4. Neprekidnost

Definicija 3.1 Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u točki $x_0 \in A$ ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna na skupu $B \subseteq A$ ako je neprekidna u svakoj točki tog skupa.

Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, kažemo da je neprekidna ako je neprekidna na cijelom području definicije A (tj. ako je $B = A$).

Svojstva neprekidnih funkcija

Teorem 4.1 Neka su funkcije f i g neprekidne u točki $x_0 \in D_f \cap D_g$ (na skupu $B \subseteq D_f \cap D_g$), tada su neprekidne u točki $x_0 \in D_f \cap D_g$ (na skupu $B \subseteq D_f \cap D_g$) i funkcije $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ uz $g(x_0) \neq 0$ (uz $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in B$).

Primjer
Budući je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

onda je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) &= \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1, \\
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) &= \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = 1, \\
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \cos x) &= \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0,
\end{aligned}$$

ali funkcija $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx$ nije neprekidna u točki $x_0 = \frac{\pi}{2}$, jer je $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Teorem 4.2
Neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$, $f(A) \subseteq C$, funkcije.

- Neka je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in A$ i funkcija g neprekidna u točki $y_0 = f(x_0) \in C$. Tada je funkcija $g \circ f : A \longrightarrow D$ neprekidna u točki $x_0 \in A$, tj. vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)) = g(y_0).$$

• Ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

i ako je funkcija g neprekidna u točki $y_0 \in C$. Tada je

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0).$$

(kraće kažemo: neprekidna funkcija "komutira" s limesom).

Primjer 1

Treba odrediti

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}}.$$

Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nije neprekidna u točki $x_0 = 0$, ali postoji

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Budući je funkcija $g(x) = e^x$ neprekidna u točki $y_0 = 1$, onda je

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e.$$

Primjer 2

Slično:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \ln{(1+x)^{\frac{1}{2x}}} &= \ln\left(\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{2x}}\right)\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

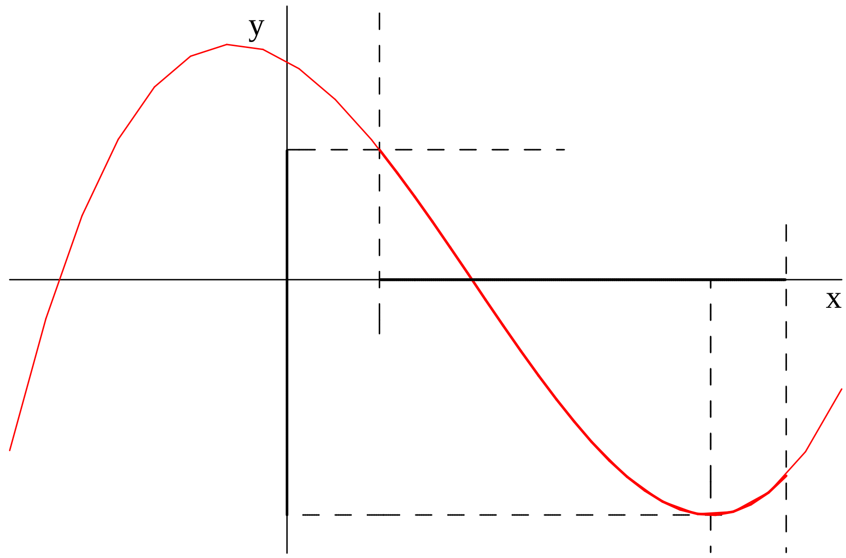
Napomena:

$$e \overset{def.}{=} \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[x = \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^{+0}}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

Teorem 4.3 Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b] \subseteq A$. Tada vrijedi:

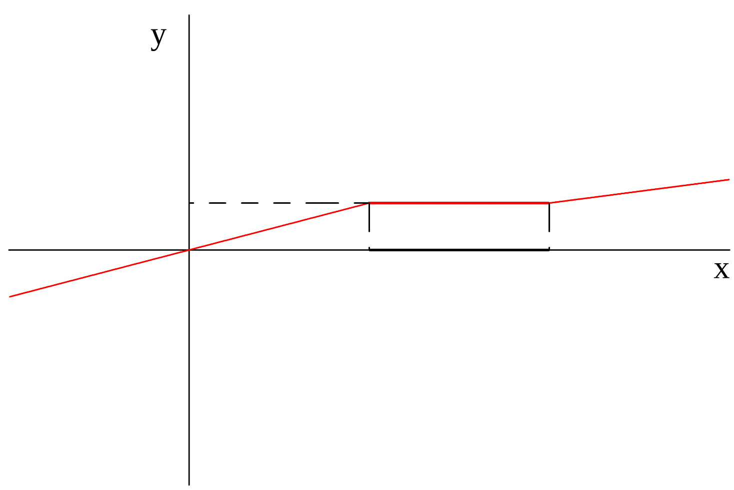
- Slika segmenta $[a,b]$ je segment, tj. $f([a,b]) = [c,d]$. Ako je restrikcija $f|_{[a,b]}$ konstanta, tada je slika segmenta $[a,b]$ točka.

- Restrikcija $f|_{[a,b]}$ poprima na intervalu $[a,b]$ svoj minimum i maksimum kao i svaku vrijednost između njih.



slika segmenta je segment,

$$sgnf\left(a\right) \neq sgnf\left(b\right) \Rightarrow \left(\exists x_o\right)\, f\left(x_0\right) = 0$$



slika segmenta je točka

Posljedica Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b] \subseteq A$ i neka je $sgnf(a) \neq sgnf(b)$. Tada postoji barem jedna točka $x_0 \in [a, b]$ za koju je $f(x_0) = 0$.

Napomena: Ova tvrdnja se koristi kod numeričkih metoda za nalaženje približnih vrijednosti nultočaka funkcije (npr. metoda bisekcije).

Vrste prekida

Funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $x_0 \in A$ točno onda kada vrijede uvjeti:

i) Postoji $\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = L_1$ i postoji $\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = L_2$;

ii) $\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ($L_1 = L_2 = L$);

iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ako barem jedan od uvjeta i), ii), iii) nije zadovoljen kažemo da funkcija f ima prekid u točki x_0.

- Ako su zadovoljeni uvjeti i) i ii), a nije iii) kažemo da funkcija f ima uklonjivi prekid u točki x_0. $(\exists L_1$ i $\exists L_2$ i $L_1 = L_2 \neq f(x_0))$

- Ako vrijedi samo i) kažemo da funkcija f ima prekid prve vrste u točki x_0 $(\exists L_1$ i $\exists L_2$ i $L_1 \neq L_2)$.

- Ako ne vrijedi i) kažemo da funkcija f ima prekid druge vrste vrste u točki x_0 (barem jedan od L_1, L_2 ne postoji)

5. Asimptote

Asimptota funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost točke na grafu funkcije od tog pravca teži k nuli kada barem jedna kordinata te točke teži u beskonačnost.

Postoje tri vrste asimptota:

- vertikalne;
- horizontalne;
- kose.

Vertikalne asimptote

- Pravac $x = x_0$ nazivamo lijeva vertikalna asimptota funkcije f u točki x_0 ako je

  ili $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = -\infty$.

- Pravac $x = x_0$ nazivamo desna vertikalna asimptota funkcije f u točki x_0 ako je

  ili $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = +\infty$ ili $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = -\infty$.

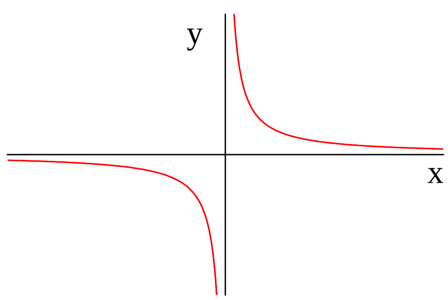
  Vertkalne asimptote tražimo u točkama prekida ili na rubovima područja definicije funkcije.

Primjer 1 Neka je
$$f\left(x\right)=\frac{1}{x}.$$

Tada je $D_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Dakle vertikalnu asimptotu tražimo u $x=x_0$. Budući je

$$\lim_{x\to 0^{-0}}\frac{1}{x}=(\frac{1}{-0})=-\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0^{+0}}\frac{1}{x}=(\frac{1}{+0})=+\infty,$$

onda je pravac $x=0$ (os y) obostrana vertikalna asimptota.



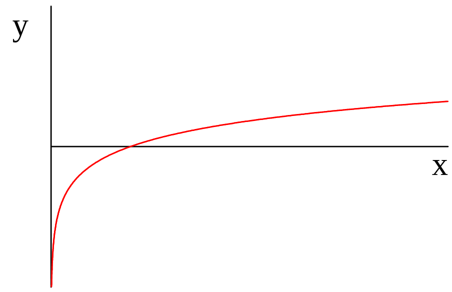
$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$

Primjer 2 Neka je
$$f\left(x\right)=\ln x.$$

Tada je $D_f = (0,+\infty)$. Dakle (desnu) vertikalnu asimptotu tražimo u $x_0=0$. Budući je

$$\lim_{x\to 0^{+0}}\ln x=-\infty,$$

onda je pravac $x=0$ desna vertikalna asimptota.



$$f(x) = \ln x$$

Horizontalne asimptote

- Pravac $y = y_0$ nazivamo lijeva horizontalna asimptota funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ ako je

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

- Pravac $y = y_0$ nazivamo desna horizontalna asimptota funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ ako je

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0.$$

  Lijeva horizontalna asimptota može postojati samo ako je neki interval oblika $(-\infty, a) \subseteq D_f$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Slično za desnu ($(b, +\infty) \subseteq D_f$).

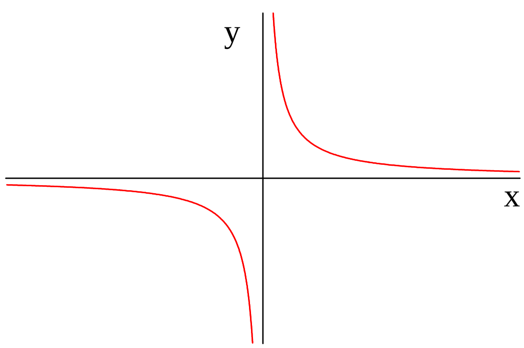
Primer 1 Neka je

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Tada je $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dakle možemo tražiti horizontalnu asimptote i s lijeve i s desne strane. Budući je

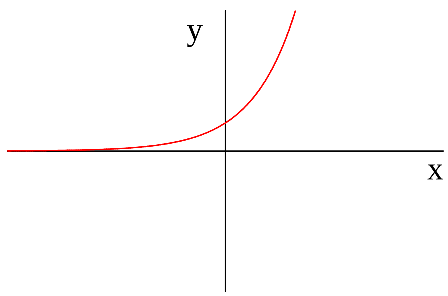
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = (\frac{1}{-\infty}) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = (\frac{1}{+\infty}) = 0,$$

onda je pravac $y = 0$ (os x) obostrana horizontalna asimptota.



$f(x) = \frac{1}{x}$

Primjer 2 Neka je
$$f\left(x\right) = e^x.$$
Tada je $D_f = \left(-\infty, +\infty\right)$. Dakle možemo tražiti horizontalnu asimptote i s lijeve i s desne strane. Budući je
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$
onda je pravac $x = 0$ lijeva horizontalna asimptota



$$f\left(x\right) = e^x$$

Kose asimptote

- Neka je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k_1 \quad \text{i} \quad k_1 \neq 0, \pm\infty \quad \text{i}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_1x\right) = l_1 \quad \text{i} \quad l_1 \neq \pm\infty$$

onda pravac $y = k_1x + l_1$ nazivamo lijeva kosa asimptota funkcije f.

- Neka je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k_2 \quad \text{i} \quad k_2 \neq 0, \pm\infty \quad \text{i}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = l_2 \quad \text{i} \quad l_2 \neq \pm\infty$$

onda pravac $y = k_2x + l_2$ nazivamo desna kosa asimptota funkcije f.

Lijeva kosa asimptota može postojati samo ako je neki interval oblika $(-\infty, a) \subseteq D_f$ za neki $a \in \mathbb{R}$. Slično za desnu ($(b, +\infty) \subseteq D_f$).

Primjer 1 Neka je

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

Tada je $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Dakle možemo tražiti ili horizontalnu ili kosu asimptotu i s lijeve i s desne strane. Budući je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \pm\infty,$$

tražimo kose asimptote.

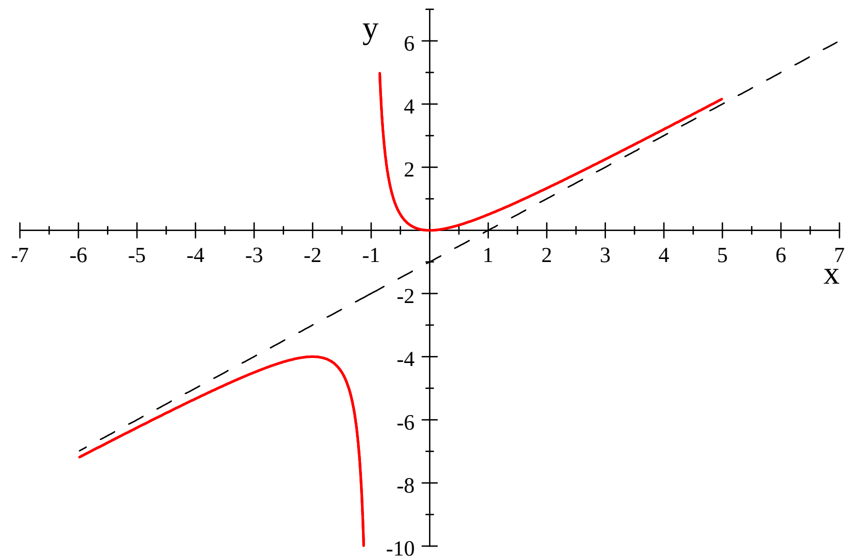
$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

$$l_1 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x}{x+1} \right) = -1,$$

onda je pravac $y = x - 1$ lijeva horizontalna asimptota. Slično se pokaže da je $y = x - 1$ i desna kosa asimptota, dakle obostrana.



VAŽNO: Funkcija ne može imati istovremeno i lijevu horizontalnu i lijevu kosu asimptotu (analogno za desne).

$$\textbf{SREĆA} = \frac{\textbf{DOBIVENO}}{\textbf{ŽELJENO}}$$

Ako **ŽELJENO** $\rightarrow \infty$ onda **SREĆA** $\rightarrow \mathbf{0}$

Ako (bi) **ŽELJENO** $\rightarrow \mathbf{0}$ onda (bi) **SREĆA** $\rightarrow \infty$