1.2 Diferencijalne jednadžbe prvog reda

Svi tipovi diferencijalnih jednadžbi prvog reda, koje ćemo promatrati, biti će oblika

$$y' = f(x,\ y), \tag{1}$$

a njihovo opće rješenje (integral) oblika

$$y = \varphi(x, c) \ \text{ ili } \Phi\,(x, y, c) = 0.$$

Cauchyjev problem.

Neka je dana diferencijalna jednadžba oblika (1) i neka je dan početni uvjet

$$y = y_0 \ \text{ za } \ x = x_0, \quad \text{tj. } y\,(x_0) = y_0.$$

Problem nalaženja (jedinstvenog) rješenja diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava dani početni uvjet naziva se *Cauchyjev problem* ili *problem s početnim uvjetima*. Rješenje ovog problema ovisi o funkciji $f(x, y)$ (shvaćenoj kako funkcija dvije varijable).

Diferencijalne jednadžbe oblika $y' = f(x)$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe oblika

$$y' = f(x) \quad \text{ili} \quad dy = f(x)dx,$$

pri čemu je $f(x)$ je definirana na određenom intervalu, dobivamo integracijom

$$y = \int f(x)dx + c.$$

Ova diferencijalna jednadžba uvijek ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y\,(x_0) = y_0$ na nekom intervalu oko točke x_0.

Primjer 1.9 Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \sin x + x^2,$$

te partikularno koje zadovoljava početni uvjet $y\,(0) = 1$.

Rješenje: Opće rješenje:

$$y = \int \left(\sin x + x^2\right) dx + c \implies y = -\cos x + \frac{1}{3}x^3 + c$$

Partikularno rješenje: Iz početnog uvjeta imamo $y(0) = 1$, a iz općeg rješenja dobivamo

$$y(0) = -\cos 0 + \frac{1}{3}0^3 + c \implies y(0) = -1 + c,$$

pa je $1 = -1 + c$, što povlači $c = 2$. Dakle, partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$ je

$$y = -\cos x + \frac{1}{3}x^3 + 2.$$

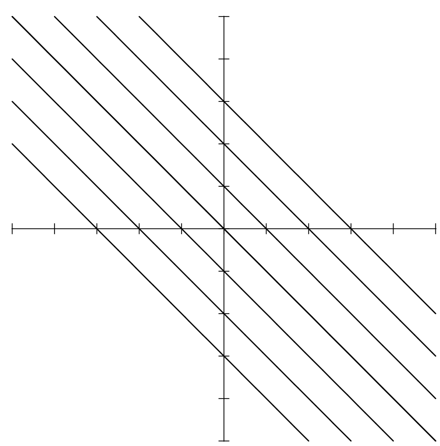
Primjer 1.10 Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = -1,$$

te skicirajte integralne krivulje dane općim rješenjem.
Rješenje: Opće rješenje:

$$y = \int -1 dx + c \implies y = -x + c.$$

Integralne krivulje dane općim rješenjem su (paralelni) pravci $y = -x + c$.



$y = -x + c$

Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

Diferencijalnu jednadžbu oblika

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad \text{ili} \quad y' = -\frac{P(x)}{Q(y)},$$

pri čemu su $P(x)$ i $Q(y)$ funkcije definirane na određenim intervalima, nazivamo *diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama.*

Opće rješenje dobivamo integracijom

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c.$$

Ako funkcija $Q(y)$ ima neprekidnu derivaciju i ako vrijedi $Q(y_0) \neq 0$, onda diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$.

Primjer 1.11 Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$x^2(2yy' - 1) = 1,$$

te partikularno koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 1$.
Rješenje: Opće rješenje (integral):

$$x^2(2yy' - 1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{2y} \quad \overset{y' = \frac{dy}{dx}}{\Longrightarrow} \quad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\Longrightarrow \quad 2ydy = \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)dx \Longrightarrow \quad \int 2ydy = \int \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)dx + c \Longrightarrow$$

$$y^2 = -\frac{1}{x} + x + c \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{-\frac{1}{x} + x + c}.$$

Partikularno rješenje: Iz početnog uvjeta imamo $y(1) = 1$, pa iz općeg rješenja dobivamo

$$1^2 = -\frac{1}{1} + 1 + c \implies c = 1.$$

Dakle, partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$ je dano sa

$$y^2 = -\frac{1}{x} + x + 1,$$

tj. $y=\sqrt{-\frac{1}{x}+x+1}$.

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y'+p\,(x)\,y=q\,(x)\,, \tag{2}$$

gdje su $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne funkcije na nekom intervalu, nazivamo *linearna diferencijalna jednadžba prvog reda* Ako je $q\,(x)\equiv 0$ imamo jednadžbu

$$y'+p\,(x)\,y=0, \tag{3}$$

koju nazivamo *homogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda.*

Rješavanjem jednadžbe (3) (dif. jed. sep. var.) dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -p\,(x)\,dx \Longrightarrow \ln|y|=-\int p\,(x)\,dx+\ln c_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y=\pm e^{c_1}\cdot e^{-\int p(x)dx} \overset{c=\pm e^{c_1}}{\Longrightarrow} y=c\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Primjer 1.12 Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'-tgx\,y=0.$$

Rješenje: Ovo je homogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, tj. diferencijalna jednadžba separiranih varijabli. Imamo

$$\frac{dy}{y}=tgx\,dx \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=-\int tgx\,dx+\ln c_1 \quad\Longrightarrow$$

$$\left[\ \int tgx\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=(\cos x=t)=\int\frac{-dt}{t}=\ln|t|=-\ln|\cos x|=\ln\frac{1}{|\cos x|}\ \right]$$

$$\Longrightarrow\quad \ln|y|=\ln\frac{1}{|\cos x|}+\ln c_1 \quad\Longrightarrow\quad \ln|y|=\ln\frac{c_1}{|\cos x|} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad |y|=\frac{c_1}{|\cos x|} \quad\overset{c=\pm c_1}{\Longrightarrow}\quad y=\frac{c}{\cos x}$$

Vratimo se jednadžbi (2). Jednadžbi (2) pridružujemo njenu pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'+p\,(x)\,y=0. \tag{4}$$

Pretpostavimo da su poznata dva rješenja jednadžbe (2) i neka su to y_1 i y_2. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} y_1' + p(x)\, y_1 &= q(x)\,, \\ y_2' + p(x)\, y_2 &= q(x)\,. \end{aligned}$$

Oduzimanjem tih jednakosti dobivamo

$$(y_1' - y_2') + p(x)\,(y_1 - y_2) = 0,$$

tj. razlika rješenja zadovoljava homogenu jednadžbu (4). Dakle, $y_1 - y_2 = y_h$, gdje je y_h rješenje pripadne homogene jednadžbe (4).
To znači ako nam je poznato neko (partikularno) rješenje y_p jednadžbe (2), onda ćemo bilo koje drugo rješenje dobiti tako da mu dodamo neko rješenje pripadne homogene

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)\,.$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (2) dobivamo tako da općem rješenju pripadne homogene jednadžbe (4) dodamo jedno (bilo koje partikularno) rješenje jednadžbe (2).

Metoda varijacije konstante
Partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe (2) tražimo u obliku

$$y = c(x)\, e^{-\int p(x)dx}. \tag{5}$$

Dakle, treba odrediti nepoznatu funkciju $c(x)$ tako da y bude rješenje jednadžbe (2). Uvrstimo (5) u jednadžbu (2). Budući je

$$y' = c'(x)\, e^{-\int p(x)dx} + c(x)\, e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))$$

imamo

$$\underbrace{c'(x)\, e^{-\int p(x)dx} + c(x)\, e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x))}_{y'} + p(x) \cdot \underbrace{c(x)\, e^{-\int p(x)dx}}_{y} = q(x)\,.$$

Ovo povlači

$$c'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow c(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + K.$$

Uvrštavanjem $c\,(x)$ u (5) dobivamo opće rješenje jednadžbe (2)

$$y = e^{-\int p(x)dx} \underbrace{\left[\int \left(q\,(x)\, e^{\int p(x)dx} \right) dx + K \right]}_{c(x)}. \tag{6}$$

Iz (6) slijedi

$$y = \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int \left(q\,(x)\, e^{\int p(x)dx} \right) dx}_{y_p} + \underbrace{K e^{-\int p(x)dx}}_{y_h}.$$

Ako su $p(x)$ i $q(x)$ neprekidne funkcije na nekom intervalu oko točke x_0, onda postoji jedinstveno rješenje jednadžbe (2) uz dani početni uvjet $y\,(x_0) = y_0$.

Primjer 1.3 Nađite opće rješenje jednadžbe

$$y' - y = e^x,$$

te partikularno koje zadovoljava početni uvjet $y\,(0) = 2$.

Rješenje: Opće rješenje: Pripadna homogena jednadžba je $y' - y = 0$. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \implies \int \frac{dy}{y} = \int dx \implies \ln|y| = x + c_1 \implies \\ &\implies y = \pm e^{c_1} e^x \implies y_h = ce^x. \end{aligned}$$

Varijacijom konstante dolazimo do partikularnog, tj. općeg rješenja polazne jednadžbe. Pretpostavimo

$$y = c\,(x)\, e^x.$$

Sada je $y' = c'\,(x)\, e^x + c\,(x)\, e^x$, pa uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{c'\,(x)\, e^x + c\,(x)\, e^x}_{y'} - \underbrace{c\,(x)\, e^x}_{y} = e^x.$$

Ovo povlači

$$c'\,(x) = 1 \implies c\,(x) = \int dx + K = x + K.$$

Dakle, opće rješenje je $y = e^x (x + K)$, $K \in \mathbb{R}$, tj.

$$y = \underbrace{e^x x}_{y_p} + \underbrace{K e^x}_{y_h}.$$

Možemo koristiti i gotovu formulu (6). Uvrštavanjem u (6) za $p(x) = -1$ i $q(x) = e^x$ dobivamo

$$y = e^{-\int (-1)dx} \left[\int \left(e^x \cdot e^{\int (-1)dx} \right) dx + c \right] = e^x \left(\int e^x e^{-x} dx + c \right)$$

$$= e^x \left(\int dx + c \right) = e^x (x + c).$$

Partikularno rješenje: Iz početnog uvjeta imamo $y(0) = 2$, a iz općeg rješenja dobivamo

$$y(0) = e^0 (0 + c) = c,$$

što povlači $c = 2$. Dakle, partikularno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 2$ je

$$y = e^x x + 2e^x.$$

1.3 Diferencijalne jednadžbe drugog reda

Svi tipovi diferencijalnih jednadžbi drugog reda, koje ćemo promatrati, biti će oblika

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{7}$$

a njihovo opće rješenje oblika

$$y = \varphi(x,\ c_1,\ c_2).$$

Cauchyjev problem ili *problem s početnim uvjetima* ovdje se satoji u pronalaženju (jedinstvenog) rješenja koje zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = y_0$ i $y'(x_0) = y'_0$.

Diferencijalne jednadžbe oblika $y'' = f(x)$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe oblika

$$y'' = f(x)$$

pri čemu je $f(x)$ je definirana na određenom intervalu (ili uniji intervala), dobivamo dvostrukom integracijom. Preciznije,

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = f(x) \implies y' = \int f(x)dx + c_1 \implies \\ y &= \int \left(\int f(x)dx + c_1 \right) dx + c_2 \implies y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Ako je $f(x)$ neprekidna na nekom intervalu oko točke x_0, onda ova diferencijalna jednadžba uvijek ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_0'$.

Primjer 1.14 Nađite opće rješenje jednadžbe $y'' = \sin x + 2x$, te partikularno koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1$ i $y'(0) = -2$.

Rješenje: Opće rješenje:

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = \sin x + 2x \implies y' = \int (\sin x + 2x)\, dx + c_1 = -\cos x + x^2 + c_1 \implies \\ y &= \int \left(-\cos x + x^2 + c_1 \right) dx + c_2 \implies y = -\sin x + \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Partikularno rješenje: Imamo

$$y' = -\cos x + x^2 + c_1,$$

pa je

$$y'(0) = -\cos 0 + 0^2 + c_1 = c_1 - 1.$$

Sada je

$$c_1 - 1 = -2 \implies c_1 = -1.$$

Dakle, traženo partikularno rješenje ima oblik

$$y = -\sin x + \frac{x^3}{3} - x + c_2.$$

Odredimo c_2 iz uvjeta $y(0) = 1$. Budući je

$$y(0) = -\sin 0 + \frac{0^3}{3} - 0 + c_2 = c_2,$$

onda je $c_2 = 1$, tj. partikularno rješenje koje zadovoljava gornje početne uvjete je oblika

$$y = -\sin x + \frac{x^3}{3} - x + 1.$$

Linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima

Diferencijalna jednadžba oblika

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{8}$$

gdje su $a_2 \neq 0$, a_1, a_0 realne konstante, a $f(x)$ funkcija definirana na nekom intervalu, naziva se linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Ako je $f(x) \equiv 0$, onda se (8) naziva homogena, u protivnom nehomogena.
Napomena: Diferencijalnu jednadžbu (8), dijeljenjem s $a_2 \neq 0$, uvijek je moguće svesti na oblik

$$y'' + ay' + by = f_1(x). \tag{9}$$

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na nekom intervalu oko točke x_0 onda diferencijalna jednadžba (8) ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_0'$.

Primjer 1.15 Diferencijalnu jednadžbu oblika

$$3y'' - 9y' - y = 3x^2, \tag{10}$$

dijeljenjem s $a_2 = 3$, svodimo na oblik

$$y'' - 3y' - \frac{1}{3}y = x^2.$$

Homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima

Promatrajmo diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{11}$$

gdje su a, b realne konstante. Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe je uvijek oblika

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

gdje su y_1 i y_2 dva (linearno nezavisna) partikularna rješenja od (11). Oblik rješenja y_1 i y_2 ovisi o konstantama a i b. Jedno (trivijalno) rješenje ove jednadžbe je $y = 0$. Pretpostavimo da je

$$y = e^{rx}$$

rješenje jednadžbe (11), gdje je r realan ili kompleksan broj. Sada je

$$y' = re^{rx} \ \text{ i } \ y'' = r^2 e^{rx}$$

Uvrštavanjem u (11) dobivamo

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rx} = 0.$$

Kako je $e^{rx} \neq 0$ za svaki x, tada je

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Ovu jednadžbu nazivamo *karakteristična jednadžba*, a njene korijene *karakteristični korijeni.*

Po Osnovnom teoremu algebre karakteristična jednadžba uvijek ima točno dva korijena u skupu kompleksnih brojeva. Tim kompleksnim brojevima (korijenima) pridružujemo dva (linearno nezavisna) rješenja y_1 i y_2 jednadžbe (11) na sljedeći način:

Napomena: Korijeni mogu biti jednaki (kažemo da korijen ima kratnost 2). Ako je (pravi) kompleksan broj oblika $\alpha + \beta i$ korijen karakteristične jednadžbe, onda je i kompleksan broj $\alpha - \beta i$ korijen karakteristične jednadžbe (uvijek dolaze u paru)

Izgled rješenja s obzirom na karakter korijena: Karakteristična jednadžba $r^2 + ar + b = 0$ je kvadratna jednadžba, pa su njena rješenja (korijeni) dani u obliku:

$$r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2}$$

Postoje tri mogućnosti ovisno o diskriminanti $D = a^2 - 4b$:

- ako je $D > 0$ imamo dva realana i različita korijena r_1 i r_2 ($r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}$ i $r_1 \neq r_2$) i njima odgovaraju dva (linearno nezavisna) rješenja $y_1 = e^{r_1 x}$ i $y_2 = e^{r_2 x}$;

- ako je $D = 0$ imamo dva jednaka realna korijena $r_1 = r_2$ ($r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$). U ovom slučaju korjenu $r_1 = r_2 = r$ odgovaraju dva (linearno nezavisna) rješenja $y_1 = e^{rx}$ i $y_2 = xe^{rx}$;

- ako je $D < 0$ imamo $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ konjugirano kompleksan par korijena i njima odgovaraju dva linearno nezavisna rješenja oblika $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ i $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$;

Diferencijalna jednadžba (11) uvijek ima jedinstveno rješenje $y = y(x)$ koje zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Primjer 1.16 Nađite opća rješenje diferencijalnih jednadžbi:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

c) $y'' + y = 0$

Rješenje:

- Diferencijalnoj jednadžbi $y'' - 5y' + 6y = 0$ pridružena je karakteristična jednadžba $r^2 - 5r + 6 = 0$. Njena rješenja (korijeni) su dana u obliku:

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \implies r_1 = 3 \text{ i } r_2 = 2.$$

Imamo dva realana i različita korijena ($D > 0$) i njima odgovaraju dva (linearno nezavisna) rješenja $y_1 = e^{3x}$ i $y_2 = e^{2x}$, pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

- Diferencijalnoj jednadžbi $y'' + 4y' + 4y = 0$ pridružena je karakteristična jednadžba $r^2 + 4r + 4 = 0$, tj. $(r+2)^2 = 0$. Ovdje imamo dva jednaka realna korijena $r_1 = r_2 = r = 2$ ($D = 0$). Tom korjenu odgovaraju dva (linearno nezavisna) rješenja $y_1 = e^{2x}$ i $y_2 = xe^{2x}$, pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

- Diferencijalnoj jednadžbi $y'' + y = 0$ pridružena je karakteristična jednadžba $r^2 + 1 = 0$. Njena rješenja (korijeni) su dana u obliku:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = 0 \pm i.$$

Ovdje imamo konjugirano kompleksan par korijena $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i = 0 \pm i$ ($D < 0$), pa njima odgovaraju dva linearno nezavisna rješenja oblika $y_1 = e^{0x}\cos(1\cdot x) = \cos x$ i $y_2 = e^{0x}\sin(1\cdot x) = \sin x$. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je onda dano u obliku

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Primjer 1.17 Nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y = 0$ koje zadovoljava uvjet da u ima stacionarnu točku u točki $(\pi, 1)$.
Rješenje: U prethodnom primjeru smo vidjeli da je popće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y = 0$ oblika

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Odredimo početne uvjete. Imamo da je $y(\pi) = 1$, a budući je $x = \pi$ stacionarna točka, mora biti zadovoljen uvjet $y'(\pi) = 0$. Iz općeg rješenja imamo

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

pa je

$$-c_1 \sin\pi + c_2 \cos\pi = 0 \quad\Longrightarrow\quad -c_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad c_2 = 0.$$

Dakle, traženo partikularno rješenje ima oblik

$$y = c_1 \cos x.$$

Odredimo c_1 iz uvjeta $y(\pi) = 1$. Budući je

$$y(\pi) = c_1 \cos \pi = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = -1,$$

partikularno rješenje koje zadovoljava gornje početne uvjete je $y = -\cos x$.