2. Globalna svojstva realnih funkcija

Definicija 2.1 Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je:

- <u>omeđena odozgor</u> ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(\forall x \in A) \ \ (f(x) \leq M);$$

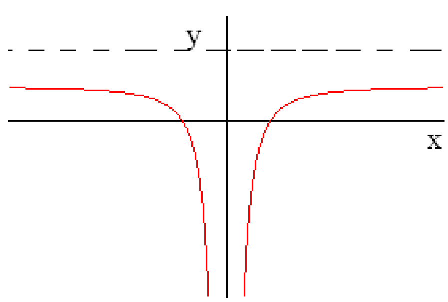
- <u>omeđena odozdol</u> ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(\forall x \in A) \ \ (m \leq f(x));$$

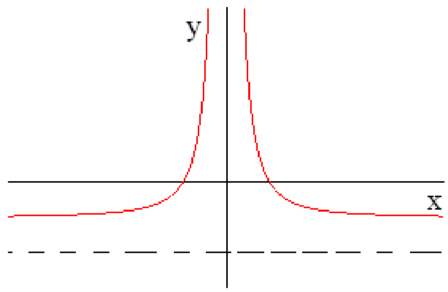
- <u>omeđena</u> ako je omeđena odozgor i odozdol;

- <u>neomeđena</u> ako nije omeđena.

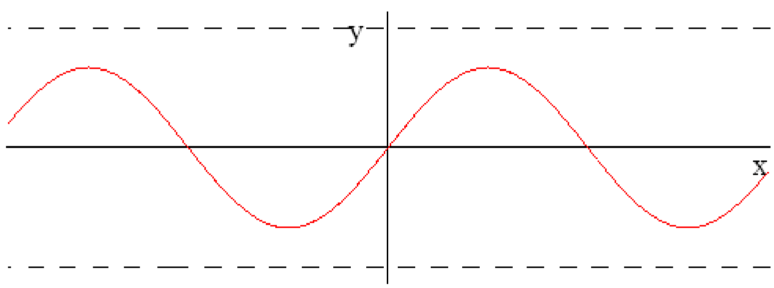
Primjer



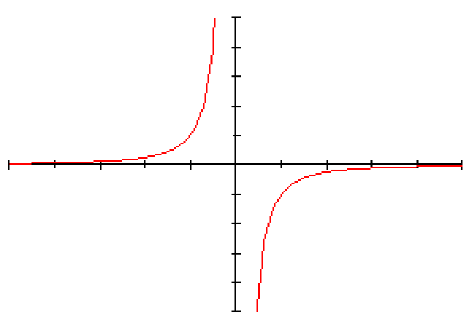
funkcija omeđena odozgor



funkcija omeđena odozdol



omeđena funkcija



neomeđena funkcija

Definicija 2.2 Neka je dana funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ i neka je domena A simetrična s obzirom na ishodište. Za funkciju f kažemo da je:

- parna ako je
$$(\forall x \in A) \ \ (f(-x) = f(x))\,;$$
(graf simetričan s obzirom na os y)

- neparna ako je
$$(\forall x \in A) \ \ (f(-x) = f(x))\,;$$
(graf simetričan s obzirom na ishodište)

Primjer

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dakle, domena $A = [-1, 1]$ je simetrična s obzirom na ishodište i vrijedi
$$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)\,,$$
pa je funkcija parna.

- $f(x) = x^3, \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dakle, domena $A = \mathbb{R}$ je simetrična s obzirom na ishodište i vrijedi
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)\,,$$
pa je funkcija neparna.

Definicija 2.3 Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je:

- uzlazna ili rastuća

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \ \ (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2));$$

- strogo uzlazna ili strogo rastuća

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \ \ (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2));$$

- silazna ili padajuća

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \ \ (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2));$$

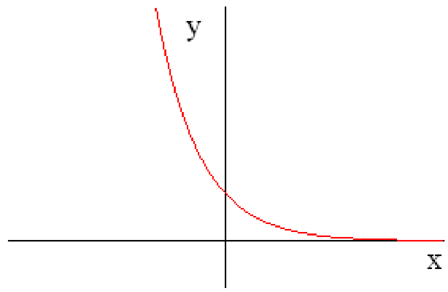
- strogo silazna ili strogo padajuća

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \ \ (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2));$$

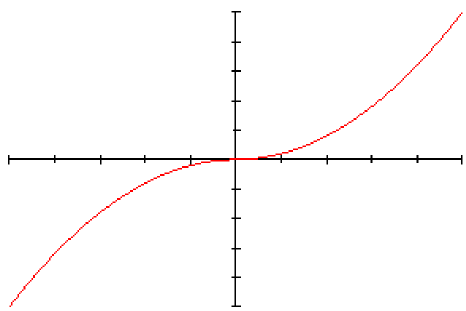
- ako je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ ili (strogo) rastuća ili (strogo) padajuća kažemo da je (strogo) monotona.

- funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ je po djeloviima monotona ako se domena A može "rastaviti" na konačno mnogo djelova (intervala) I_k, tj. $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$, tako da je na svakom od njih funkcija monotona.

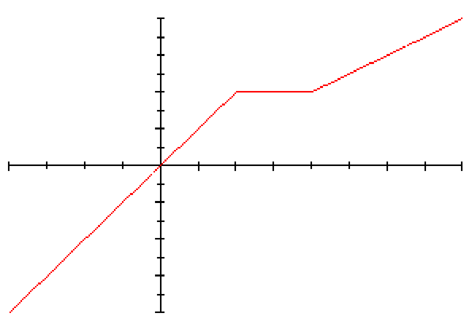
Primjer



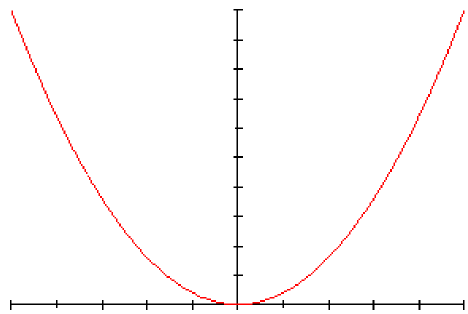
strogo padajuća funkcija



strogo rastuća funkcija



rastuća funkcija



po djelovima monotona funkcija

Napomena: Svaka strogo monotona funkcija je injekcija.

Definicija 2.4 Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je periodična ako postoji realan broj $P \neq 0$ takav da vrijedi

$$(\forall x \in A) \ \ (x + P \in A \implies f(x) = f(x + P))$$

P se naziva period od f. Najmanji pozitivan period P_0 (ako postoji) naziva se osnovni period.

Napomena: Graf periodičke funkcije se ponavlja na svakom intervalu duljine osnovnog perioda, tj. na intervalu oblika $[x,\ x + P_0)$

3. Granična vrijednost ili limes

Intuitivna definicija: ako se vrijednost funkcije $f(x)$ približava vrijednosti L kada se nezavisna varijabla približava točki x_0, tada kažemo da $f(x)$ teži prema L kada x teži prema x_0, tj.

$$f(x) \to L \text{ kada } x \to x_0.$$

Broj L nazivamo granična vrijednost ili limes funkcije $f(x)$ u točki x_0 i pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Definicija 3.1 Neka je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka vrijedi $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ za svaki $\delta > 0$. Kažemo da je L <u>granična vrijednost</u> ili <u>limes</u> funkcije $f(x)$ u točki x_0 ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists \delta > 0)\ \ (\forall x, x \in A \setminus \{x_0\})$$

$$(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

<u>Komentar:</u>

- " $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ za svaki $\delta > 0$" znači da je funkcija definirana u svakoj (i ma kako maloj) okolini oko točke x_0, ali ne mora (a može) biti definirana u x_0, tj. x_0 nije izolirana točka.

  Primjer: $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$ i $x_0 = 0$;

- $|x - x_0| < \delta \iff x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$;

- $|f(x) - L| < \varepsilon \iff f(x) \in (L - \varepsilon,\ L + \varepsilon)$.

Teorem 3.2 (jedinstvenost) Ako limes od f u točki x_0 postoji, onda je jedinstven.

Teorem 3.3 (svojstva limesa) Ako postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, onda vrijedi:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, uz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$;

- $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

  uz $f(x) > 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$.

<u>Napomena:</u> Funkcija $h(x) = f(x)^{g(x)}$ je definirana tamo gdje je funkcija g i gdje je $f(x) > 0$, tj.

$$D_h = D_g \cap \{x \in D_f : f(x) > 0\}.$$

Teorem 3.4 (uklještenje) Neka je postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ i neka je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Ako postoji $\delta > 0$ takav da za funkciju h vrijedi

$$x \in (x_0 - \delta, 0) \cup (0,\ x_0 + \delta) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

tada je

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

Primjer: Pomoću Teorema 3.4 može se pokazati da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Naime, za svaki $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Budući je

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

onda, po Teoremu 3.4, slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Za detalje vidjeti Prim.4.6, str.120. (I. Slapničar).

Definicija 3.5 Neka je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je

- $(x_0 - \delta,\ x_0) \cap A \neq \emptyset$ za svaki $\delta > 0$, onda kažemo da je L_1 granična vrijednost ili limes slijeva funkcije $f(x)$ u točki x_0 ako vrijedi

  $$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \ \ (\forall x, x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A)$$
  $$\Longrightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

  Pišemo

  $$\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = L_1.$$

- $(x_0,\ x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset$ za svaki $\delta > 0$, onda kažemo da je L_2 granična vrijednost ili limes zdesna funkcije $f(x)$ u točki x_0 ako vrijedi

  $$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \ \ (\forall x, x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A)$$
  $$\Longrightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

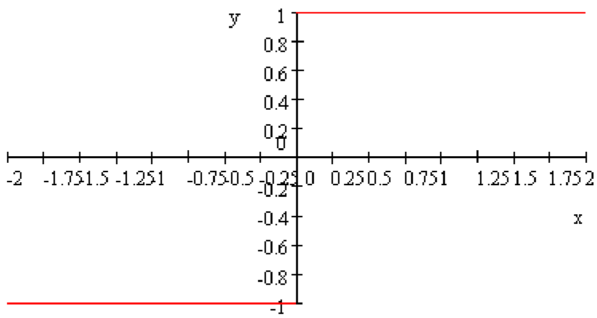
  Pišemo

  $$\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = L_2.$$

Primjer: $f(x) = sgn\, x,\;\; f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Napomena:

$$sgn\, x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^{-0}} sgn\, x = -1, \quad \lim_{x \to 0^{+0}} sgn\, x = 1$$

Ako $x \to x_0$ (ili $x \to x_0^{-0}$ ili $x \to x_0^{+0}$) moguće je da vrijednosti funkcije $f(x)$ <u>teže u beskonačnost.</u>

Definicija 3.6 Neka je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka vrijedi $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ za svaki $\delta > 0$.

- Ako
$$(\forall M_1 > 0)\ \ (\exists \delta > 0)\ \ (\forall x, x \in A \setminus \{x_0\})$$
$$(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M_1)$$

  onda kažemo da <u>f teži u $+\infty$</u> kada x teži u x_0 i pišemo
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

  Napomena: u ovom slučaju limes ne postoji.

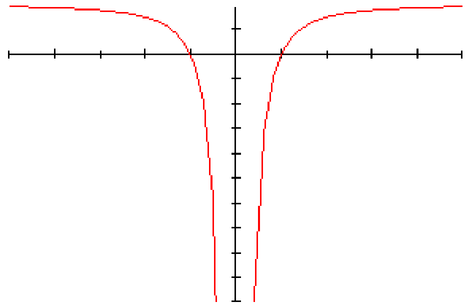
- Ako
$$(\forall M_2 < 0)\ \ (\exists \delta > 0)\ \ (\forall x, x \in A \setminus \{x_0\})$$
$$(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < M_2)$$

  onda kažemo da <u>f teži u $-\infty$</u> kada x teži u x_0 i pišemo
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

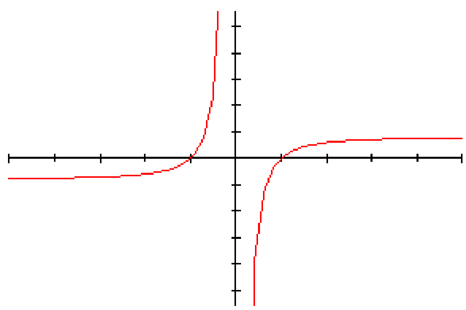
  Napomena: u ovom slučaju limes ne postoji.

- Slično za limese zdesna i slijeva.

Primjer



$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to 0^{-0}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^{+0}} f(x) = -\infty$$

Limes u beskonačnosti

Ako je područje definicije A funkcije $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, neograničeno sjedne ili obje strane, tj. ako sadrži neki interval oblika $(a, +\infty)$ ili $(-\infty, b)$, onda kažemo:

Definicija 3.6

- Vrijednost $b \in \mathbb{R}$ je limes u $+\infty$ i pišemo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

ako

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists M_1 > 0) \ \ (\forall x \in A)$$

$$(x > M_1 \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

- Vrijednost $c \in \mathbb{R}$ je limes u $-\infty$ i pišemo

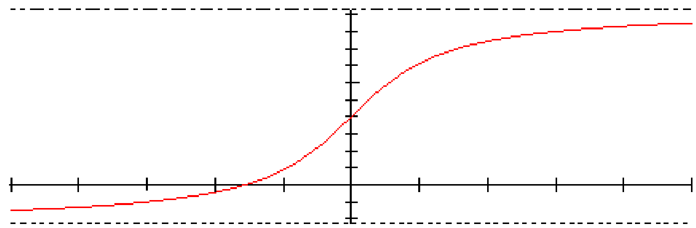
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$$

ako

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists M_2 < 0) \ \ (\forall x \in A)$$

$$(x < M_2 \Longrightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Primjer



<u>Napomena:</u> Teoremi analogni Teoremima 3.2, 3.3, 3.4 vrijede i za limese zdesna, slijeva i za limese u beskonačnosti.

Primjer Treba naći

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Budući da je

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

onda za $x > 0$ vrijedi

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x},$$

Kako je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0,$$

onda je, po teoremu uklještenja,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$