## 3.3 Homogena diferencijalna jednadžba

Dopušta li obična diferencijalna jednadžba $F(x, y, y') = 0$ svođenje na oblik

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

govorimo o **homogenoj** diferencijalnoj jednadžbi prvoga reda. Uvrštenjem

$$\frac{y}{x} = z \quad (z \equiv h(x))$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu s odjeljivim varijablama:

$$(xz)' = g(z) \;\Rightarrow\; z + xz' = g(z) \;\Rightarrow\; \frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Dakle, opće rješenje smijemo zapisati u obliku

$$\int \frac{dz}{g(z) - z} = \ln|Cx|, \quad z = \frac{y}{x},\; C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Primjer** Jednadžba

$$x^2dy + (x^2 + y^2 - xy)dx = 0$$

je homogena diferencijalna jednadžba prvoga reda jer dijeljenjem s $x^2dx$ prelazi u

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1.$$

Zamjenom $y = zx$, $y' = z + z'x$, dobivamo jednadžbu

$$z'x + 1 + z^2 = 0,$$

rješenje koje je

$$\int \frac{dz}{1+z^2} \;=\; -\int \frac{dx}{x} + c, \quad \text{tj.}$$

$$arctgz \;=\; -\ln|Cx|,\; C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Budući da je $z = \frac{y}{x}$, traženo opće rješenje jest

$$y = -x\,\mathrm{tg}(\ln|Cx|), \;\; C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Promatrajmo sada diferencijalnu jednadžbu $F(x, y, y') = 0$ koja dopušta zapis

$$y' = g\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Ako je determinanta $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ onda linearni sustav

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

ima točno jedno rješenje, recimo, $(x, y) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Uvedemo li tada zamjenu

$$x = a + u,\ y = b + v,$$

dobivamo homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$v' = g\left(\frac{v}{u}\right)$$

koju rješavamo na prije opisani način.

Ako je, pak, $D = 0$ onda postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$. Tada zamjenom

$$z = a_1x + b_1y,\ z' = a_1 + b_1y'$$

svodimo polaznu jednadžbu na

$$\frac{1}{b_1}(z' - a_1) = g\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right),$$

a ova očito dopušta odijeliti varijable $z$ i $x$.

**Primjer** Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Sustav jednadžbi

$$x - y + 1 = 0,\ x + y - 3 = 0$$

ima rješenje $(x, y) = (1, 2)$ i zamjenom

$$x = 1 + u,\ y = 2 + v,$$

polazna diferencijalna jednadžba prelazi u homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$v' = \frac{1 - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}.$$

Zamjenom $v = uz$, $v' = z + uz'$ dobivamo

$$z + uz' = \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow uz' = \frac{-z^2-2z+1}{z+1} \Rightarrow$$

$$\frac{z+1}{-z^2-2z+1}dz = \frac{du}{u} \Rightarrow \int \frac{z+1}{-z^2-2z+1}dz = \ln C_1 u$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|z^2+2z-1\right| = \ln C_1 u \Rightarrow$$

$$\ln\left|z^2+2z-1\right| = \ln\left|C_1 u\right|^{-2} \Rightarrow$$

$$z^2+2z-1 = \frac{1}{C_1^2 u^2}.$$

Možemo pisati $z^2+2z-1 = Cu^{-2}$ i za opće rješenje dobivamo

$$\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 + 2\frac{y-2}{x-1} - 1 = \frac{C}{(x-1)^2}$$

odnosno

$$2xy - 6y - 2x - x^2 + y^2 = C.$$

## 3.4 Linearna diferencijalna jednadžba

Diferencijalnu jednadžbu što dopušta zapis

$$y' + p(x)y = h(x)$$

nazivamo **linearnom diferencijalnom jednadžbom** prvoga reda. Ovu vrstu jednadžaba rješavamo tako da prvo riješimo tzv. pripadnu **nepotpunu** (ili homogenu) diferencijalnu jednadžbu

$$y' + p(x)y = 0.$$

Odijeljujući varijable dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

dakle,

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx},\ C \in \mathbb{R}.$$

Nije teško dokazati da se sada tzv. **variranjem konstante** $C$ (umjesto konstante $C$ se uvrsti nepoznata funkcija $u$) dolazi do općeg rješenja polazne (potpune) jednadžbe. Naime, pretpostavimo je opće rješenje oblika

$$y = u(x) \cdot e^{-\int p(x)dx},$$

pri čemu treba odrediti (do na aditivnu konstantu) funkciju $x \mapsto u(x)$. U tu svrhu, uvrstimo taj $y$ i pripadni $y'$ u polaznu jednadžbu:

$$\underbrace{u'(x)\, e^{-\displaystyle\int p(x)dx} + u(x)\, e^{-\displaystyle\int p(x)dx} \cdot (-p(x))}_{y'} +$$

$$+p(x) \cdot \underbrace{u(x)\, e^{-\displaystyle\int p(x)dx}}_{y} = q(x)\,.$$

što daje

$$u'(x) \;=\; q(x)\, e^{\displaystyle\int p(x)dx} \quad \Longrightarrow$$

$$u(x) \;=\; \int q(x)\, e^{\displaystyle\int p(x)dx} dx + K.$$

Prema tomu, opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda jest

$$y = \left( \int h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + K \right) e^{-\int p(x)dx},\ K \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

**Primjer** Diferencijalna jednadžba

$$xy' + 2y = 6x^4$$

je ekvivalentna jednadžbi

$$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 6x^3.$$

Na upravo opisani način dobivamo:

$$y' + \frac{2}{x} \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x^2},$$

pa varirajući konstantu zaključujemo da je opće rješenje oblika

$$y = \frac{u(x)}{x^2},$$

gdje treba odrediti funkciju $x \mapsto u(x)$.

$$\left(\frac{u(x)}{x^2}\right)' + \frac{2}{x} \cdot u(x) = 6x^3 \quad \Rightarrow$$

$$u'(x) = 6x^5 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x^6 + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Prema tomu, traženo opće rješenje jest

$$y = x^4 + \frac{K}{x^2},\ K \in \mathbb{R},$$

koje se može dobiti i direktno iz formule (1).

Zadamo li neki početni uvjet, primjerice $x = 1, y = 1$, dobivamo

$$1 = 1^4 + \frac{K}{1^2} \Rightarrow K = 0,$$

pa je pripadno posebno rješenje $y = x^4$.

Pridodajmo k ovomu i diferencijalnu jednadžbu

$$y' + p(x)y = h(x)y^r, \quad r \neq 1,$$

koju nazivamo **Bernoullijevom jednadžbom.** Ona se zamjenom

$$y^{1-r} = z$$

svodi na linearnu (po $z$) diferencijalnu jednadžbu

$$z' + (1-r)p(x)z = (1-r)h(x),$$

koja se dalje rješava na opisani način.

**Primjer** Jednadžba

$$y' + 2xy = 2x^3y^3$$

zamjenom

$$y^{1-3} = y^{-2} = z, \quad \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z',$$

prelazi u linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$z' - 4xz = -4x^3,$$

kojoj je opće rješenje

$$z = \left( \int -4x^3 \cdot e^{\int -4x} dx + K \right) e^{\int 4x dx} =$$

$$\left( \frac{1}{2} e^{-2x^2} + x^2 e^{-2x^2} + K \right) e^{2x^2} = x^2 + \frac{1}{2} + K e^{2x^2}, \; K \in \mathbb{R}.$$

Dakle, polazna diferencijalna jednadžba ima opće rješenje

$$\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + K e^{2x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

## 3.5 Egzaktna diferencijalna jednadžba

Ako diferencijalna jednadžba $F(x, y, y') = 0$ dopušta zapis

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

pod uvjetom

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

tj. ako je $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ (totalni) diferencijal neke funkcije $(x, y) \mapsto z = g(x, y)$, onda govorimo o egzaktnoj diferencijalnoj jednadžbi prvoga reda.

Može se pokazati da ukoliko je $dg(x, y) = 0$ onda je funkcija $g(x, y)$ oblika

$$g(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)ds = C.$$

Uočimo da je, primjerice, svaka diferencijalna jednadžba s odijeljivim varijablama egzaktna.

**Primjer** Diferencijalna jednadžba

$$(x + y^2)dx + y(y + 2x)dy = 0$$

je egzaktna jer je

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(x + y^2)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial(y(y + 2x))}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Stoga je njezino opće rješenje

$$\int_{x_0}^{x} (t + y^2)dt + \int_{y_0}^{y} s(s + 2x_0)ds = C, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{x^2}{2} + xy^2 - \frac{x_0^2}{2} - x_0y^2 + \frac{y^3}{3} + x_0y^2 - \frac{y_0^3}{3} - x_0y_0^2 = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

što se može napisati kao ($K = 3x_0^2 + 2y_0^3 + 6x_0y_0^2 + 6C$)

$$3x^2 + 6xy^2 + 2y^3 = K.$$

Zahtijevamo li, primjerice, da je $y = 2$ čim je $x = 1$, dobivamo $K = -5$, pa je pripadno posebno rješenje

$$3x^2 + 6xy^2 + 2y^3 + 5 = 0.$$

Ako diferencijalna jednadžba

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

nije egzaktna i ako postoji funkcija $(x,y) \mapsto h(x,y) \equiv \lambda$ takva da je

$$\lambda P(x,y)dx + \lambda Q(x,y)dy = 0$$

egzaktna diferencijalna jednadžba, tada je svako rješenje (egzaktne) diferencijalne jednadžbe

$$P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy = 0, \quad P_1 = \lambda Q,\ Q_1 = \lambda Q,$$

ujedno rješenje polazne jednadžbe.

Faktor (funkciju) $\lambda$ nazivamo **integracijskim** (ili **Eulerovim**) **multiplikatorom**.

- Određivanje funkcije $\lambda$ nije uvijek jednostavno. (Općenito, treba riješiti neku parcijalnu diferencijalnu jednadžbu!)

- Ako je $\lambda$ funkcija samo jedne varijable (bilo $x$ bilo $y$) onda je njegovo određivanje relativno lako. Naime, integracijski multiplikator $\lambda$ možemo odrediti iz uvjeta

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial (\lambda Q)}{\partial x} \Rightarrow P\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} - P\frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

► Ukoliko je $\lambda = \lambda(x)$, tada je

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dx},$$

pa imamo

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

- Ukoliko je $\lambda = \lambda(y)$, tada je

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dy},$$

pa imamo

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

**Primjer** Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$y(1 + xy)dx - xdy = 0.$$

Budući je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \left(y(1 + xy)\right)}{\partial y} = 2xy + 1,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \left(-x\right)}{\partial x} = -1$$

diferencijalna jednadžba nije egzaktna.

Odredimo Eulerov multiplikator:

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy = \frac{(-1 - 2xy - 1)}{y(1 + xy)} dy = \frac{d\lambda}{\lambda} \Rightarrow$$

$$-\int \frac{2}{y} dy = \int \frac{d\lambda}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{y^2}.$$

Ostaje riješiti jednadžbu:

$$\frac{1 + xy}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_0=0}^{x} \frac{1 + ty}{y} dt + \int_{y_0=1}^{y} -\frac{x_0}{s^2} ds = C \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} = C.$$