \lfloor 4.5 \rfloor + 1 = 4 + 1 = 5$ (gotovo svi članovi niza $\{-(2n-1)\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prva 4, su manji od $r = -8$);

- za $r = -11$ je $n_0 = \lfloor 6 \rfloor + 1 = 6 + 1 = 7$ (gotovo svi članovi niza $\{-(2n-1)\}$, osim njih konačno mnogo, tj. svi osim prvih 6, su manji od $r = -11$); .

3. Niz čiji je opći član

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ paran,} \\ n, & n \text{ neparan} \end{cases},$$

tj. niz

$$1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6},\ 7,\ \dots .$$

je divergentan u širem smislu.

Uočimo: članovi niza s parnim indeksom n se približavaju 0, dok članovi niza s neparnim indeksom rastu (teže prema $+\infty$). Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

jer je uvijek beskonačno članova niza izvan svake $\varepsilon-$okoline od 0 (gotovo svi s neparnim indeksom), iako unutar te $\varepsilon-$okoline ima beskonačno članova niza. Isto tako

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq +\infty,$$

jer je uvijek beskonačno članova niza manje od r, za svaki $r > 0$, (gotovo svi s parnim indeksom), iako je beskonačno članova niza veće od tog r.