Red potencija

Red funkcija oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

se naziva red potencija.

Ovdje je $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$.

Svakom redu oblika (1) pridjeljuje se njegov radijus konvergencije $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$ koji se definira kao:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{ili} \quad \rho = \frac{1}{\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Napomena: Red potencija oblika (1) konvergira (po točkama) na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

Teorem 16 Red potencija oblika (1) konvergira apsolutno i jednoliko na svakom segmentu $[x_0 - r, x_0 + r]$, gdje je $r < \rho$, a divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.

Primjer Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}. \tag{2}$$

Imamo

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{n}{n+1} \quad \to \; 1,$$

pa je

$$\rho = \frac{1}{\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle, red potencija (2) konvergira na intrevalu $(0,2)$, apsolutno i jednoliko konvergira na svakom segmentu $[1-r, 1+r]$, $r < 1$, a divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus [0,2]$. Za $x = 0$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

pa red (uvjetno) konvergira. Za $x = 2$ imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},$$

pa red divergira. Dakle, red potencija (2) konvergira na intrevalu $[0,2)$, a divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus (0,2]$.

Taylorov red

Teorem 17 Neka funkcija f ima na intervalu (a, b) derivaciju do $n+1$ reda. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a, b)$ i za svaki $x \in (a, b)$ vrijedi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \tag{3}$$

gdje je

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \tag{4}$$

za $0 < \theta < 1.$

Napomena:

Formulu (3) nazivamo Taylorova formula, a (4) Lagrangeov oblik ostatka.

Teorem 18 Neka funkcija f ima na intervalu (a, b) derivacije proizvoljnog reda. Tada za proizvoljnu točku $x_0 \in (a, b)$ i za svaki $x \in (a, b)$ vrijedi

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{5}$$

ako i samo ako niz ostataka $\{R_n(x)\}$ teži prema 0 za svaki $x \in (a, b)$.

Red potencija (5) se naziva <u>Taylorov red</u> ili <u>Taylorov razvoj funkcije f u točki x_0</u>.
Taylorov razvoj funkcije f u točki $x_0 = 0$ naziva se <u>MacLaurinov razvoj</u>,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Teorem 19 Taylorov red elementarne funkcije f u svakoj točki x svog područja konvergencije konvergira prema $f(x)$.

Primjer Odredimo MacLaurinov razvoj funkcije $f(x) = \cos x$. Imamo:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x \implies f'(0) = 0 \\
f''(x) &= -\cos x \implies f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= \sin x \implies f'''(0) = 0 \\
f^{iv}(x) &= \cos x \implies f^{iv}(0) = 1 \\
f^{v}(x) &= -\sin x \implies f^{v}(0) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zaključujemo

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^k & n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

pa je

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$

na intervalu na kojem ovaj red konvergira.

Odredimo područje konvergencije reda

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Imamo

$$a_k=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\quad\Longrightarrow\quad\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}}{\frac{(-1)^k}{2k!}}\right|=$$

$$=\frac{(2k)!}{(2k+2)\,(2k+2)\,(2k)!}=\frac{1}{(2k+2)\,(2k+1)}\quad\to\ 0,$$

pa je

$$\rho=\frac{1}{\limsup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}=\left(\frac{1}{0}\right)=+\infty.$$

Dakle, red konvergira na cijelom $\mathbb{R}$. Sad imamo

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad\text{za svaki } x\in\mathbb{R}.$$

Područje apsolutne konvergencije može se odrediti i koristeći D'Alambertov kriterij.

Za red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

je

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

pa po D'Alambertov kriteriju imamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f_{k+1}(x)|}{|f_k(x)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(2k+2)!}|x|^{2k+2}}{\frac{1}{2k!}|x|^{2k}} =$$

$$= |x|^2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} = 0 < 1,$$

pa red konvergira apsolutno na cijelom $\mathbb{R}$, pa i konvergira na cijelom $\mathbb{R}$ (Po Teoremu 12).

Slično se pokaže

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R};$$

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R};$$

$$\ln\left(1+x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}x^{n}\quad \text{za svaki } x\in\left(-1,1\right].$$

Vidjeti slike 7, 8, 9, 10 u dodatku.

Primjer S kolikom točnošću

$$1-\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{4!}x^{4}$$

aproksimira funkciju $f\left(x\right)=\cos x$ za $\left|x\right|\leq 1$. Po formuli (3) imamo

$$\cos x=\cos 0+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^{2}+\frac{0}{3!}x^{3}+\frac{1}{4!}x^{4}+R_{5}\left(x\right)$$

gdje je

$$R_{5}\left(x\right)=\frac{x^{6}}{6!}\cdot f^{vi}\left(0+\theta\left(x-0\right)\right)=\frac{x^{6}}{6!}\left(-\cos\theta x\right),\quad 0<\theta<1.$$

Budući je za $\left|x\right|\leq 1$

$$\left|R_{5}\left(x\right)\right|=\left|\frac{x^{6}}{6!}\left(-\cos\theta x\right)\right|=\frac{\left|x\right|^{6}}{6!}\left|\cos\theta x\right|\leq\frac{\left|x\right|^{6}}{6!}\leq\frac{1}{6!}<0.0013,$$

onda je za $\left|x\right|\leq 1$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \pm 0.0013.$$

Specijalno

$$\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \pm 0.0013 \\
&= 0.877\,6 \pm 0.0013.
\end{aligned}$$

5. LINEARNA ALGEBRA

5.1 Matrice

Definicija 5.1 Pravokutnu tablicu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

nazivamo *realnom matricom tipa* $m \times n$, ako je $a_{ij} \in \mathbb{R}$ za svaki $i = 1, 2, ...m$ i $j = 1, 2, ..., n$.

Brojeve a_{ij} nazivamo *matričnim elementima*; pri tom elementi $a_{i1}, a_{i2}, ...a_{in}$ tvore $i-$*ti redak*, a elementi $a_{1j}, a_{2j}, ...a_{mj}$ tvore $j-$*ti stupac*.

Ako je $m = n$ onda govorimo o *kvadratnoj matrici reda* n.

Elementi $a_{11}, a_{22}, ...a_{nn}$ kvadratne matrice reda n tvore *glavnu dijagonalu* matrice.

Ako je $m = 1$ onda kažemo da je matrica *retčana.*

Ako je $n = 1$ onda kažemo da je matrica *stupčana.*

Redčane i stupčane matrice nazivamo još i *vektori*.
Skup svi matrica tipa $m \times n$ označavamo sa $\mathcal{M}_{m,n}$.

Matrice obično označavamo velikim tiskanim slovima npr. $A, B, X, \ldots$. Kraća oznaka:

$$A = [a_{ij}]_{m,n} \qquad \text{ili} \qquad A = (a_{ij})_{m,n}\,.$$

Definicija 5.2 Za dvije matrice $A = [a_{ij}]_{m,n}$ i $B = [b_{ij}]_{k,l}$ kažemo da da su *jednake*, i pišemo $A = B$, ako:

1. su istog tipa, tj. ako je $m = k$ i $n = l$,
2. imaju jednake odgovarajuće elemente, tj. ako je $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j.

Neke matrice specijalnog oblika

Nul-matrica

Matrica čiji su svi elementi nule naziva se nul-matrica, neovisno o tome kojeg je tipa ili reda. Oznaka:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dijagonalna matrica

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi van dijagonale jednaki 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica

Jedinična matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi van dijagonale jednaki 0, a na dijagonali jednaki 1. Oznaka:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Napomena: Jediničnu matricu označavamo još i sa I_n ako joj želimo naglasiti dimenziju. Nadalje, $I = [\delta_{i,j}]$, gdje je

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Kroneckerov simbol.

Trokutaste matrice

Za kvadratnu matricu kažemo da je *gornja trokutasta* ako su svi njeni elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Za kvadratnu matricu kažemo da je *donja trokutasta* ako su svi njeni elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Operacije s matricama

Zbrajanje matrica

Definicija 2.3 Neka su $A = [a_{ij}]_{m,n}$ i $B = [b_{ij}]_{m,n}$matrice istog tipa. Tada je zbroj matrica A i B matrica

$$C = A + B$$

koja je istog tipa kao matrice A i B, tako da je $C = [c_{ij}]_{m,n}$ gdje je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

za sve $i = 1, 2, .., m$ i $j = 1, 2, ..., n$.

Svojstva:

Ako su svi zbrojevi definirani vrijedi:

1. $A + B = B + A,$ (komutativnost)

2. $(A + B) + C = A + (B + C)\,,$ (asocijativnost)

3. $A + O = O + A = A,$ gdje je O nul-matrica.

Množenje matica sa skalarom

Definicija 2.4 Umnožak realnog broja (skalara) λ s matricom $A = [a_{ij}]_{m,n}$ definiramo kao matricu $B = [b_{ij}]_{m,n}$ istog tipa kao matrica A, tako da je

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

za sve $i = 1, 2, .., m$ i $j = 1, 2, ..., n$. Pišemo $B = \lambda A$.

Svojstva:

Ako su λ, μ skalari, A i B matrice istog tipa, tada je:

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
2. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$,
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$.

Množenje matica

Matrice A i B možemo pomnožiti samo ako su *ulančane*, tj. ako matrica A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka.

Definicija 2.5 Neka su $A = [a_{ij}]_{m,k}$ i $B = [b_{ij}]_{k,n}$ ulančane matrice. Tada je umnožak matrica A i B matrica $C = [c_{ij}]_{m,n}$ (tipa $m \times n$), gdje je

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{ik} b_{kj}$$

za sve $i = 1, 2, .., m$ i $j = 1, 2, ..., n$. Pišemo $C = AB$.

Svojstva:

Neka je λ skalar i A, B, C, D, E matrice. Ako su sve operacije dobro definirane, vrijedi:

1. $(AB)\,C = A\,(BC)\,,$ (asocijativnost)
2. $B(C + D) = BC + BD,$ (distributivnost)
3. $(C + D)E = CE + DE,$ (distributivnost)
4. $\lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B)$
5. $I_m A = A I_n = A$, gdje su I_m, I_n odgovarajuće jedinične matrice.

Transponiranje

Definicija 2.6 Neka je $A = [a_{ij}]_{m,n}$ matrica tipa $m \times n$. Matricu $B = [b_{ij}]_{n,m}$ tipa $n \times m$ nazivamo *transponirana matrica* matrice A, ako je

$$b_{ij} = a_{ji}$$

za sve $i = 1, 2, .., m$ i $j = 1, 2, ..., n$. Pišemo $B = A^T$.

Svojstva:

Neka je λ skalar i A, B matrice. Ako su sve operacije dobro definirane, tada je:

1. $\left(A^T\right)^T = A$,
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Kvadratnu matricu za koju je $A = A^T$ nazivamo *simetrična matrica*.

Za kvadratnu matricu A (samo tada!) definiramo *potencije*

$$A^2 \overset{def}{=} A \cdot A,$$

$$A^p \overset{def}{=} \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{p \text{ faktora}},$$

$$A^0 \overset{def}{=} I.$$

Ako je $f(x) = \alpha_p x^p + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$ proizvoljan polinom stupnja p, tada definiramo *matrični polinom* kao

$$f(A) \overset{def}{=} \alpha_p A^p + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I.$$