4.5 Sustav od dviju običnih diferencijalnih jednadžbi

Prirodno je sustav

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z, y', z') &= 0, \\
G(x, y, z, y', z') &= 0
\end{aligned}
$$

od dviju običnih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda, s dvjema nepoznatim funkcijama, pokušati riješiti po sličnosti s odgovarajućim sustavom algebarskih jednadžaba, tj. pokušati ga svesti na dvije jednadžbe s po jednom nepoznanicom. Kao ishod takvoga postupka mogu se dobiti, ovisno o danom sustavu, diferencijalne jednadžbe prvoga ili drugoga reda.

Primjer Promatrajmo sustav

$$
\begin{aligned}
y' &= x + z, \\
z' &= -x + y.
\end{aligned}
$$

Deriviranjem prve jednadžbe i uvrštenjem z' u drugu dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugoga reda

$$y'' - y' = -x + 1$$

Njezino rješenje je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x - 1.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo traženi $z = g(x)$

$$y' = x + z \Rightarrow \left(C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x - 1\right)' = x + z \quad \Rightarrow$$

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 1 - x$$

Tražimo li, nadalje, neko posebno rješenje, primjerice ono što udovoljava početnomu uvjetu

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 1,$$

dobivamo linearni sustav

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 - 1, \\ 1 &= C_1 - C_2 + 1, \end{aligned}$$

rješenje kojega je $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, pa je traženo posebno rješenje

$$y = x - 1 + e^x + e^{-x} \quad z = -x + 1 + e^x - e^{-x}.$$

5. Numeričko (približno) rješevanje diferencijalnih jednadžbi

Primjer Treba naći numeričku aproksimaciju rješenja diferencijalne jednadžbe, s početnim uvjetom,

$$y' = x + y, \quad x_0 = 0, y_0 = 1.$$

na segmentu $[0, 1]$.

Točno rješenje je $f(x) = 2e^x - x - 1$.

Postupak:

- Razdijelimo $[0, 1]$ na dva jednaka dijela točkom $x_1 = 0.5$;

- Početni uvjet daje

  $$y'(0) = G(0, 1) = 0 + 1 = 1.$$

  To znači da je

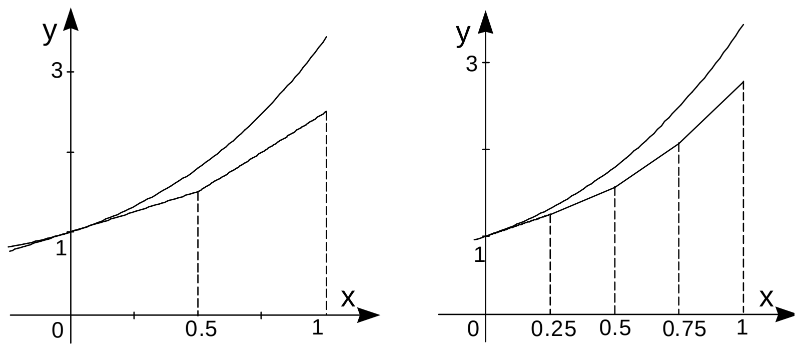
  $$y - y_0 = y'(0)(x - x_0) \implies y - 1 = 1(x - 0)$$

  $$\implies y = x + 1$$

  tangenta krivulje $y = 2e^x - x - 1$ u točki $T_0(0, 1)$. Za prvu aproksimaciju točnog rješenja možemo uzeti linearnu aproksimaciju

$$L_0(x) = x + 1,$$

tj. graf točnog rješenja $f(x) = 2e^x - x - 1$ aproksimiramo dijelom tangente u točki $T_0(0, 1)$ na taj graf za $x \in [0, 0.5]$.



Slika 1.

- Pomaknimo se od točke $x_0 = 0$ udesno u točku $x_1 = 0.5$, tj. udesno za $h = 0.5$. U toj točki $x_1 = 0.5$ linearna aproksimacija daje

$$L_0(x_1) = 0.5 + 1 = 1.5$$

i vrijednost točnog riješenja $f(x_1)$ aproksimirajmo sa

$$y_1 = L_0(x_1) = 1.5.$$

Diferencijalna jednadžba $y' = x + y$ za vrijednosti (x_1, y_1) daje

$$y'(x_1) = G(x_1, y_1) = 0.5 + 1.5 = 2.$$

Za aproksimaciju traženog rješenja (za $x \in [0.5, 1]$) uzmimo linearnu funkciju

$$L_1(x) = y_1 + y'(x_1)(x - x_1) = 2x + 0.5,$$

tj. graf točnog rješenja na segmentu $[0.5, 1]$ aproksimiramo dijelom pravca $y = 2x + 0.5$ koji prolazi točkom $T_1(0.5, 1.5)$.

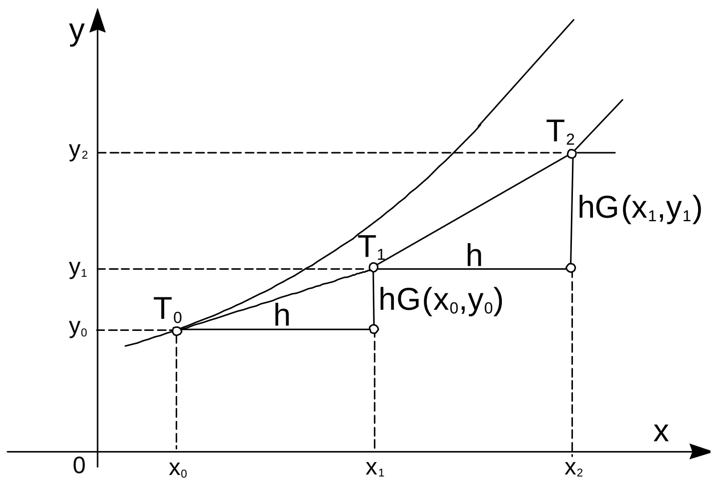
- Dobivena poligonalna crta je aproksimacija grafa točnog rješenja na segmentu $[0, 1]$. U izračunu ove aproksimacije uzeli smo korak $h = 0.5$.
- Podjelimo li segment $[0, 1]$ na četiri jednaka dijela, tj. uzmemo li za korak $h = 0.25$, imamo poligonalnu crtu koja bolje aproksimira graf točnog rješenja.

Formalizirajmo ovaj postupak poznat pod imenom **Eulerova metoda**: za diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetom

$$y' = G(x, y), x = x_0, y = y_0,$$

aproksimacija točnog rješenja na segmentu $[x_0, b]$ s korakom h je poligonalna crta određena sa točkama (postupak je vidljiv na Slici 2.):

x_0	y_0
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + hG(x_0, y_0)$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + hG(x_1, y_1)$
$\cdots$	$\cdots$
$x_n = x_{n-1} + h$	$y_n = y_{n-1} + hG(x_{n-1}, y_{n-1})$



Slika 2.

Jasno je da će poligonalna crta bolje aproksimirati točno rješenje ukoliko je korak h manji. Uočimo isto tako da, što se više udaljavamo od točke x_0, to je aproksimacija lošija.

3. FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

3.1 Koordinatni sustavi u ravnini i prostoru

Ravninski koordinatni sustavi

- Zadamo li u ravnini Π pravokutni (Kartezijev) koordinatni sustav $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \equiv (O; x, y)$:

$$T \in \Pi \longleftrightarrow T \equiv (x, y) \quad x,\ y \in \mathbb{R};$$

- Polarni koordinatni sustav:

▲ Neka je $p \in \Pi$ pravac i neka je na njemu zadan koordinatni sustav $(O; \overrightarrow{i}) \equiv (O; x)$;

▲ Neka je $T \in \Pi$ točka, $T \neq O$,

$$\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OT}\right),$$

(φ mjerimo u pozitivnom smjeru);

▲ Neka je $\rho = d(O, T)$ udaljenost od O do T;

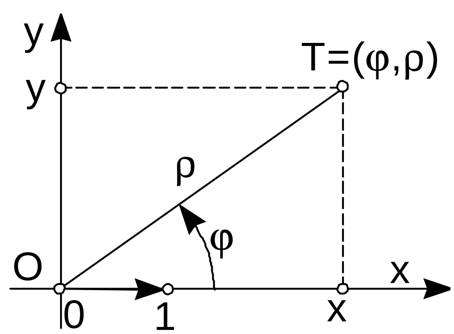
▲ $T = O \implies \varphi \stackrel{def.}{=} \measuredangle\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OO}\right) = 0;$

▲

$$T \in \Pi \longleftrightarrow T \equiv (\varphi, \rho), \quad \varphi \in [0, 2\pi)\,, \quad \rho \in [0, \infty)\,;$$

▲ Točku $O = (0,0)$ nazivamo ishodištem (ili polom), a zraku određenu s O i $\overrightarrow{i}$ - polarnom osi polarnoga koordinatnog sustava pod oznakom $(O; \varphi, \rho)$

- **Veza:** Zadamo li u ravnini Π i pravokutni koordinatni sustav $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \equiv (O; x, y)$ tako da se pozitivna x- os podudara s polarnom osi



onda je veza između Kartezijevih (x, y) i polarnih koordinata (φ, ρ) bilo koje točke $T \in \Pi$:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Pri određivanju φ iz $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x}$ treba voditi računa o predznaku x, y.

Prostorni koordinatni sustavi

- Zadamo li u prostoru E pravokutni (Kartezijev) koordinatni sustav $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \vec{k}) \equiv (O; x, y, z)$:

$$T \in E \longleftrightarrow T \equiv (x, y, z) \quad x,\ y\ , z \in \mathbb{R};$$

- Cilindrični koordinatni sustav:

  ▲ Neka je $\Pi \in E$ ravnina i neka je na njoj zadan polarni sustav $(O; \varphi, \rho)$;

  ▲ Neka je q pravac koji prolazi točkom O okomit na ravninu Π i neka je na q dan koordinatni sustav $(O; \overrightarrow{k}) \equiv (O; z)$ (q pravac - z-os);

  ▲ Time je u prostoru definiran cilindrični koordinatni sustav $(O; \varphi, \rho, z)$;

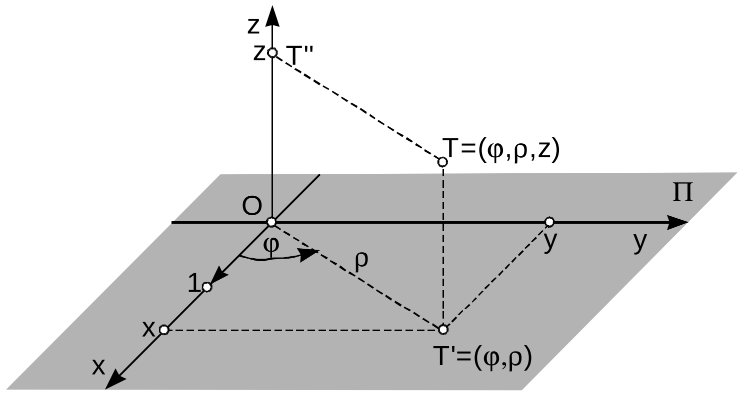
  ▲

$$T \in E \longleftrightarrow T \equiv (\varphi, \rho, z),$$

$$\varphi \in [0, 2\pi)\,,\ \rho \in [0, \infty)\,,\ z \in \mathbb{R},$$

gdje su φ i ρ polarne koordinate, u sustavu

$(O;\varphi,\rho)$, okomite projekcije T' točke T na ravninu Π, a z je koordinata, u sustavu $(O;z)$, okomite projekcije T'' točke T na pravac q.



- **Veza pravokutnih i cilindričnih koordinata :**

$$T \equiv (\varphi,\rho,z) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right\} \longrightarrow T \equiv (x,y,z)$$

$$T \equiv (x,y,z) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\,\varphi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{array} \right\} \longrightarrow T \equiv (\varphi,\rho,z)$$

• <u>Koordinatne ravnine</u>

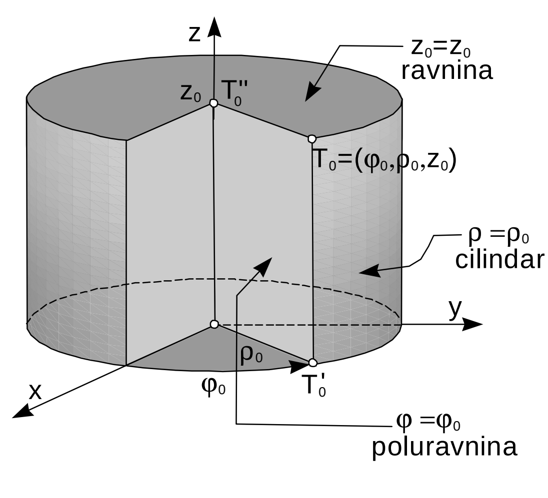
▲ U Kartezijevom koordinatnom sustavu $(O; x, y, z)$ se točka $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dobiva kao presjek koordinatnih ravnina $x = x_0$, $y = y_0$ i $z = z_0$.

▲ U cilindričnom koordinatnom sustavu (O, φ, ρ, z) točka $T_0 = (\varphi_0, \rho_0, z_0)$ dobiva se kao presjek "koordinatnih ravina":

$*$ $\varphi = \varphi_0$ (poluravnina određena sa z-osi i točkom T_0),

$*$ $\rho = \rho_0$ (to je cilindar, tj. sve točke u prostoru za koje je udaljenost od z- osi jednaka ρ_0),

$*$ $z = z_0$ (ravnina)



• **<u>Sferni koordinatni sustav</u>**:

▲ Neka je $\Pi \in E$ ravnina i neka je na njoj zadan polarni sustav $(O; \varphi, \rho)$;

▲ Neka je q pravac koji prolazi točkom O okomit na ravninu Π i neka je na q dan koordinatni sustav $(O; \overrightarrow{k}) \equiv (O; z)$;

▲ Neka je T' okomita projekciju na ravninu Π točke $T \in E$, $T \neq O$;

▲ Neka je:
$* \; r = d(O, T) > 0$;

$* \; \vartheta \in [0, \pi]$ - kut između radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{k}$;

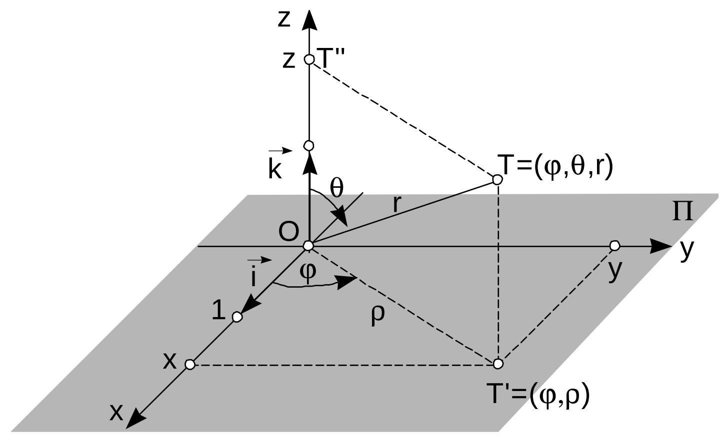
$* \; \varphi \in [0, 2\pi)$ - kut između $\overrightarrow{i}$ i radijus-vektora $\overrightarrow{OT'}$.

▲ Time je u prostoru definiran <u>sferni koordinatni sustav</u> $(O; \varphi, \vartheta, r)$;

▲

$$T \in E \longleftrightarrow T \equiv (\varphi, \vartheta, r),$$

$$\varphi \in [0, 2\pi)\,,\ \vartheta \in [0, \pi],\ r \in [0, \infty)\,.$$



Ako je T na pozitivnoj zraci z-osi onda su joj sferne koordinate $(0,0,r)$, a na negativnoj - $(0,\pi,r)$. Ishodištu O se pridijeljuju sferne koordinate $(0,0,0)$).

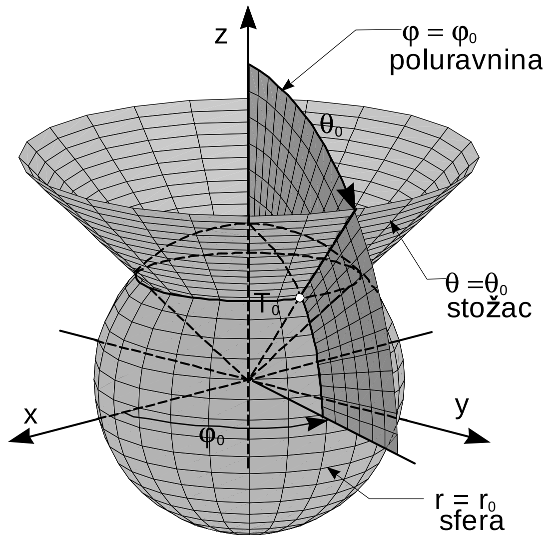
- <u>Koordinatne ravnine</u>

▲ U sfernom koordinatnom sustavu (O,φ,ϑ,r) točka $T_0(\varphi_0,\vartheta_0,r_0)$ dobiva se kao presjek "koordinatnih ravina":

$*$ $\varphi=\varphi_0$ (poluravnina određena sa z-osi i točkom T_0),

$*$ $\vartheta=\vartheta_0$ - stožac s vrhom u ishodištu O,

$*$ $r=r_0$ - sfera sa središtem u ishodištu O i radijusa r_0.



- **Veza pravokutnih i sfernih koordinata :**

Zadamo li u prostoru pravokutni koordinatni sustav $(O; x, y, z)$ i sferni sustav $(O; \varphi, \vartheta, r)$ tako da se pozitivna x -os podudara s polarnom osi, te da im se podudaraju z-osi, možemo odrediti veze između pravokutnih (x, y, z) i sfernih (φ, ϑ, r) koordinata bilo koje točke T:

$$T \equiv (\varphi, \vartheta, r) \longrightarrow \begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\vartheta \\ y = r \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = r \cos\vartheta \end{cases} \longrightarrow T \equiv (x, y, z);$$

$$T \equiv (x,y,z) \longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \vartheta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow T \equiv (\varphi, \vartheta, r).$$

Pri određivanju kuta φ iz $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ treba voditi računa o predznaku tih koordinata.

Primjer Točka $T_1 = \left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu ima u sfernom koordinatnom sustavu prikaz

$$T_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 4\right)$$

jer je

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2\sqrt{3}}{0} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\vartheta_1 = \arccos \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = \sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4.$$

3.2 Neke plohe

Ravnina u prostoru

Ponoviti - sami:

- vektorska jednadžbe ravnine Π

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0;$$

- jednadžba ravnine Π kroz tri točke

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

- jednadžba ravnine Π jednom točkom $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

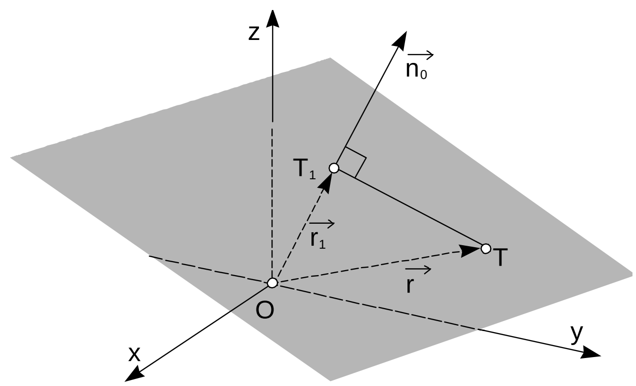
- opći oblik jednadžbe ravnine Π :

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

ili (vektorski):

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r} + D = 0.$$

gdje je $\overrightarrow{n} = \{A, B, C\}$ normala te ravnine, a $T_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \Pi$ i $T = (x, y, z) \in \Pi$, tj. $\overrightarrow{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ i $\overrightarrow{r} = \{x, y, z\}$



- segmentni oblik jednadžbe ravnine Π

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Plohe drugog reda

Neka je u prostoru zadan pravokutni koordinatni sustav $(O;x,y,z)$. Pod **plohom drugoga reda** (ili **kvadrikom**) podrazumijevamo skup svih točaka $T=(x,y,z)$ u prostoru čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu drugoga stupnja

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+$$

$$+Gx+Hy+Jz+K=0,$$

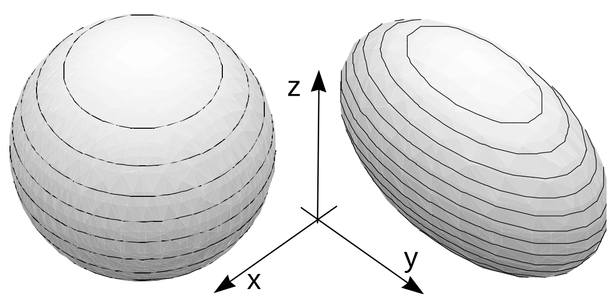
s realnim koeficijentima A, B, C, D, E, F, G, H, J i K, pod uvjetom da je barem jedan od A, B, C, D, E ili F različit od nule. Posebno će nas zanimati samo neke kvadrike.

- Jednadžba

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

predstavlja **kuglinu plohu** (ili **sferu**) sa **središtem** $S = (x_0, y_0, z_0)$ i **polumjerom** (ili **radijusom**) $R > 0$.

  – Neprazni presjek ove plohe ravninom paralelnom s koordinatnom ravninom jest ili kružnica ili točka, što povlači da se kružnica u prostoru može zadati i kao presjek sfere i ravnine.



Sl. 1.

- Za dane realne ne nul-konstante a, b i c, jednadžba

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

određuje plohu koju nazivamo **elipsoidom**. Njegove su osi usporedne s koordinatnim osima, a duljine su im redom $2|a|$, $2|b|$ i $2|c|$.

– Neprazni elipsoidovi presjeci ravninama uspored-nim s koordinatnim osima jesu ili kružnice ili elipse ili točke. Primijetimo da u slučaju $a = b = c$ elipsoid postaje sferom.

• Nadalje, jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

opisuje **jednokrilni eliptični hiperboloid** (Sl 2. (a)).

– Njegovi neprazni presjeci ravninama usporednima sa z-osi jesu ili hiperbole ili točke, dok su mu presjeci ravninama usporednim s xy-ravninom elipse.

– Cikličkim zamjenama

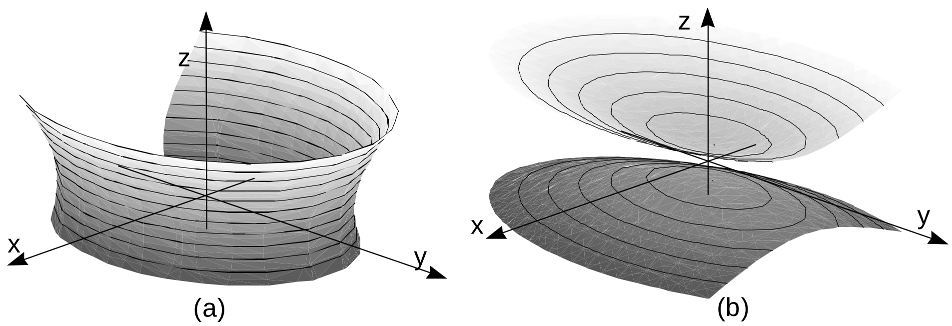
$$x \rightsquigarrow y,\ y \rightsquigarrow z,\ z \rightsquigarrow x \ \text{ i } \ a \rightsquigarrow b,\ b \rightsquigarrow c,\ c \rightsquigarrow a$$

dobivamo jednadžbu "iste" plohe u drugom položaju (y-os je "povlaštena"):

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a još jednom takvom zamjenom dobivamo jednadžbu ("povlaštena" je x-os):

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



Sl. 2.

- Jednadžba

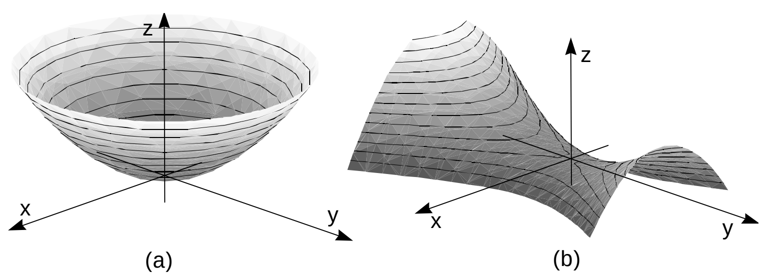
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

opisuje **dvokrilni eliptični hiperboloid (**Sl 2. (b)).

– Njegov neprazni presjek ravninom usporednom sa z-osi jest hiperbola, dok mu je neprazni presjek ravninom usporednom s xy-ravninom ili elipsa ili točka.

– Ciklički izmijenjujući koordinate (varijable) x, y, z, kao i pripadne konstante a, b, c, dobivamo jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima:

$$-\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$



Sl. 3.

- Jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

opisuje plohu koju nazivamo **eliptičnim paraboloidom (**Sl 3. (a)). Faktor 2 u monomu $2z$ nije bitan, ali je tehnički (algebarski) pogodan.

– Karakteristični presjeci ove plohe prikladnim ravninama koje su paralelne koordinatnim ravninama jesu elipse ili parabole.

– Odgovarajućim cikličkim izmjenama dobivamo još dvije jednadžbe "iste" plohe u različitim položajima.

- Jednadžba

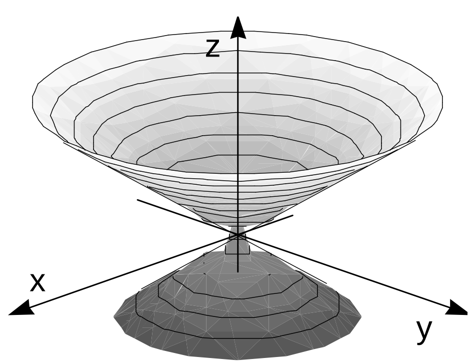
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z$$

određuje **hiperbolični paraboloid (**Sl 3.(b)). Analogni komentari (o cikličkim zamjenama) vrijede i za ove plohe.

- Jednadžba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

opisuje **stožastu** (ili **konusnu**) **plohu (**Sl 4.). Opet su moguće još dvije (cikličke) varijante.



Sl. 4.

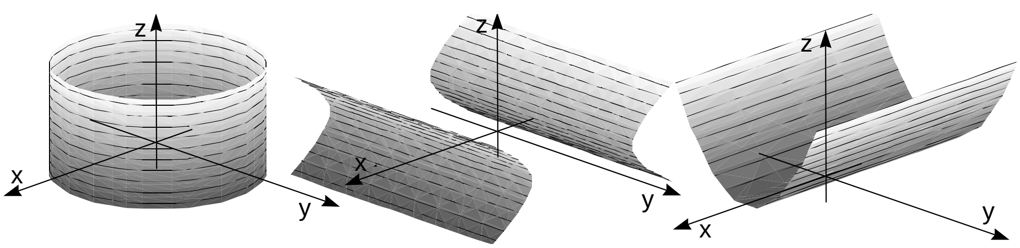
Nadalje, jednadžbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z = 2ay^2$$

opisuju redom **eliptične**, **hiperbolične** i **parabolične valjčaste** (ili **cilindrične**) **plohe (**Sl 5.). Dakako da su i u ovim jednadžbama moguće prije spominjane cikličke izmjene. Ove valjčaste plohe su samo vrlo posebni primjeri (opće) valjčaste plohe



Sl. 5.

Definicija Neka je u ravnini Π dana krivulja $\mathcal{K}$, te neka je p pravac koji probada Π. Promatrajmo skup svih pravaca u prostoru koji sijeku krivulju $\mathcal{K}$ i usporedni su s pravcem p. Tretirajući svaki pravac točkovnim skupom, pripadnu *(*točkovnu*)* uniju nazivamo **valjčastom** *(*ili **cilindričnom***)* **plohom**. Pritom govorimo da je pravac p **izvodnica** *(*ili **generatrisa***)*, a krivlja $\mathcal{K}$ **ravnalica** *(*ili **direktrisa***)* te valjčaste plohe.

Primjerice, eliptičnoj valjčastoj plohi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

jedna izvodnica jest z-os, a ravnalica joj je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

Primijetimo da je svaka ravnina (trivijalna) valjčasta ploha (za krivulju $\mathcal{K}$ treba uzeti odgovarajući pravac k).

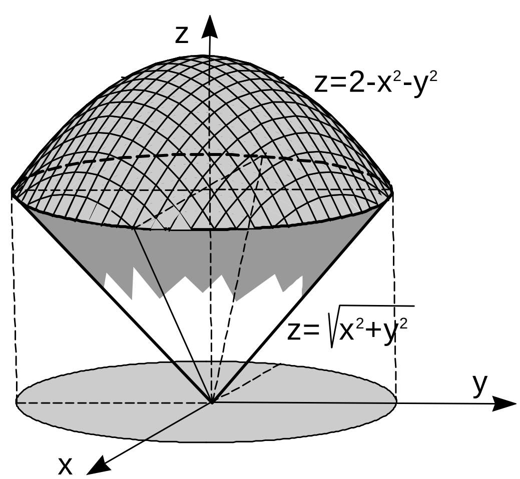
Napomenimo i to da se prostorna krivulja često zadaju presjekom dviju ploha.

Primjer Skicirati tijelo V omeđeno plohama

$$z-2=-x^2-y^2, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$$

i opisati ga u pravokutnom i cilindričnom koordinatnom sustavu.

Tijelo V određeno je plohama $z-2=-x^2-y^2$ (paraboloid) i $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (stožasta ploha).



Odredimo projekciju V_{xy} tijela V na xy-ravninu:

- Odredimo projekciju krivulje koja se nalazi u presjeku promatranih ploha. Eliminacijom izraza $x^2 + y^2$ iz $z - 2 = -x^2 - y^2$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dobivamo

$$z^2 + z - 2 = 0 \implies z_1 = 1,\ z_2 = -2.$$

- Dakle, mora biti $z = 1$, pa je $x^2 + y^2 = 1$. Drugim riječima, presječna krivulja je kružnica

$$x^2 + y^2 = 1,\ z = 1,$$

  i projekcija presječne krivulje na xy-ravninu je kružnica $x^2 + y^2 = 1$.

- Tražena projekcija V_{xy} je krug

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

- Ukoliko točka $T = (x, y, z)$ pripada tijelu V, tada njena projekcija $T' = (x, y, 0)$ na xy-ravninu mora pripadati krugu D, a to znači da za njezine koordinate vrijedi $-1 \leq x \leq 1$ i $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

- Konačno, za z- koordinatu točke $T = (x, y, z) \in V$ vrijedi $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$ (točka T leži iznad stožaste plohe) i $z \leq 2 - x^2 - y^2$ (točka T leži ispod plohe paraboloida). Dakle,

$$V = \Big\{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\Big\}.$$

- U cilindričnom koordinatnom sustavu koordinate projekcije $T' = (\varphi, r, 0)$ točke $T = (\varphi, r, z) \in V$ mora ležati u krugu D, dakle za njezine koordinate vrijedi $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$. Uvjet za z-kordinatu $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ prelazi u $\rho \leq z \leq 2 - \rho^2$. Dakle,

$$V = \Big\{(\varphi, \rho, z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho \leq z \leq 2 - \rho^2\Big\}.$$