3.4. Integral funkcijskog reda

Pod **integralom** (konvergentnog) **funkcijskog reda** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ smatramo neodređeni integral (ako postoji) pripadne sume

$$x \mapsto s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Budući da, općenito, s nije elementarna funkcija, to je izračunavanje integrala

$$\int s(x)dx \equiv \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

vrlo netrivijalni zadatak. Ipak, u posebnom slučaju jednoliko konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ neprekidnih funkcija f_n, integral funkcijskoga reda dopušta integriranje "**član po član**".

Teorem 4.1 *Neka su $f_n : [a,b] \to R$ preslikavanja, $n \in \mathbb{N}$, i neka funkcijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jednoliko konvergira prema funkciji*

$$s : [a,b] \to \mathbb{R},\ s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

onda s dopušta primitivnu funkciju na $[a,b]$ i ona se može dobiti integriranjem "član po član", tj.

$$\int s(x)dx \equiv \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx + C.$$

Posebice, za potencijski red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na njegovu konvergencijskom intervalu vrijedi

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Integriranjem funkcijskih, posebice potencijskih, redova mogu se izračunati mnogi elementarno nerješivi integrali.

Primjer 1 Izračunajmo neodređeni integral funkcije

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2}.$$

Budući da je

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R},$$

vrijedi

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Prema tomu,

$$\int e^{-x^2}dx=\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)dx\stackrel{\text{T 4.1.}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}dx=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+C.$$

Primjer 2 Izračunajmo neodređeni integral funkcije

$$g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Vrijedi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa je

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Uočimo da funkcijski red na desnoj strani konvergira i u točki $x = 0$ i to prema broju 1. Budući da je i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, to funkcijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

konvergira prema (neprekidnoj) funkciji

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Funkcije f i g imaju istu primitivnu funkciju na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Slijedi,

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int f(x) dx = \int g(x) dx =$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx \overset{\text{T } 4.1.}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + C.$$

Primjer 3 Razvijmo u potencijski red (ne rabeći Maclaurinovu formulu) funkciju

$$\arctan|_{[-1,1]} : [-1, 1] \to \mathbb{R}.$$

Prisjetimo se, prvo, sume geometrijskoga reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \equiv 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, \ |x| < 1.$$

Drugo, derivacija $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pa je

$$(\arctan x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Prema tomu,

$$\arctan x = \int (\arctan x)' \, dx + C = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx + C$$

$$\overset{\text{T 4.1.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Budući da je $\arctan 0 = 0$, to je $C = 0$. Osim toga, primijetimo da funkcijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

konvergira i u točkama $x = -1$ i $x = 1$. Postavlja se pitanje, konvergira li on u tim točkama, redom, prema funkcijskim vrijednostima $\arctan(-1)$ ($= -\frac{\pi}{4}$) i $\arctan 1$ ($= \frac{\pi}{4}$) ili prema nekim drugim točkama (?). Pokazuje da vrijedi

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

2. ODREĐENI INTEGRAL

- Pojam određenog integrala je, povijesno, tijesno povezan s problemom izračunavanje površine "krivocrtnog" ravninskog lika.

- Određeni integral (ali ne i njegov naziv) davno prethodi pojmu neodređenog integrala. Temeljnu ideju (na konkretnim primjerima) je dao starogrčkogi genij Arhimed.

- Naziv je došao mnogo poslije, kad se shvatila duboka povezanost tih dvaju pojmova (vezu dali - I. Newton i G.W. Leibniz), iako na prvi pogled, po definicijama, ta dva pojma nemaju "ništa" zajedničko.

1. Pojam i svojstva određenog integrala

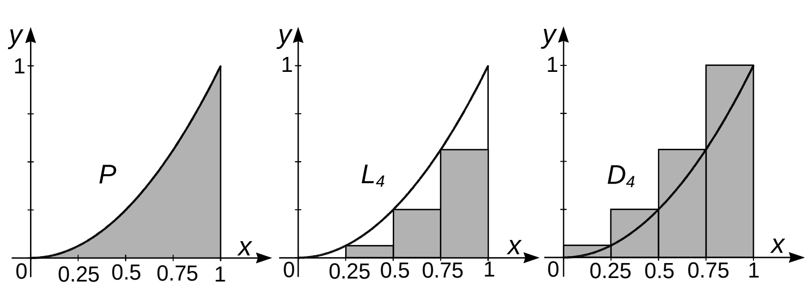
Problem površine.

Zadatak: Izračunati površinu P ravninskog lika koji je omeđen grafom funkcije $f : [0,1] \to R$, $f(x) = x^2$ i pravcima $y = 0$, $x = 1$.

- Podijelimo segment $[0,1]$ na četiri jednaka dijela duljine.
- Izračunajmo površine L_4 i D_4 koje su zbroj površina pravokutnika, tako da svaki pravokutnik ima bazu duljine $\frac{1}{4}$ i visinu vrijednost funkcije f u lijevom, odnosno, desnom rubu baze. Imamo:

$$L_4 = \frac{1}{4}(0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.218\,75,$$

$$D_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{15}{32} = 0.468\,75.$$



Za traženu površinu vrijedi

$$L_4 < P < D_4.$$

Podijelimo li segment $[0, 1]$ na više jednakih dijelova dobit ćemo bolju aproksimaciju. Za L_n i D_n za $n = 10, 20, 100, 1000$ imamo

n	L_n	D_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328350	0.3338335

Dakle, smijemo zaključiti da za traženu površinu P vrijedi:

$$L_n < L_{n'} < P < D_{n'} < D_n, \; n < n'.$$

Izračunajmo sada L_n i D_n i potražimo čemu teže kada $n \to \infty$:

[1]

$$
\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Prirodno je sada staviti da je tražena površina $P = \frac{1}{3}$.

Formalizirajmo sada prethodni postupak kada je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilo koja (pozitivna) funkcija:

$$P = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\triangle x,$$

$$P = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x.$$

---

1 Koristimo činjenicu da vrijedi: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$.

U prethodnim sumama je baza svakog pravokutnika

$$\triangle x = \frac{b-a}{n},$$

a za visinu je uzeta funkcijska vrijednost na lijevom (u L_n - **lijeva integralna** n**-suma**) odnosno desnom kraju (u D_n - **desna integralna** n**-suma**) diobenog segmenta $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \cdots, n$).

Umjesto krajeva možemo odabrati i bilo koju točku $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, odnosno polovište $\overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ (Slika 2), i površinu P možemo aproksimirati sa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x, \text{ (\textbf{integralna} } n\text{\textbf{-suma}}),$$

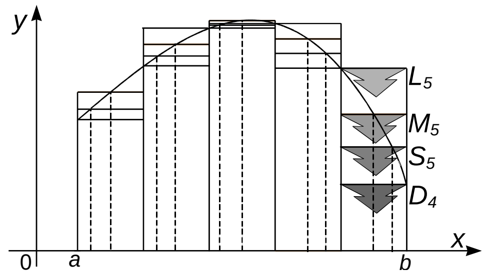
odnosno sa

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \triangle x, \text{ (\textbf{srednja integralna} } n\text{\textbf{-suma}}),$$

tj. vrijedi

$$P = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x,$$

$$P = \lim_{n \to \infty} M_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \triangle x.$$



Slika 2.

Definicija 1.1 Neka je f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ i neka je segment $[a,b]$ točkama $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$ podijeljen na n-jednakih dijelova duljine $\triangle x = \frac{b-a}{n}$, te neka je $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. **Određeni integral funkcije f od a do b** definiramo kao graničnu vrijednost integralnih suma[2] $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x$ i označavamo sa $\int_a^b f(x)dx$, tj.

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x \tag{1}$$

Nazivlje*:* • $f(x)$ **integrand***;* • a **donja granica***;* • b **gornja granica***;* • sam postupak računanja nazivamo **integracijom.**

[2] Integralne sume se nazivaju i **Riemannove sume** (po njemačkom matematičaru **Bernhardu Riemannu**, 1826-1866), a ovako definiran integral Riemannov integral. Oznaku $\int$ je uveo Leibniz - izduženi S kao limes suma.

Napomena 1.2 Određeni integral je broj i ne ovisi o x, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt = ...$$

Napomena 1.3 Pokazuje se da limes u Definiciji 2.1 uvijek postoji i jedinstven je, bez obzira na izbor točaka $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Dakle,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x}_{L_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x}_{D_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x}_{M_n}$$

Ovi limesi postoje i ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ izuzev u konačno mnogo točaka u kojima ima uklonjivi prekid ili prekid prve vrste.

Napomena 1.4 Općenito određeni integral se definira za bilo koju ograničenu funkciju. Ta definicija je nešto kompliciranija od Definicije 2.1.
Naime, u Definiciji 2.1 pretpostavili smo da je segment $[a, b]$ podijeljen na n jednakih djelova. To je bitno ograničenje.
Međutim, za neprekidne funkcije i funkcije iz Napomene 2.3, te dvije definicije su ekvivalentne.

Napomena 1.5 Ukoliko je $f(x) \geq 0$ Riemannova suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$ daje aproksimaciju površine ravninskog lika ispod krivulje $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$, sumom površina pravokutnika, a integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ daje pravu površinu tog lika.

Primjer Izračunati $\int_0^3 (x^3 - 6x) dx$.

$$\int_0^3 (x^3 - 6x) dx = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$$

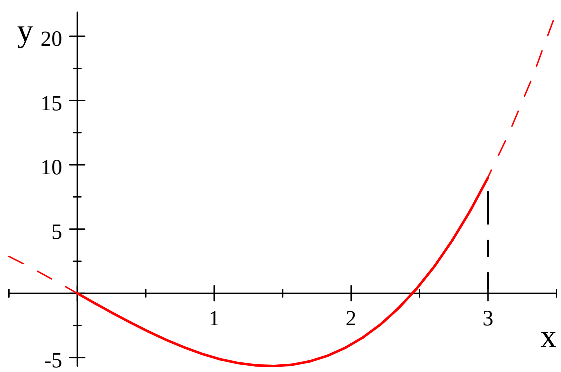
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right) \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3}{n}\right)\right] \frac{3}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\tfrac{27}{n^3}i^3-\tfrac{18}{n}i\right]\tfrac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right]$$

3

$$\text{(*)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{81}{4}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2-27\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right]=\tfrac{81}{4}-27=-\frac{27}{4}$$



Slika 3.

Napomena: Primjetimo da ovaj integral računa razliku površina P_2-P_1 (Slika 3.)

[3] (*) U računu smo koristili poznatu formulu $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Napomena 1.6 U Definiciji 1.1 prepostavili smo da je $a < b$. Definicija vrijedi i ako je $b < a$. U tom slučaju je $\Delta x = \frac{a-b}{n} (> 0)$, pa slijedi da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ukoliko je $a = b$ tada je $\Delta x = 0$, pa očito vrijedi

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Teorem 1.7 (Svojstva određenog integrala)

a) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)\,,\ \ c \in \mathbb{R}$ konstanta,

b) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

c) $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$

d) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$

e) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Dokaz:

Primjer Izračunati $\int_0^1 (4+3x^2)dx$.

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 (4+3x^2)dx \overset{\text{T. 1.7, b)}}{=} \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2 dx \overset{\text{T. 1.7, c}}{=}$$

$$4(1-0) + 3\int_0^1 x^2 dx = 4 + 3\cdot\tfrac{1}{3} = 5,$$

gdje smo iskoristili rezultat $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ (to je početni primjer na početku ovoga poglavlja).

Napomena 1.8 Iz Definicije 1.1 nadalje slijedi

a) $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b] \implies \int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0,$

b) $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a,b] \implies$
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

c) $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b] \implies$
$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$