3. Numeričke metode

3.1 Apsolutna i relativna pogreška

Veličine s kojima se radi u tehnici obično su dobivene mjerenjem ili promatranjem. Mjerenje nije moguće izvršiti točno, pa obično računamo s približnim vrijednostima. Zbog toga se dobivaju i netočni rezultati, ali s određenim stupnjem točnosti ako se koriste metode približnog računanja.
Označimo li sa A točnu vrijednost mjerene veličine, a sa a njenu približnu vrijednost, tada se

$$\Delta_a = |A - a| \tag{1}$$

naziva apsolutna pogreška približne vrijednosti a, što se obično piše

$$A = a \pm \Delta_a.$$

Razlikujemo dva slučaja:

- A je poznata veličina, pa je apsolutna pogreška Δ_a određena sa (1);
- A je nepoznata veličina (češće), pa Δ_a nije moguće naći iz (1). U ovom slučaju uvodimo pojam granične apsolutne pogreške Δ.

Granična apsolutna pogreška približne vrijednosti a, oznaka Δ, je svaki broj veći ili jednak Δ_a, tj.

$$|A - a| = \Delta_a \leq \Delta.$$

Ovo povlači

$$a - \Delta \leq A \leq a + \Delta.$$

Dakle, $a_1 = a - \Delta$ je najmanja aproksimacija broja A, a $a_2 = a + \Delta$ je najveća aproksimacija broja A. Vrijedi:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{i} \quad \Delta = \frac{a_2 - a_1}{2},$$

i pišemo $A = a \pm \Delta$.

Primjer 3.1 Poznato je da temperatura T u peći nije veća od 1245^0 i nije manja od 1235^0, pita se smijemo li tvrditi da je temperatura u peći poznata s točnošću do 10^0.

Rješenje: Budući za (točnu) temperaturu T vrijedi

$$a_1 = 1235^0 \leq T \leq 1245^0 = a_2,$$

onda je približna temperatura

$$t = \frac{1235^0 + 1245^0}{2} = 1240^0$$

a granična apsolutna pogreška

$$\Delta = \frac{1245^0 - 1235^0}{2} = 5^0.$$

Dakle, temperatura T u peći je poznata s točnošću do 5^0, što pišemo

$$T = 1240^0 \pm 5^0.$$

Apsolutna i granična apsolutna pogreška su imenovane veličine i izražavaju se istim jedinicama kao i promatrana veličina.
Apsolutna pogreška ne karakterizira dovoljno točnost mjerenja. Npr. Ako dužinu letvice duljine 214 cm izmjerimo s točnošću 0.5 cm i dužinu letvice duljine 10 cm izmjerimo s točnošću 0.5 cm, ta mjerenja nisu jednako točna. Zbog toga se uvodi relativna pogreška δ_a približnog broja a, koji je približna vrijednost veličine A, kao

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}.$$

Relativna pogreška je neimenovani broj. Relativnu pogrešku često ne možemo znati iz istih razloga kao i apsolutnu pogrešku, pa uvodimo graničnu relativnu pogrešku δ kao svaki broj veći ili jednak δ_a, tj.

$$\delta_a \leq \delta.$$

Ovo povlači

$$\Delta_a \leq |A| \cdot \delta.$$

Dakle, $|A| \cdot \delta$ ima značenje granične apsolutne pogreške Δ, pa pišemo

$$\Delta = |A| \cdot \delta \qquad \text{ili} \qquad \delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

U praksi je obično $A \approx a$, pa uzimamo

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \qquad \text{ili} \qquad \Delta = |a| \cdot \delta.$$

No, sada je (uz uvjet $a > 0$)

$$a\,(1-\delta) = a - a\cdot\delta \le A \le a + a\cdot\delta = a\,(1+\delta)$$

što kraće pišemo

$$A = a\,(1 \pm \delta)\,.$$

Granična relativna pogreška redovito se uzražava u postocima.
Graničnu apsolutnu i graničnu relativnu pogrešku obično nazivamo apsolutnom i relativnom pogreškom, jer u praktičnom računu i ne radimo s pravom apsolutnom i pravom relativnom pogreškom.

Primjer 3.2 Mjerenje je nađeno da je temperatura tekućine $2.3^0C \pm 0.1^0C$. Nađite relativnu pogrešku mjerenja temperature s obzirom na Celzijusovu i apsolutnu skalu.
Rješenje:

$$T \approx t = 2.3^0C = (2.3 + 273.15)^0\,K = 275.45^0K$$

Sada je

$$\delta_C = \frac{0.1^0C}{2.3^0C} = \frac{0.1}{2.3} \approx 0.0435 = 4.35\%,$$

a

$$\delta_A = \frac{0.1^0K}{275.45^0K} = \frac{0.1}{275.45} \approx 0.0004 = 0.04\%.$$

Osnovni izvori pogrešaka

1. Pogreške problema i pogreške metode

   - Pogreške problema - javljaju se pri samom formuliranju problema (matematički model često je idealiziran).
   - Pogreške metode - matematički model je često kompliciran za rješavanje, pa koristimo jednostavniji koji daje približno jednake rezultate;

2. Pogreške ostatka - javljaju se kao posljedica beskonačnih procesa (limesa) u matematičkoj analizi. Npr. želimo li riješiti jednadžbu

$$\sin x = x - 1.$$

Jedan od načina je da funkciju $\sin x$ prikažemo kao beskonačan red

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - .... = x - \frac{x^3}{3!} + O\left(x^3\right)$$

Ako pretpostavimo $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, početna jednadžba se svodi na rješavanje jednadžbe $x - \frac{x^3}{3!} = x - 1$. Rješenje ove jednadžbe je približno rješenje početne jednadžbe, a pogreška ovisi o veličini (ostatku) $O\left(x^3\right)$;

3. Početne pogreške - pogreške koje se već nalaze u nekim matematičkim formulama (npr. neke fzikalne konstante);

4. Pogreške zaokruživanja - npr. $\frac{1}{3} \approx 0.333$ ili $\pi \approx 3.14$.

5. Pogreške računskih operacija - ako računamo sa već zaokruženim brojevima, izvođenjem niza uzastopnih računskih operacija dolazimo do numeričkih rezultata koji su također približni brojevi. Pitanje: kako pogreške početnih podataka utječu na pogrešku konačanog rezultata?

3.2 Približno rješavanje jednadžbi

Točne korijene (rješenja) jednadžbe

$$f\left(x\right) = 0$$

(algebarske ili transcendentne) općenito nije moguće naći, pa tražimo približna rješenja.

Primjer 3.3 Ako je $f\left(x\right) = P_n\left(x\right)$, gdje je $P_n\left(x\right)$ polinom $n-$tog stupnja, onda riješiti jednadžbu

$$P_n\left(x\right) = 0,$$

znači naći korijene polinoma $P_n\left(x\right)$. Po osnovnom teoremu algebre ovaj polinom ima n korijena, pri čemu neki mogu biti međusobno jednaki, a neki od njih mogu biti realni brojevi a neki kompleksni brojevi. Nas zanimaju samo realna rješenja. Ako je $n \leq 4$ postoje formule pomoću kojih možemo naći korijene, a za $n \geq 5$ se pokazalo da takva formula ne postoji.

Riješiti jednadžbu $f(x) = 0$ znači naći nul-točke funkcije $y = f(x)$.

Dakle, najednostavnije se dolazi do približnih rješenja jednadžbe ako se nacrta graf funkcije $y = f(x)$ i odrede točke u kojima taj graf siječe $x-$os. To je grafička metoda rješavanja, a na taj način dobiveno rješenje se uzima kao početna, gruba približna vrjednost traženog korijena i naziva početno približno rješenje (ili nulta aproksimacija).
Grafička metoda se može pojednostavniti ako je moguće napisati

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

gdje su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ funkcije čiji se grafovi dadu lakše nacrtati nego graf polazne funkcije $f(x)$.
Ako je c ona vrijednost za koju je $f_1(c) = f_2(c)$, onda je c rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, tj. onda je $f(c) = 0$. Dakle, c je apscisa točke u kojoj se grafovi funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ sijeku.
Primjer 3.4 Grafičkom metodom odredite približnu vrijednost najmanjeg pozitivnog korijena jednadžbe

$$x - tgx = 0.$$

Rješenje: Ova jednadžba je oblika $f(x) = 0$, gdje je

$$f(x) = x - tgx = f_1(x) - f_2(x),$$

a $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = tgx$.
Sa slike (slika 1.) vidimo da jednadžba $x - tgx = 0$ ima beskonačno rješenja i da se najmanji pozitivni korijen c nalazi u intervalu $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Budući je $\pi \approx 3.14$ i $\frac{3\pi}{2} \approx 4.72$, onda je

$$3.14 < c < 4.72.$$

Ovaj interval možemo još suziti. Naime, budući je

$$f_1(4) = 4 > f_2(4) = tg4 \approx 1.158,$$

onda je graf funkcije $f_1(x)$ iznad grafa funkcije $f_2(x)$ za $x \in (\pi, 4]$, pa je $c \in \left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$, tj.

$$4 < c < 4.72,$$

pa možemo uzesti npr. $c \approx \frac{4+4.72}{2} = 4.36$.
Numerički način rješavanja puno je točniji od grafičkog jer se vrijednost korijena može odrediti na onoliko točnih decimala koliko to želimo.
Postoji više numeričkih metoda za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$. Važnije su:

- Metoda polovljenja ili bisekcije;
- Metoda sekante;
- Metoda tangente;
- Kombinirana metoda;
- Metoda iteracije.

Kod korištenja navedenih metoda funkcija $y = f(x)$ obično mora ispunjavati određene uvjete:

a) Funkcija $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ mora biti neprekidna (zajedno sa svojim derivacijama $f'(x)$ i $f''(x)$);

b) Mora vrijediti $f(a) f(b) < 0$;

c) $f'(x)$ (i $f''(x)$) moraju zadržavati predznak na čitavom intervalu.

Ako je ispunjen uvjet a) (tj. funkcija $y = f(x)$ je na intervalu $[a, b]$ neprekidna) i uvjet b) (tj. za brojeve $f(a)$ i $f(b)$ vrijedi: $f(a) \neq 0$ i $f(b) \neq 0$ i imaju različiti predznak), onda postoji točka $c \in (a, b)$ za koju je $f(c) = 0$.
Uvjet c), tj. ako $f'(x)$ima konstantan predznak na $[a, b]$ osigurava da na tom intervalu funkcija $y = f(x)$ ima samo jednu nul-točku.

Metoda polovljenja ili bisekcije

Zadatak: Tražimo rješenje jednadžbe $f(x) = 0$ za $x \in [a, b]$, tj. točku $c \in [a, b]$ za koju je $f(c) = 0$;

Pretpostavka: Funkcija $y = f(x)$ ispunjava uvjete a), b), c) od prije [uvjet c) ne-nužno].

Metoda:
Podijelimo interval $[a, b] = [a_0, b_0]$ na pola, tj. nađemo točku $\frac{a+b}{2}$. Ako je:

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ onda je $c = \frac{a+b}{2}$;

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ onda odabiremo interval

$$[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{ili} \quad [a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

  tako da funkcija $y = f(x)$ ima različite predznake na krajevima intervala. Ovo osigurava da je $c \in (a_1, b_1)$.

Ponovimo ovaj postupak za interval $[a_1, b_1]$. Na taj način, u n koraka, dolazimo do niza intervala:

$$[a_0, b_0], \quad [a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \; ..., [a_n, b_n].$$

Kad bi proces nastavili do beskonačnosti, imali bi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Širina intervala $[a_n, b_n]$ je

$$a_n - b_n = \frac{1}{2^n}(b-a).$$

Budući je $c \in (a_n, b_n)$, onda je

$$0 < c - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a).$$

Ako uzmemo za c bilo koji broj iz intervala (a_n, b_n), ne radimo grešku veću od $\frac{1}{2^n}(b-a)$, pa obično uzimamo

$$c \approx \frac{a_n + b_n}{2} = c^*.$$

Sada je,

$$|c - c^*| < \frac{1}{2^n}(b-a)$$

ili

$$c = c^* \pm \frac{1}{2^n}(b-a).$$

Mana metode: Mora se koristiti za svaki korijen jednadžbe $f(x) = 0$ posebno.

Primjer 3.5 Metodom polovljenja odredite približnu vrijednost korijena jednadžbe

$$e^{-x} + \ln x = 0$$

s točnošću 10^{-1}.
<u>*Rješenje:*</u> Funkciju $f(x) = e^{-x} + \ln x$, možemo zapisati u obliku

$$f(x) = e^{-x} - (-\ln x)$$

pa crtamo grafove funkcija $f_1(x) = e^{-x}$ i $f_1(x) = -\ln x$. (slika2.)
Sa slike vidimo da je $c \in [0.5, 1]$. Provjerimo to. Budući je $f_1(0.5) = e^{-0.5} = 0.606\,53 < 0.693\,15 = -\ln 0.5 = f_2(0.5)$, a $f_1(1) = e^{-1} = 0.367\,88 > 0 = -\ln 1 = f_2(1)$, krivulje se sijeku u točki čija je apscisa između točaka $0,5$ i 1 (tj. međusobni položaj grafova je dobro skiciran na intervalu $[0.5, 1]$). Odredimo sada broj potrebnih koraka n za danu točnost 10^{-1}. Mora biti zadovoljeno

$$\frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0.5}{2^n} < \frac{1}{10} \implies 2^{n+1} > 10 \implies 2.\,321\,9 < n.$$

Dakle, dovoljna su $n = 3$ koraka. Imamo $[a_0, b_0] = [0.5,\ 1]$ i

$$\begin{aligned} f(0.5) &= e^{-0.5} + \ln 0.5 = -8.\,661\,7 \times 10^{-2} < 0, \\ f(1) &= e^{-1} + \ln 1 = 0.367\,88 > 0. \end{aligned}$$

Odredimo $\frac{a_0+b_0}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$ i $f(0.75) = e^{-0.75} + \ln 0.75 = 0.184\,68 > 0$. Dakle sada je $[a_1, b_1] = [0.5,\ 0.75]$. Nastavimo s polovljenjem i dobivamo:

$$\frac{a_1+b_1}{2} = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625 \ \text{ i } \ f(0.625) = e^{-0.625} + \ln 0.625 = 6.\,525\,8 \times 10^{-2} > 0$$
$$\frac{a_2+b_2}{2} = \frac{0.5+0.625}{2} = 0.562\,5 \ \text{ i } \ f(0.562\,5) = e^{-0.562\,5} + \ln 0.562\,5 = -5.\,581\,3 \times 10^{-3} < 0$$

i	$\overset{-}{a_i}$	$\overset{+}{b_i}$
0	0.5	1
1	0.5	0.75
2	0.5	0.625
3	0.562 5	0.625

Ako uzmemo za c bilo koji broj iz intervala $(a_3, b_3) = (0.562\,5,\ 0.625)$, ne radimo grešku veću od $\frac{1}{2^3}(1 - 0.5) = \frac{1}{2^4}$, pa uzimamo

$$c \approx \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0.562\,5 + 0.625}{2} = 0.593\,75 = c^*.$$

Sada je
$$c = 0.593\,75 \pm \frac{1}{2^4} = 0.593\,75 \pm 0.062\,5,$$
tj. $c \in (0.656\,25,\ 0.531\,25)$.

3.3 Metoda najmanjih kvadrata

Ako mjerimo neku veličinu više puta dobivamo različite vrijednosti. Dakle, javljaju se greške (grube, sustavne, slučajne). Slučajne greške je nemoguće izbjeći (javljaju se kao posljedica nesavršeosti osjetila i instrumenata).
Pravu vrijednost X mjerene veličine nije moguće odrediti, pa određujemo najvjerojatniju vrijednost te veličine.
Ako smo izvršili n mjerenja i dobili rezultate s_1, s_2, ..., s_n onda je , po Gaussu, najvjerojatnija vrijednost od X upravo aritmetička sredina
$$x = \frac{s_1 + s_2 + ... + s}{n}$$
Prividne greške su odstupanja rezultata mjerenja od aritmetičke sredine x, tj.
$$d_1 = x - s_1, \quad d_2 = x - s_2, \ \ldots\ , d_n = x - s_n.$$
Gauss je pokazao da će najvjerojatnija vrijednost mjerene veličine, ako smo izvršili n mjerenja, biti ona kod koje je suma kvadrata odstupanja (prividnih grešaka) rezultata mjerenja od aritmetičke sredine biti najmanja, tj. vjerojatnost će biti najveća ako je
$$d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2$$
najmanje (minimalno).
Ovaj način pristupa ispitivanju slučajnih grešaka se naziva metoda najmanjih kvadrata.

Analitički prikaz eksperimentalnih podataka linearnom funkcijom po metodi najmanjih kvadrata

Ako smo prilikom nekog mjerenja dobili n parova brojeva (x_i, y_i) , $i = 1, 2, ..., n$, tada svakom od tih parova možemo pridružiti točku u koordinatnom sustavu. Ako se tako dobivene točke pribilžno podudaraju s točkama nekog pravca, onda želimo naći jednadžbu tog pravaca. Dakle, tražimo jednadžbu pravca $y = Ax + B$ koji najbolje aproksimira dane podatke, tj. tražimo nepoznate koeficijente A i B. (Slika 3.)

Neka je $M_i\,(x_i, y_i)$ točka u ravnini koja odgovara podatku (x_i, y_i) , a $N_i\,(x_i, Y_i)$ točka na traženom pravcu $y = Ax+B$ (koja ima istu apscisu kao i M_i). (Slika 4.) Tražimo da zbroj kvadrata udaljenosti točaka M_i i N_i bude minimalna, tj. da

$$S = d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

bude minimalno. Budući je $d_i = |y_i - Y_i|$ onda je

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2$$

Kako N_i leži na pravcu $y = Ax + B$, onda je $Y_i = Ax_i + B$, pa je

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B)^2 .$$

Sada je $S = S(A, B)$ funkcija dviju varijabli A i B. Dakle, tražimo one vrijednosti od A i B za koje je S minimalno (ima minimum).
Nužan uvjet za ekstrem je:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial B} = 0.$$

Budući je

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial S}{\partial A} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} -2x_i\,(y_i - Ax_i - B) = 0 \\ \tfrac{\partial S}{\partial B} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} -2\,(y_i - Ax_i - B) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial S}{\partial A} &= -2\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,(y_i - Ax_i - B) = 0 \\ \tfrac{\partial S}{\partial B} &= -2\textstyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ A\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i + nB &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\} \ \underline{\text{odredbeni sustav}}$$

Odredbeni sustav je sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Nakon što riješimo sustav dobivamo vrijednosti $A = A_0$ i $B = B_0$.

Za te vrijednosti funkcija S ima mogući ekstrem. Dovoljne uvjete nije potrebno određivati jer se može pokazati da je to uvijek ekstrem i to minimum. Dakle, tražena jednadžba pravca je

$$y = A_0 x + B_0.$$

Primjer 3.6 Metodom najmanjih kvadrata odredite linearnu funkciju koja aproksimira empiričke podatke dane tablicom

x_i	-2	-1.5	-1	-0.5	0
y_i	-1	-2.75	-4	-4.75	-5

Rješenje: Odredbeni sustav je

$$\begin{aligned} A\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{5} x_i &= \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\ A\sum_{i=1}^{5} x_i + 5B &= \sum_{i=1}^{5} y_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Napravimo tablicu

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-2	-1	4	2
2	-1.5	-2.75	2.25	4.125
3	-1	-4	1	4
4	-0.5	-4.75	0.25	2.375
5	0	-5	0	0
$\sum$	-5	-17.5	7.5	12.5

,

pa podatke uvrstimo u (1) i dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 7.5A - 5B &= 12.5 \\ -5A + 5B &= -17.5. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $A = -2$ i $B = -5.5$, tj. traženi pravac (linearna funkcija je) (Slika 5.)

$$y = -2x - 5.5.$$

Analitički prikaz eksperimentalnih podataka kvadratnom funkcijom po metodi najmanjih kvadrata

Ako se podaci (x_i, y_i) , $i = 1, 2, ..., n$, nakon što ih prikažemo u kooordinatnom sustavu, približno podudaraju s nekom parabolom (Slika 6.), onda zavisnost $x - a$ i $y - a$ tražimo u obliku kvadratne funkcije

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Slično kao u prethodnom slučaju, koeficijente A, B, C tražimo metodom najmanjih kvadrata.
Dakle, zahtjevamo da suma kvadrata udaljenosti točaka $M_i(x_i, y_i)$ i $N_i(x_i, Y_i)$ (N_i leži na paraboli) bude minimalna, tj. da

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C\right)^2$$

bude minimalno.
Nužan uvjet za ekstrem je:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial B} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial C} = 0.$$

Nakon što nađemo parcijalne derivacije od S i izjednačimo ih s nulom, dobivamo sustav:

$$\left.\begin{aligned} A\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + B\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + C\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ A\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + B\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + C\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i + C\cdot n &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{odredbeni sustav}}$$

Odredbeni sustav je sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice A, B, C. Nakon što riješimo sustav dobivamo vrijednosti $A = A_0$, $B = B_0$ i $C = C_0$. Za ove vrijednosti funkcija S poprima minimalnu vrijednost, pa je tražena jednadžba parabole

$$y = A_0x^2 + B_0x + C_0.$$

3.4 Interpolacija

Promatrana funkcija $y = f(x)$ može biti zadana:

- formulom koja može biti složena ili iz nekih razloga neprikladna;
- svojim grafom;
- tablicom s određenim brojem svojih parova vrijednosti (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Pretpostavljamo da su za vrijednosti argumenata:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ ..., x_n$$

poznate funkcijske vrijednosti:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ ..., y_n.$$

Problem interpolacije: Pomoću ovih poznatih funkcijskih vrijednosti izračunati vrijednost funkcije za neki $x \in [a, b]$, gdje je $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
Problem ekstrapolacije: Pomoću ovih poznatih funkcijskih vrijednosti izračunati vrijednost funkcije za neki $x \notin [a, b]$, gdje je $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. (puno zahtjevniji problem).
Problem interpolacije rješavamo tako što tražimo funkciju

$$y = F(x) \qquad \text{(interpolacijska funkcija)}$$

koja će prolaziti danim točkama i koja će što manje odstupati od polazne funcije na intervalu $[a, b]$. Pri tome zahtjevamo da interpolacijaska funkcija $y = F(x)$ pripada nekoj unaprijed zadanoj klasi funkcija. Obično pretpostavljamo da je $F(x)$ polinom (ako imamo $n + 1$ točku onda je $F(x) = P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja). Ako je $F(x)$ polimnom $n-$tog stupnja, onda njegov graf mora sječi graf polazne funkcije $y = f(x)$ u zadanim točkama (x_i, y_i). Pri tome zahtjevamo da taj graf ne odstupa previše od grafa funkcije $y = f(x)$, tj. da za neki zadani x, s nekom sigurnošću, možemo uzesti ordinatu $y = P_n(x)$ umjesto ordinate $y = f(x)$. (Slika 7.)

Lagrangeov interpolacijski polinom

Neka su za funkciju $y = f(x)$, za $n+1$ različitih vrijednost argumenta

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ ..., x_n$$

poznate funkcijske vrijednosti:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = \ y_1,\ ...\ , f(x_n) = y_n.$$

Tražimo polinom $n-$tog stupnja $L_n(x)$ za koji vrijedi

$$L_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Pretpostavljamo da je $L_n(x)$ oblika

$$L_n(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) +$$

$$+ a_1 (x - x_0)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n) + \ ... +$$

$$+ a_n (x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1})$$

Tražimo nepoznate koeficijente $a_i, i = 0, 1, 2, ..., n$. Budući je

$$L_n(x_0) = a_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot ... \cdot (x_0 - x_n) + 0 + ... + 0$$

a $L_n(x_0) = y_0$, onda je

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot ... \cdot (x_0 - x_n)}.$$

Slično se pokaže da je :

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot ... \cdot (x_1 - x_n)},$$

$$\vdots$$

$$a_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)},$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot ... \cdot (x_n - x_{n-1})}.$$

Sada je

$$L_n(x) = y_0 \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)}}_{l_0(x)} + \ \ldots +$$

$$+\, y_n \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdot(x_n-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}}_{l_n(x)}$$

Ovaj polinom se naziva Lagrangeov interpolacjski polinom (ili Lagrangeova interpolacjska formula).

Primjer 3.7 Odredite Lagrangeov interpolacjski polinom za funkciju zadanu tablicom

x_i	-1	0	1
y_i	10	5	6

Rješenje:

$$L_2(x) = 10\cdot\frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(-1-0)\cdot(-1-1)} + 5\cdot\frac{(x-(-1))\cdot(x-1)}{(0-(-1))\cdot(0-1)} +$$

$$+6\cdot\frac{(x-(-1))\cdot(x-0)}{(1-(-1))\cdot(1-0)} =$$

$$= \frac{10}{2}\left(x^2-x\right) + \frac{5}{-1}\left(x^2-1\right) + \frac{6}{2}\left(x^2+x\right) =$$

$$= 3x^2 - 2x + 5$$

Primjer 3.8 Odredite Lagrangeov interpolacjski polinom za funkciju $f(x) = \sin \pi x$ odabirući točke

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_1 = \frac{1}{2}.$$

Rješenje: Budući je

$$y_0 = \sin(0) = 0, \quad y_1 = \sin \pi \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \sin \pi \frac{1}{2} = 1.$$

imamo

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
y_i	0	$\frac{1}{2}$	1

.

Sada je

$$L_2(x) = 0 \cdot \frac{\left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(0 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(0 - \frac{1}{6}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6} - 0\right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)} +$$

$$+1 \cdot \frac{(x-0) \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2} - 0\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)} = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

Sada je za $x = \frac{1}{3} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$\sin\left(\pi \cdot \frac{1}{3}\right) \approx -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}$$

Budući je $\sin\left(\pi \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, grešaka je

$$f\left(\frac{1}{3}\right) - L_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{6} \approx 0.0327$$

(Slika 8.)

Općenito, kad se funkcija $y = f(x)$ zamijeni Lagrangeovim polinomom, načini se greška

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x).$$

Može se pokazati da za apsolutnu grešku vrijedi

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left|(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)\right|$$

gdje je

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} \left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Primjer 3.9 Iz Primjera 3.8 za $f(x) = \sin \pi x$ i $L_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$ odredimo gornju granicu greške. Budući je

$$\begin{aligned} M_3 &= \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \left| (\sin \pi x)''' \right| = \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \left| -\pi^3 \cos \pi x \right| = \\ &= \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \pi^3 \left| \cos \pi x \right| = \pi^3 \cos 0 = \pi^3 \end{aligned}$$

imamo

$$|R_2(x)| = |f(x) - L_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{3!} \left| (x-0) \left(x - \frac{1}{6} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \right|,$$

pa je

$$\left| R_2 \left(\frac{1}{3} \right) \right| \leq \frac{\pi^3}{3!} \left| \left(\frac{1}{3} - 0 \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right| \lessapprox 0.0479.$$

3.5 Pribilžna integracija

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$ i ako je njena primitivna funkcija $F(x)$ (tj. $F'(x) = f(x)$) poznata, onda se određeni integral od $f(x)$ od a do b računa po Newton-Leibnitzovoj formuli

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

U mnogim slučajevima primitivnu funkciju $F(x)$ nije moguće naći (ili je vrlo teško), pa je Newton-Leibnitzova formula neupotrebljiva. U tim slučajevima tražimo približnu vrijednost integrala $\int_a^b f(x)\, dx$.

Postoje razne metode za približno računanje integrala. Osnovna podjela je:

- numerička integracija;
- grafička integracija.

Numerička integracija

Osnovna ideja: Zamjenjujemo podintegralnu funkciju $f(x)$ nekom drugom jednostavnijom funkcijom $\varphi(x)$ (npr. djelovima pravca, Lagrangeovim polinomom,...), koja na segmentu $[a,b]$ aproksimira $f(x)$ i koja se može direktno integrirati.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (\Phi'(x) = \varphi(x))$$

Tu se postavlja pitanje i ocjene greške koja nastaje približnim integriranjem.
Prisjetimo se: ako je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a,b]$, onda je

$$\int_a^b f(x)\,dx = P$$

gdje je P površina lika omeđenog krivuljom $y = f(x)$, $x-$osi i pravcima $x = a$ i $x = b$. (Slika 9.)
Kod numeričke integracije najviše se koriste metode koje zadani integral aproksimiraju konačnom sumom

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Osnovna ideja i oznake: Neka je $f(x)$ zadana na segmentu $[a,b]$. Želimo odrediti približnu vrijednost integrala

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

aproksimirajući ga konačnom sumom.
Razdijelimo segment $[a,b]$ na n jednakih djelova (podintervala) s diobenim točkama

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ ..., x_n = b$$

Udaljenost susjednih točaka, odnosno širina svakog podintervala je

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Pripadne funkcijske vrijednosti označimo sa:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = \ y_1, \ ... \ , f(x_n) = y_n.$$

(Slika 10.)

Pravokutna formula

Pretpostavimo, u početku, da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$. S dvije susjedne diobene točke x_{i-1} i x_i, određena su dva pravokutnika. Prvi određen s x_{i-1} i x_i ima bazu h i visinu y_{i-1}, tj. površinu

$$P_i^* = h \cdot y_{i-1},$$

Drugi određen s x_{i-1} i x_i ima bazu h i visinu y_i, tj. površinu

$$P_i^{**} = h \cdot y_i.$$

Sada je

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} P_i^* \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot y_{i-1} = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} =$$

$$= h\left(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}\right),$$

tj.

$$I \approx h\left(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}\right) = I_{L_n}^*$$

Sumu I_L^* nazivamo lijeva pravokutna formula (jer su za visine prvokutnika odabrane ordinate da lijevom kraju svakog intervala). (Slika 11.)
Slično,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} P_i^{**} \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot y_i = h \sum_{i=1}^{n} y_i =$$

$$= h\left(y_1 + y_2 + ... + y_n\right),$$

tj.

$$I \approx h\left(y_1 + y_2 + ... + y_n\right) = I_{D_n}^*$$

Sumu I_D^* nazivamo desna pravokutna formula (jer su za visine prvokutnika odabrane ordinate da desnom kraju svakog intervala). (Slika 11.)

Napomena: Što imamo više diobenih točaka, tj. što je n veći, aproksimacija je bolja. Lijeva i desna pravokutna formula vrijede i kad nije zadovoljeno $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$.
Ako je $n = 1$ imamo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx hy_0 = (b-a) \cdot f(a) \quad \text{(Slika 12.)}$$

što je osnovna lijeva pravokutna formula i

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx hy_1 = (b-a) \cdot f(b) \quad \text{(Slika 13.)}$$

što je osnovna desna pravokutna formula.

Primjer 3.10 Aproksimirajte integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx$$

osnovnom lijevom i osnovnom desnom pravokutnom formulom, te lijevom i desnom pravokutnom formulom za $n = 5$.
Rješenje: Imamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Lijeva osnovna pravokutna formula nam daje

$$I \approx \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \cdot \cos 0 = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2},$$

a desna osnovna pravokutna formula

$$I \approx \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0.$$

(Slika 15.). Greška je

$$\begin{aligned}\Delta_{L_1} &= I - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0.571, \\ \Delta_{D_1} &= I - 0 = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Za $n = 5$ imamo

$$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10},$$

pa je

i	x_i	y_i
0	0	$\cos 0 = 1$
1	$\frac{\pi}{10}$	$\cos \frac{\pi}{10} = 0.951\,06$
2	$\frac{2\pi}{10}$	$\cos \frac{2\pi}{10} = 0.809\,02$
3	$\frac{3\pi}{10}$	$\cos \frac{3\pi}{10} = 0.587\,79$
4	$\frac{4\pi}{10}$	$\cos \frac{4\pi}{10} = 0.309\,02$
5	$\frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$

Sada je (Slika 14.)

$$I \approx I^*_{L_5} = h\left(y_0 + y_1 + ... + y_4\right) =$$

$$= \frac{\pi}{10}\left(1 + 0.951\,06 + 0.809\,02 + 0.587\,79 + 0.309\,02\right) \approx 1.\,148\,8$$

i

$$I \approx I^*_{D_5} = h\left(y_1 + y_1 + ... + y_5\right) =$$

$$= \frac{\pi}{10}\left(0.951\,06 + 0.809\,02 + 0.587\,79 + 0.309\,02 + 0\right) \approx 0.834\,69$$

Greška je

$$\begin{aligned}\Delta_{L_5} &= I - I^*_{L_5} = 1 - 1.\,148\,8 \approx -0.148\,8, \\ \Delta_{D_5} &= I - I^*_{D_5} = 1 - 0.834\,69 \approx 0.165\,31.\end{aligned}$$

Napomena: Što je funkcija strmija, greška je veća.

Trapezna formula

Razdijelimo segment $[a, b]$ na n jednakih djelova (podintervala) s diobenim točkama

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ ..., x_n = b$$

Udaljenost susjednih točaka, odnosno širina svakog podintervala je

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Pripadne funkcijske vrijednosti označimo sa:

$$f(x_0) = y_0,\quad f(x_1) = y_1,\ \dots\ , f(x_n) = y_n.$$

S dvije susjedne diobene točke x_{i-1} i x_i, određen je trapez usporednih stranica y_{i-1} i y_i i visine h. Površina tog trapeza je

$$P_i = s_i \cdot h = h \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2}.$$

Sada je (Slika 15.)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} P_i \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot \frac{y_{i-1}+y_i}{2} = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1}+y_i) =$$

$$= \frac{h}{2} \left[(y_0+y_1) + (y_1+y_2) + \dots + \left(y_{n-2}+y_{n-1}\right) + (y_{n-1}+y_n) \right],$$

tj.

$$I \approx \frac{h}{2} \left(y_0 + y_n + 2\left(y_1 + \dots + y_{n-1}\right) \right) = I^*_{T_n}$$

Sumu $I^*_{T_n}$ nazivamo trapezna formula.
Ako je $n = 1$ imamo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{(b-a)}{2} \cdot (f(a) + f(b))$$

što je osnovna trapezna formula. (Slika 16.)
Može se pokazati da je apsolutna greška

$$\Delta_{T_n} = \left| I - I^*_{T_n} \right| \le \frac{M\,(b-a)^3}{12 \cdot n^2}$$

gdje je

$$M = \max_{a \leq x \leq b} \left| f''(x) \right|.$$

Primjer 3.11 Aproksimirajte integral

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

osnovnom trapeznom formulom, te trapeznom formulom za $n = 4$.

<u>Rješenje:</u> Imamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_0^4 = \\ &= \ln \left(4 + \sqrt{17} \right) \approx 2.094\,7 \end{aligned}$$

Osnovna trapezna formula nam daje

$$I \approx I_{T_1}^* = \frac{(4-0)}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+4^2}} \right) \approx 2.485\,1,$$

(Slika 17.) Greška je

$$\begin{aligned} I - I_{T_1}^* &= 2.094\,7 - 2.485\,1 = -0.390\,4, \\ \Delta_{T_1} &= \left| I - I_{T_1}^* \right| = 0.390\,4. \end{aligned}$$

Za $n = 4$ imamo $h = \frac{4-0}{4} = 1$, pa je

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	$\frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = 0.707\,11$
2	2	$\frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = 0.447\,21$
3	3	$\frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = 0.316\,23$
4	4	$\frac{1}{\sqrt{1+4^2}} = 0.242\,54$

Sada je

$$I \approx I_{T_4}^{*} = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_4 + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + 0.242\,54 + 2\cdot\left(0.707\,11 + 0.447\,21 + 0.316\,23\right)\right) \approx 2.0918.$$

(Slika 18.). Greška je

$$\begin{aligned} I - I_{T_4}^{*} &= 2.\,094\,7 - 2.0918 = 0.002\,9, \\ \Delta_{T_4} &= \left|I - I_{T_4}^{*}\right| = 0.002\,9. \end{aligned}$$

a relativna greška

$$\delta_{T_1} = \frac{\Delta_{T_1}}{I} = \frac{0.002\,9}{2.\,094\,7} \approx 0.001384 \cdot 100 \approx 0.1\%$$

Budući je

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 1}{\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{2}}},$$

(Slika 19.) onda je

$$M = \max_{0 \le x \le 4}\left|\frac{2x^2 - 1}{\left(x^2 + 1\right)^{\frac{5}{2}}}\right| = \left|\frac{2 \cdot 0^2 - 1}{\left(0^2 + 1\right)^{\frac{5}{2}}}\right| = 1$$

(Slika 20.) pa bi ocjena greške (ako ne znamo pravu vrijednost I integrala) bila

$$\text{za } n = 1 \qquad \Delta_{T_1} \le \frac{1 \cdot (4 - 0)^3}{12 \cdot 1^2} \lessapprox 5.3334$$

$$\text{za } n = 4 \qquad \Delta_{T_4} \le \frac{1 \cdot (4 - 0)^3}{12 \cdot 4^2} \lessapprox 0.3334$$

Simpsonova formula

S tri točke u ravnini (različitih apscisa) određena je parabola. Ako su točke $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$, $T_3(x_3, y_3)$ onda je jednadžba parabole

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

gdje su koeficijenti A, B i C, rješenja sustava

$$\begin{array}{c} Ax_1^2 + Bx_1 + C = y_1 \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = y_2 \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C = y_3 \end{array}.$$

Površina ispod luka parabole $y = Ax^2 + Bx + C$ nad segmentom $[u, v]$, izražena pomoću tri ordinate, je

$$P_{ip} = \frac{v-u}{6} \cdot \left[y(u) + 4 \cdot y\left(\frac{u+v}{2}\right) + y(v) \right]$$

Primjer 3.12 Odredite jednadžbu parabole koja prolazi točkama $T_1(-1, 2)$, $T_2(0, 1)$, $T_3(1, 4)$ i izračunajte površinu ispod te parabole nad segmentom $[-1, 1]$.
Rješenje Ako je jednadžba parabole $y = Ax^2 + Bx + C$, onda je

$$\left.\begin{array}{r} A - B + C = 2 \\ C = 1 \\ A + B + C = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = 2,\ B = 1,\ C = 1$$

pa je jednadžba parabole $y = 2x^2 + x + 1$. (Slika 21.. Budući je $u = -1$, $v = 1$, onda je $\frac{u+v}{2} = 0$, pa je

$$P_{ip} = \frac{1-(-1)}{6} \cdot [2 + 4 \cdot 1 + 4] = \frac{10}{3}.$$

Neka je dan integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Razdijelimo segment $[a, b]$ na n jednakih djelova, gdje je n paran broj, s diobenim točkama

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ ..., x_n = b$$

Udaljenost susjednih točaka, odnosno širina svakog podintervala je

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Pripadne funkcijske vrijednosti označimo sa:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = \ y_1, \ \ldots, f(x_n) = y_n.$$

Promatrajmo podintervale

$$[x_0, \ x_2], \ \ [x_2, \ x_4], \ \ldots, \ \ [x_{n-2}, \ x_n],$$

duljine $2h$. Nad svakim od tih intervala $[x_{i-1}, \ x_{i+1}]$ zamijenimo luk krivulje $y = f(x)$ lukom parabole koja prolazi točkama $T_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $T_i(x_i, y_i)$, $T_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$. Površine ispod lukova tih parabola nad segmentima $[x_0, \ x_2]$, $[x_2, \ x_4]$, ..., $[x_{n-2}, \ x_n]$ označimo redom P_1, P_3, ..., P_{n-1}. (Slika 22.). Tada je

$$P_1 = \frac{x_2 - x_0}{6} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$P_3 = \frac{x_4 - x_2}{6} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\vdots$$

$$P_{n-1} = \frac{x_n - x_{n-2}}{6} \cdot (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Sada je

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} = I^*_{S_n}$$

Budući je $x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-2} = 2h$, onda je

$$I^*_{S_n} = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\right]$$

Sumu $I^*_{S_n}$ nazivamo <u>Simpsonova formula.</u>

Ako je $n = 2$ imamo (Slika 23.)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_2 + 4y_1\right] = \frac{b-a}{6} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Ovo je osnovna Simpsonova formula.
Može se pokazati da je apsolutna greška

$$\Delta_{S_n} = \left|I - I^*_{S_n}\right| \leq \frac{M\,(b-a)^5}{180 \cdot n^4}$$

gdje je

$$M = \max_{a \leq x \leq b} \left|f^{(iv)}\,(x)\right|.$$

Primjer 3.13 Aproksimirajte integral

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Simpsonovom formulom za $n = 4$.
Rješenje: Imamo (Primjer 3.11)

$$I = \int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx 2.094\,7$$

Za $n = 4$ imamo

$$h = \frac{4-0}{4} = 1,$$

pa je

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	$\frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = 0.707\,11$
2	2	$\frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = 0.447\,21$
3	3	$\frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = 0.316\,23$
4	4	$\frac{1}{\sqrt{1+4^2}} = 0.242\,54$

Sada je

$$I \approx I^*_{s_4} = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_4) + 4\,(y_1 + y_3) + 2 \cdot y_2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\,(1 + 0.242\,54 + 4 \cdot (0.707\,11 + 0.316\,23) + 2 \cdot 0.447\,21) \approx$$

$$\approx 2.\,076\,8.$$

Greška je

$$\begin{aligned} I - I^*_{S_4} &= 2.0947 - 2.0768 \approx 0.0179 \\ \Delta_{S_4} &= \left| I - I^*_{S_4} \right| = 0.0179. \end{aligned}$$

a relativna greška

$$\delta_{S_4} = \frac{\Delta_{S_4}}{I} = \frac{0.0179}{2.0947} \approx 0.008545 \approx 0.8\%.$$

3.6 Približno rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Tražimo rješenje $y = y(x)$ diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x, y)$$

na intervalu $[x_0, b]$, uz početni uvjet $y(x_0) = y_0$. Ako to rješenje postoji, ali ne možemo naći njegov analitički izraz, onda tražimo približno numeričko rješnje. Pod približnim numeričkim rješenjem gornje jednadžbe uz dani početni uvjet, smatramo funkciju zadanu tablicom vrijednosti

x_i	x_0	x_1	...	$x_n = b$
y_i	y_0	y_1	...	y_n

uz uvjet da je y_i približna vrijednost točnog rješenja $y = y(x)$ za $x = x_i$, gdje su x_0, $x_1, ..., x_n = b$ diobene točke intervala $[x_0, b]$, obično međusobno jednako udaljene. Ako su točke jednako udaljene, onda je

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} = h.$$

Eulerova metoda

Tražimo približno numeričko rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x, y)$$

na intervalu $[x_0, b]$, uz početni uvjet $y(x_0) = y_0$. Razdijelimo interval $[x_0, b]$ na n jednakih djelova točkama $x_0, x_1, ..., x_n = b$. Točkom $M_0(x_0, y_0)$ povučemo pravac s koeficijentom smijera $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Jednadžba tog pravca je upravo tangenta na traženu krivulju u točki M_0. Jednadžba te tangente je

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Sada određujemo točku M_1 čija je apscisa x_1, a ordinatu y_1 određujemo iz presjeka pravaca $x = x_1$ i pravca $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$. Dakle,

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \Longrightarrow \\ y_1 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + y_0 \Longrightarrow \\ y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

pa je $M_1(x_1, y_1)$.
Sada dio luka točnog rješenja $y(x) = y$ nad intervalom $[x_0, x_1]$ aproksimiramo dužinom (dijelom tangente) $\overline{M_0M_1}$.
Potpuno analogno dolazimo do vrijednosti

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

odnosno točaka $M_2(x_2, y_2), ..., M_n(x_n, y_n)$.Na taj način smo dobili je integralna krivulja koja prolazi točkom $M_0(x_0, y_0)$ aproksimirana poligonalnom linijom (izlomljenom linijom) određenom sa M_0, $M_1, ...,$ M_n. (Slika 24.)

Primjer 3.14 Nađite približno numeričko rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{1}{2}xy$$

koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$, na intervalu $[0,\ 0.5]$ za $h = 0.1$.
Rješenje: Nađimo najprije točno rješenje

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}xy \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int xdx \Longrightarrow \\ \ln|y| &= \frac{1}{4}x^2 + \ln c_1 \Longrightarrow y = \pm c_1 e^{\frac{1}{4}x^2} \Longrightarrow y = ce^{\frac{1}{4}x^2}. \end{aligned}$$

Budući je $y(0) = ce^0 = c$, onda iz $y(0) = 1$ slijedi $c = 1$, pa je točno rješenje

$$y = e^{\frac{1}{4}x^2}.$$

Eulerova metoda: Budući je intreval $[0,\ 0.5]$ i $h = 0.1$, onda su diobene točke

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.1, \quad x_2 = 0.2, \quad x_3 = 0.3, \quad x_4 = 0.4, \quad x_5 = 0.5.$$

Formirajmo tablicu

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1	1	1.0050	1.0151	1.0303	1.0509

gdje $y_0 = 1$, a y_i računamo po formuli

$$y_i = y_{i-1} + 0.1 \cdot \left(\frac{1}{2} x_{i-1} \cdot y_{i-1}\right).$$

Računanje nam olakšava sljedeća tablica

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$h \cdot f(x_i, y_i) = \Delta y_i$
0	0	1	0	0
1	0.1	1	0.05	0.005
2	0.2	1.0050	0.1005	0.01005
3	0.3	1.0151	0.15227	0.015227
4	0.4	1.0303	0.20606	0.020606
5	5	1.0509		

,

jer je

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}.$$

Imamo

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
0	0	1	$e^{\frac{1}{4}0^2} = 1$	0
1	0.1	1	$e^{\frac{1}{4}(0.1)^2} = 1.0025$	0.0025
2	0.2	1.0050	$e^{\frac{1}{4}(0.2)^2} = 1.0101$	0.0051
3	0.3	1.0151	$e^{\frac{1}{4}(0.3)^2} = 1.0228$	0.0077
4	0.4	1.0303	$e^{\frac{1}{4}(0.4)^2} = 1.0408$	0.0105
5	5	1.0509	$e^{\frac{1}{4}(0.5)^2} = 1.0645$	0.0136

Približno i točno rješenje su dani na Slici 23..