4. Neke obične diferencijalne jednadžbe drugog reda

Općenito, diferencijalnu jednadžbu

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

svodimo zamjenom $y' = p$ na sustav

$$F(x, y, p, p') = 0,\ y' = p.$$

4.1 Diferencijalna jednadžba $F(x, y', y'') = 0$

Ako se u polaznoj diferencijalnoj jednadžbi ne pojavljuje eksplicitno y, tj. ako jednadžba dopušta zapis

$$F(x, y', y'') = 0,$$

onda zamjenom

$$y' = p,\ y'' = p'$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu prvoga reda

$$F(x, p, p') = 0.$$

Odredimo li njezino rješenje $p \equiv g(x)$, integriranjem dobivamo traženo rješenje

$$y = \int g(x)dx.$$

Primjer Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y''\left(e^x+1\right)+y'=0.$$

Zamjenom $y'=p(x)$, $y''=p'$ dobivamo jednadžbu

$$p'\left(e^x+1\right)+p=0.$$

To je jednadžba koja dopušta odijeljivanje varijabla

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{e^x+1}.$$

Slijedi

$$\ln|p|=\ln\left|C_1\frac{e^x+1}{e^x}\right|$$

i dalje

$$y'=C_1\frac{e^x+1}{e^x},$$

pa je opće rješenje

$$y=C_1\left(x-e^{-x}\right)+C_2.$$

4.2 Diferencijalna jednadžba $F(y, y', y'') = 0$

Ako se u diferencijalnoj jednadžbi $F(x, y, y', y'') = 0$ ne pojavljuje eksplicitno x kao parametar, tj. ako ta jednadžba dopušta zapis

$$F(y, y', y'') = 0,$$

onda pomaže zamjena:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{\frac{dy}{p}} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Primjer Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y''y - (y')^2 = 0,$$

te odredimo posebno rješenje što udovoljava početnomu uvjetu:

a) $x = 0, y = 0, y' = 0$;

b) $x = 1, y = 0, y' = 1$;

c) $x = 1, y = 1, y' = 1$;

d) $x = 1, y = 1, y' = 2$.

Zamjena $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ u ovomu primjeru povlači

$$\frac{dp}{dy} py - p^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad p\left(\frac{dp}{dy} y - p\right) = 0.$$

Dakle, mora biti

$$p = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{dp}{dy} y - p = 0.$$

Ako je $p = 0 = y'$ onda je

$$y = C$$

Ako je $\frac{dp}{dy} y - p = 0, \quad$ tj. $\quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, onda je $y' = p = C_1 y$, pa je $\frac{dy}{y} = C_1 dx$. Slijedi,

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Primijetimo da je prvi slučaj obuhvaćen drugim ($C_1 = 0$, $C_2 \equiv C$).

Nađimo sada tražena posebna rješenja.

(a) Početni uvjet $x = 0, y = 0, y' = 0$, uvršten u

$$y = C_2 e^{C_1 x} \quad \text{i} \quad y' = C_1 y,$$

povlači

$$0 = C_2 \ \text{ i } \ 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

(b) Početni uvjet $x = 1, y = 0, y' = 1$ povlači

$$0 = C_2 e^{C_1} \ \text{ i } \ 1 = 0,$$

što je protuslovlje. Dakle, da ne postoji posebno rješenje koje bi udovoljilo tomu početnom uvjetu.

(c) Početni uvjet $x = 1, y = 1, y' = 1$ povlači

$$1 = C_2 e^{C_1} \quad \text{i} \ \ 1 = C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 1,\ C_2 = e^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{x-1}.$$

(d) Slično, početni uvjet $x = 1, y = 1, y' = 2$ povlači

$$1 = C_2 e^{C_1} \quad \text{i} \ \ 2 = C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 2,\ C_2 = e^{-2}$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{2x-2}$$

4.3 Homogena diferencijalna jednadžba

Ako je funkcija

$$(x, y, y', y'') \mapsto F(x, y, y', y'')$$

homogena po varijablama y, y', y'', tj. ako je

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^{\alpha} F(x, y, y', y''),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

(i pritom α nazivamo stupanj homogenosti od F), onda diferencijalnu jednadžbu

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

zamjenom

$$y = e^{\int z dx},\ z = g(x),$$

svodimo na diferencijalnu jednadžbu prvoga reda

$$F\left(x, e^{\int z dx}, z \cdot e^{\int z dx}, (z^2 + z') \cdot e^{\int z dx}\right) = 0,$$

tj.

$$\left(e^{\int z dx}\right)^{\alpha} F(x, 1, z, z^2 + z') = 0,$$

odnosno,

$$F(x, 1, z, z^2 + z') = 0.$$

Običnu diferencijalnu jednadžbu drugoga reda s opisanim svojstvom nazivamo **homogenom** po varijablama y, y', y''.

Primjer Diferencijalna jednadžba

$$xy^2 + yy'' - (y')^2 = 0$$

je homogena ($\alpha = 2$) jer je

$$x(ty)^2 + (ty)(ty'') - (ty')^2 = t^2(xy^2 + yy'' - (y')^2).$$

Zamjena $y = e^{\int zdx}$, $z \equiv g(x)$, vodi do jednadžbe

$$x + z' + z^2 - z^2 = 0,$$

tj.

$$x + z' = 0.$$

Slijedi,

$$z = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

pa je

$$\int zdx = -\frac{x^3}{3} + C_1x + K_2,$$

a opće rješenje polazne jednadžbe jest

$$y = e^{-\frac{x^3}{3} + C_1x + K_2} = C_2e^{-\frac{x^3}{3} + C_1x}.$$

4.4 Linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima

Ako diferencijalna jednadžba drugoga reda dopušta zapis

$$y'' + ay' + by = g(x), \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

govorimo o **linearnoj diferencijalnoj jednadžbi** drugoga reda **s konstantnim koeficijentima**. U slučaju $g \equiv 0$ dobivamo

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

što je pripadna joj **homogena** (ili "**nepotpuna**") jednadžba.

Može se dokazati da promatrana linearna diferencijalna jednadžba ima točno jedno rješenje uz dani početni uvjet $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = \overline{y}_0$ čim je funkcija g neprekidna.

Teorem 1 Ako su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ dva rješenja linearne homogene jednadžbe (2), onda je i

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

rješenje te jednadžbe.

Dokaz: Izravnom provjerom.

Definicija Reći ćemo da su dva rješenja $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ linearne homogene jednadžbe (2) **linearno nezavisna**, ako iz

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 = 0$$

(nul-funkcija) $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, slijedi $C_1 = C_2 = 0$.

Kriterij linearne (ne)zavisnosti dan je pomoću tzv. **Wronskijana** (determinante Wronskog).

Teorem 2 Ako su funkcije $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ linearno zavisne tada je Wronskijan

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0, \text{ za svaki } x.$$

<u>Dokaz: </u>

Teorem 3 Ako su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ linearno nezavisna rješenja linearne homogene jednadžbe (2) onda je

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ za svaki } x.$$

<u>Dokaz: </u>

Teorem 4 Ako su $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ dva linearno nezavisna rješenja linearne homogene jednadžbe (2), onda je

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

njezino opće rješenje.

Dokaz:

Dopustimo da rješenje homogene linearne jednadžbe (2) bude i *kompleksna funkcija* (realne varijable), tj. funkcija

$$f : A \to \mathbb{C},\ \ A \subseteq \mathbb{R},\ \ f(x) = u(x) + iv(x),\ \ i = \sqrt{-1},$$

pri čemu su u i v realne funkcije.

Derivacijom funkcije f smatramo funkciju

$$x \mapsto f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

(kad god su funkcije u i v derivabilne). Jednostavno je provjeriti da Teorem 1. i Teorem 3. vrijede i za ovakva dva kompleksna rješenja s konstantama $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

O postojanju posebnog rješenja homogene linearne jednadžbe (2) govori sljedeći teorem.

Teorem 5 Postoji broj r, realan ili kompleksan, takav da je

$$y = e^{rx}$$

posebno rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (2).

Dokaz:

Formalnim uvrštenjem

$$y = e^{rx},\ y' = re^{rx} \text{ i } y'' = r^2 e^{rx}$$

u jednadžbu (2) dobivamo

$$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0,$$

tj.

$$r^2 + ar + b = 0,$$

što je tzv. **karakteristična jednadžba** diferencijalne jednadžbe (2). Budući da svaka kvadratna jednadžba ima rješenje u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, a u ovomu slučaju dobivamo

$$r_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

to su $y_1 = e^{r_1 x}$ i $y_2 = e^{r_2 x}$ posebna rješenja diferencijalne jednadžbe (2).

- Štoviše, ako je pritom $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ onda je

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0,$$

  pa su pripadna posebna rješenja linearno nezavisna. Po Teoremu 3.,

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

  je opće rješenje diferencijalne jednadžbe (2).

- Ako je, pak, $r_1 = r_2$ onda se radi o samo jednom posebnom rješenju (Teorem 6).

- Slučaju konjugirano-kompleksnih rješenja $r_{1,2} \in \mathbb{C}$ (kasnije).

Teorem 6 Ako karakteristična jednadžba homogene linearne diferencijalne jednadžbe (2) ima samo jedno rješenje, tj. ako je $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2} \equiv r \in \mathbb{R}$, onda je, pored $y = e^{rx}$, posebno rješenje i

$$y = xe^{rx}.$$

Štoviše, budući da su funkcije $x \mapsto e^{rx}$ i $x \mapsto xe^{rx}$ linearno nezavisne, onda je

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

opće rješenje diferencijalne jednadžbe (2).

<u>Dokaz:</u>

U slučaju konjugirano-kompleksnog rješenja karakteristične jednadžbe, tj.

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0,$$

opće rješenje $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ (skup kompleksnih funkcija) homogene linearne diferencijalne jednadžbe (2) zapisujemo ovako:

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta x i} + C_2 e^{-\beta x i}) =$$

$$e^{\alpha x}(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x))) =$$

$$e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x) =$$

$$e^{\alpha x}(K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x),$$

pri čemu je $K_1 \equiv C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$, $K_2 \equiv i(C_1 - C_2) \in i\mathbb{R}$.

Osim toga, lako se provjeri da su funkcije

$$x \mapsto e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ e^{\alpha x}\sin\beta x$$

linearno nezavisne (nad $\mathbb{C}$) čim je $\beta \neq 0$.

Zaključak: Opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = 0,$$

jest skup svih funkcija što dopuštaju ovaj zapis ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$):

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad \text{čim je } r_{1,2} \in \mathbb{R} \text{ i } r_1 \neq r_2;$$

$$C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}, \quad \text{čim je } r_1 = r_2 \equiv r \in \mathbb{R};$$

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad \text{čim je } r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}, \beta \neq 0,$$

pri čemu su $r_{1,2}$ rješenja pripadne karakteristične jednadžbe $r^2 + ar + b = 0$.

Primjer Homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

pripada karakteristična jednadžba

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

kojoj je rješenje $r_1 = r_2 = -2$. Opće rješenje promatrane diferencijalne jednadžbe je, dakle,

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Teorem 7 Ako je dano bilo koje posebno rješenje linearne diferencijalne jednadžbe (1), onda se njezino opće rješenje dobiva pribrajanjem toga posebnog rješenja općemu rješenju pripadne joj homogene jednadžbe (2).

Dokaz:

Opće rješenje y_h homogene jednadžbe (2) uvijek znamo odrediti, to nam ostaje odrediti neko (bilo koje) partikularno rješenje y_p jednadžbe (1).

Ako je slobodan član $g(x)$ nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (1) funkcija oblika

$$g(x) = e^{\alpha x}\left[P_k(x)\cos\beta x + Q_t(x)\sin\beta x\right], \qquad (3)$$

gdje su α i β konstante, $P_k(x)$ i $Q_t(x)$ polinomi stupnja k odnosno t, tada posebno rješenje y_p možemo naći i metodom neodređenih koeficjenata. Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^l e^{\alpha x}\left[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x\right], \qquad (4)$$

gdje su $R_m(x)$ i $S_m(x)$ polinomi s (nepoznatim) koeficijentima stupnja $m = \max\{k, t\}$ i gdje je l kratnost korijena $\alpha \pm \beta i$ karakteristične jednadžbe, tj.

$$l = \begin{cases} 0, \text{ ako } \alpha \pm \beta i \text{ nije rješenje karak. jedn.} \\ 1 \leq l \leq 2, \text{ ako je } \alpha \pm \beta i \text{ rješenje karak. jedn.} \end{cases}.$$

Koeficijente polinoma $R_m(x)$ i $S_m(x)$ određujemo iz uvjeta da funkcija y_p identički zadovoljava nehomogenu jednadžbu (1). Funkcijama tipa (3) su obuhvaćeni i specijalni slučajevi dani sljedećom tablicom:

	$g(x)$	$y_p(x)$
$\alpha=\beta=0$	$P_k(x)$	$x^l R_k(x)$
$\beta=k=0$	$Ae^{\alpha x}$	$x^l C e^{\alpha x}$
$\beta=0$	$e^{\alpha x} P_k(x)$	$x^l e^{\alpha x} R_k(x)$
$\alpha=k=t=0$	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$	$x^l[C\cos\beta x + D\sin\beta x]$
$k=t=0$	$e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$	$x^l e^{\alpha x}[C\cos\beta x + D\sin\beta x]$
$\alpha=0$	$P_k(x)\cos\beta x + Q_t(x)\sin\beta x$	$x^l[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x]$

Primjer Riješimo linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima

$$y'' - y = -x + 1$$

i odredimo joj posebno rješenje što udovoljava početnimu uvjetu $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$.

Pripadna homogena jednadžba je

$$y'' - y = 0,$$

a karakteristična jednadžba je

$$r^2 - 1 = 0.$$

Rješenje $r_{1,2} = \pm 1$ povlači da su

$$y = e^x \text{ i } y = e^{-x}$$

linearno nezavisna posebna rješenja homogene jednadžbe. Tako dobivamo opće rješenje

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

te homogene jednadžbe. U polaznoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi je

$$g(x) = -x + 1 \equiv P_1(x)$$

polinom prvoga stupnja. Po tablici, jer je $l = 0$, za posebno rješenje treba uzeti polinom prvog stupnja

$$R_1(x) = Ax + B.$$

Koeficijente ćemo mu odrediti po danoj uputi:

$$(Ax+B)''-(Ax+B)=-x+1 \Rightarrow -Ax-B=-x+1.$$

Dakle, $A = 1$ i $B = -1$, pa je traženo posebno rješenje $y_p = x - 1$. Napokon, po Teoremu 7. slijedi da je

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + x - 1$$

traženo opće rješenje.

Posebno rješenje što udovoljava početnomu uvjetu $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$ dobivamo odgovarajućim uvrštenjima:

$$C_1e^0 + C_2e^{-0} + 0 - 1 = 0, \quad C_1e^0 - C_2e^{-0} + 1 = 0.$$

Slijedi, $C_1 = 0, C_2 = 1$, pa je traženo posebno rješenje

$$y = e^{-x} + x - 1.$$

Teorem 8 Ako je u diferencijalnoj jednadžbi (1)

$$g(x) = g_1(x) + \cdots + g_k(x),\ k \in \mathbb{N},$$

onda je njezino posebno rješenje zbroj od po jednog posebnog rješenja svake pripadne jednadžabe

$$y'' + ay' + by = g_j(x), \quad j = 1, \cdots, k.$$

Primjer Riješimo linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima

$$y'' + 2y' + 5y = x^2 e^{3x} + \sin 2x.$$

Pripadna karakteristična jednadžba $r^2 + 2r + 5 = 0$ ima konjugirano-kompleksno rješenje $r_{1,2} = -1 \pm 2i$ pa je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$y_h = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Budući da je

$$g(x) = x^2 e^{3x} + \sin 2x,$$

to ćemo za pronalaženje posebnog rješenja polazne jednadžbe najprije upotrijebiti Teorem 8. Promatrajmo, dakle, dvije pripadne diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= x^2 e^{3x}, \\ y'' + 2y' + 5y &= \sin 2x. \end{aligned}$$

Ostaje nam odrediti posebna rješenja. Za prvu je to

$$y_{p_1} = \left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{3x},$$

a za drugu

$$y_{p_2} = C \sin 2x + D \cos 2x.$$

Uvrštenjem (s y'_{p_i} i y''_{p_i}) u prvu, odnosno drugu jednadžbu i odgovarajučim izjednačavanjima dobivamo

$$y_{p_1} = \frac{1}{1000}\left(50x^2 - 40x + 11\right)e^{3x},$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{17}(\sin 2x - 4\cos 2x).$$

Sada je, po Teoremu 8.,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_1} = \frac{1}{1000}\left(50x^2 - 40x + 11\right)e^{3x} +$$

$$+\frac{1}{17}(\sin 2x - 4\cos 2x)$$

posebno rješenje polazne diferencijalne jednadžbe. Napokon, po Teoremu 7.,

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) +$$

$$+\frac{1}{1000}\left(50x^2 - 40x + 11\right)e^{3x} + \frac{1}{17}(\sin 2x - 4\cos 2x)$$

jest opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 2y' + 5y = x^2e^{3x} + \sin 2x.$$

Metoda varijacije konstanti

Ukoliko funkcija smetnje $g(x)$ nije oblika (3) koristimo metodu varijacije konstanata. Naime, opće rješenje y_h homogene jednadžbe (2)

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

uvijek znamo odrediti, to nam ostaje odrediti neko posebno rješenje y_p jednadžbe (1). Njega ćemo tražiti na način da u općem rješenju pripadne homogene jednadžbe $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ konstante C_1 i C_2 zamijenimo funkcijama $C_1(x)$ i $C_2(x)$. Dakle traženo rješenje je oblika

$$y_p = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2, \tag{5}$$

gdje su $C_1(x)$ i $C_2(x)$, za sada, nepoznate funkcije.

Dovoljno je odrediti jednu nepoznatu funkciju, a ne dvije, ukoliko zadamo neku vezu između tih funkcija. Deriviranjem jednadžbe (5) dobivamo

$$y' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Neka je veza među traženim funkcijama

$$C_1'(x)\, y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Imamo

$$
\begin{aligned}
y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2', \\
y'' &= C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u $y'' + ay' + by = g(x)$, dobivamo

$$
y'' + ay' + by = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' +
$$

$$
a(C_1 y_1' + C_2 y_2') + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) =
$$

$$
C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 \left(y_1'' + a y_1' + b y_1 \right) + C_2 \left(y_2'' + a y_2' + b y_2 \right) = g(x).
$$

Budući su y_1 i y_2 rješenja homogene jednadžbe, dobivamo

$$
C_1' y_1' + C_2' y_2' = g\left(x\right).
$$

Prema tomu nepoznate funkcije C_1 i C_2 zadovoljavaju sustav

$$
\begin{aligned}
C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0 \\
C_1' y_1' + C_2' y_2' &= g\left(x\right).
\end{aligned}
$$

To je linearni sustav od dvije nepoznate funkcije C_1' i C_2'. Determinanta ovog sustava je upravo

$$
W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.
$$

Budući su funkcije y_1 i y_2 dva linearno nezavisna rješenja homogene diferencijalne jednadžbe (2), onda je $W(x) \neq 0$, za svaki x, pa sustav ima jedinstveno rješenje $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$. Sada je

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx \text{ i } C_1(x) = \int C_2'(x)dx.$$

Primjer Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

Opće rješenje pripadne homogene jednadžbe je

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Pretpostavimo da je partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe oblika

$$y = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x.$$

Metodom varijacije konstante dobivamo sustav

$$\begin{aligned} C_1' \sin x + C_2' \cos x &= 0 \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x &= \frac{1}{\cos^3 x}. \end{aligned}$$

Iz tog sustava dobivamo

$$C_1' = \frac{1}{\cos^2 x},\ C_2' = \frac{-\sin x}{\cos^3 x}.$$

Integriranjem dobivamo

$$C_1(x) = \operatorname{tg} x + K_1,\ C_2(x) = \frac{-1}{2\cos^2 x} + K_2.$$

Slijedi

$$y = (\operatorname{tg} x + K_1)\sin x + \left(\frac{-1}{2\cos^2 x} + K_2\right)\cos x =$$

$$K_1 \sin x + K_2 \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{1}{2\cos x} =$$

$$K_1 \sin x + (K_2 - 1)\cos x + \frac{1}{2\cos x}.$$

$$A \sin x + B \cos x + \frac{1}{2\cos x} = y_h + y_p,$$

Dakle,

$$y = y_h + y_p = A \sin x + B \cos x + \frac{1}{2\cos x}$$

je opće rješenje dane diferencijalne jednadžbe.