3. Integriranje nekih elementarnih funkcija

Integralni račun, tj. određivanje primitivnih funkcija je tehnički složen posao.

Poteškoće:

- Primitivna funkcija za (i relativno jednostavnu) elementarnu funkciju ne mora biti elementarna (tada se kaže da je integral **elementarano nerješiv).** Npr.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \int e^{x^2} dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x} dx \; ...$$

  su neelementarni (elementarano nerješivi**)** integrali .

- Kad je primitivna funkcija elementarna funkcija (tada se kaže da je integral **elementarno rješiv**), njezino je određivanje, osim u rijetkim slučajevima (tablični ili njima vrlo slični integrali) je vrlo zahtjevno.

Dakle, integralni račun je puno složeniji nego diferencijalni račun. Deriviacija elementarne funkcije je opet elementarna funkcija (i svaku znamo derivirati !), dok integral elementarne funkcije ne mora biti elementarna funkcija (a ako i jest, često je vrlo teško naći !).

Ovdje ćemo pokazati nekoliko tehnika integriralnoga računa u slučaju elementarno rješivih integrala.

3.1. Integral racionalne funkcije

Integral racionalne funkcije je oblika

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$$

gdje su $P_m(x)$ i $Q_n(x)$ polinomi stupnja m i n, redom, koji nemaju zajedničkih nul-točaka.

Razlikujemo slučajeve:

- $n = 0 \Longrightarrow \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S(x)$ je polinom (dobivamo sumu tabličnih integrala);

- Ako je $m < n$ onda je $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija;

- Ako je $m \geq n$ onda, dijeljenjem, dobivamo

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int \left(S(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)} \right) dx$$

  gdje je $S(x)$ polinom a $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija.

Dakle, dovoljno je pretpostaviti da je $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ prava racionalna funkcija.

Temeljna zamisao jest da se polazna (prava) racionalna funkcija $f = \frac{P_m}{Q_n}$ prikaže kao zbroj jednostavnijih racionalnih funkcija, koje u nazivnicima imaju prirodne potencije linearnih ili kvadratnih faktora iz faktorizacije od Q_n (**rastav na parcijalne razlomke**).

Pritom se rabi tzv. **metoda neodređenih koeficijenata**, koja se, u biti, temelji na činjenici da su dva polinoma jednaka onda i samo onda kad su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Rastav $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ na parcijalne razlomke - postupak:

- Po Osnovnom teoremu algebre, svaki polinom se na jedinstven način može rastaviti (nad $\mathbb{R}$) kao produkt linearnih i kvadratnih članova (s negativnom diskriminantom)

$$Q_m(x) \equiv b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 =$$
$$b_n(x-a_1)^{s_1} \cdots (x-a_r)^{s_r} \left(x^2 + \underbrace{c_1 x + d_1}_{c_1^2 - 4d_1 < 0}\right)^{k_1} \cdots \left(x^2 + \underbrace{c_l x + d_l}_{c_l^2 - 4d_l < 0}\right)^{k_l},$$

- Linearnom polinomu $x - a_j$ koji se pojavljuje s_j puta, pridružuje se s_j parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_{j1}}{x-a_j} + \frac{A_{j2}}{(x-a_j)^2} + ... + \frac{A_{js_j}}{(x-a_j)^{s_j}},$$

a kvadratnom polinomu koji se pojavljuje k_i puta, pridružuje se k_i parcijalnih razlomaka

$$\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + c_i x + d_i} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + c_i x + d_i)^2} + ... + \frac{B_{1k_i}x + C_{1k_i}}{(x^2 + c_i x + d_i)^{k_i}}.$$

- Sada je

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{1}{b_n}\left(\frac{A_{11}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1s_1}}{(x-a_1)^{s_1}} + \frac{A_{21}}{x-a_2} + \cdots\right.$$

$$\cdots + \frac{A_{rs_r}}{(x-a_r)^{s_r}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + c_1 x + d_1} + \cdots + \frac{B_{1k_1}x + C_{1k_1}}{(x^2 + c_1 x + d_1)^{k_1}} + \cdots$$

$$\left.\cdots + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2 + c_l x + d_l} + \cdots + \frac{B_{lk_l}x + C_{lk_l}}{(x^2 + c_l x + d_l)^{k_l}}\right)$$

- Nepoznati koeficijenti A_{is_i}, B_{jk_j} i C_{jk_j} se određuju tako da se predhodna jednakost pomnoži polinomom $Q_n(x)$ i potom izjednače koeficijenti uz iste potencije.

- Nakon što odredimo nepoznate koeficijente dobivamo da se integriranje (prave) racionalne funkcije, $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, svodi na izračunavanje sljedeća tri (tipična) neodređena integrala:

$$\int \frac{1}{(x-a)^s} dx, \quad \int \frac{x+b}{(x^2+cx+d)^k} dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+cx+d)^k} dx,$$

  gdje su $s, k \in \mathbb{N}$ i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Odabiranjem odgovarajućih supstitucija, dolazimo do (tabličnih) integrala oblika

$$\int \frac{dt}{t^s} \quad \text{i} \quad \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Primjer 1 Izračunati integral $\int \frac{5x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx$.

$$I=\int\frac{5x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=\tfrac{5}{2}\int\frac{(2x+2)-\frac{6}{5}}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=$$

$$\tfrac{5}{2}\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx-3\int\frac{1}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=\tfrac{5}{2}I_1-3I_2$$

$$I_1=\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=\int\left(x^2+2x+10\right)^{-2}(2x+2)\,dx=$$

$$\left[\begin{array}{l} t=x^2+2x+10 \\ dt=(2x+2)\,dx \end{array}\right]=\frac{\left(x^2+2x+10\right)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x^2+2x+10}+C$$

$$I_2=\int\frac{1}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx=\int\frac{1}{3^4\left(\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1\right)^2}dx\overset{\frac{x+1}{3}=t}{=}$$

$$=\tfrac{1}{27}\int\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt\doteq\tfrac{1}{27}\left(\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\tfrac{1}{2}arctgt\right)=$$

$$\tfrac{1}{54}\left(\frac{\frac{x+1}{3}}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}+arctg\frac{x+1}{3}\right)+C$$

$$I = \tfrac{5}{2}I_1 - 3I_2 =$$

$$-\tfrac{5}{2}\frac{1}{x^2+2x+10}-\tfrac{1}{18}\left(\frac{3\left(x+1\right)}{x^2+2x+10}+arctg\frac{x+1}{3}\right)+C$$

Primjer 2 Izračunati integral $\int \frac{x^6-x^3+1}{x^5-x^2}dx$.

Budući da $\frac{x^6-x^3+1}{x^5-x^2}$ nije prava racionalna funkcija, dijeljenjem dobivamo

$$I = \int \frac{x^6-x^3+1}{x^5-x^2}dx = \int x + \frac{1}{x^5-x^2}dx =$$

$$\int xdx + \int \frac{1}{x^5-x^2}dx = \frac{x^2}{2} + I_{\ 1}$$

Rastav nazivnika na faktore:

$$x^5 - x^2 = x^2\left(x-1\right)\left(x+x^2+1\right)$$

Rastav na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x+x^2+1}$$

povlači

$$1 = Ax \ (x-1)\left(x+x^2+1\right) + B(x-1)\left(x+x^2+1\right)$$
$$+Cx^2\left(x+x^2+1\right) + (Dx+E)\,x^2(x-1)$$

ili

$$1 = (A+C+D)\,x^4 + (B+C-D+E)\,x^3 +$$
$$(C-E)\,x^2 + (-A)\,x - B,$$

što daje sustav

$$A+C+D=0$$

$$B+C-D+E=0$$

$$C-E=0$$

$$-A=0$$

$$-B=1$$

koji ima rješenje

$$A=0, B=-1, C=\frac{1}{3}, D=-\frac{1}{3}, E=\frac{1}{3}.$$

Sada je

$$I_1 = \int \frac{1}{x^5 - x^2} dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x + x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln\left(x + x^2 + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

pa je

$$I = \int \frac{x^6 - x^3 + 1}{x^5 - x^2} dx = \frac{x^2}{2} + I_1 =$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln\left(x + x^2 + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

3.2 Integriranje kompozicije trigonometrijske i racionalne funkcije

Ovaj tip neodređenog integrala se obično označuje s

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

gdje je R opća oznaka za razlomački izraz (racionalnu funkciju). U trivijalnom slučaju $\int \sin x dx$ i $\int \cos x dx$ dobivamo dva tablična integrala (8) i (9). Nadalje,

$$\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \overset{\cos x = t}{=} -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \overset{\sin x = t}{=} \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx \overset{\sin x = t}{=} \tfrac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

U općem slučaju se integral $\int R(\sin x, \cos x)dx$ svodi na integral racinalne funkcije, tj. na $\int \frac{p(t)}{q(t)}dt$, p i q polinomi, koji se onda rješava tehnikom iz prethodnoga razmatranja.

Najopćenitija zamjenska funkcija jest

$$tg\frac{x}{2} \equiv t \quad (x \equiv 2arctgt). \tag{s1}$$

Ona povlači:

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \;\; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \;\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{s2}$$

Primjer Izračunati integral $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}dx$.

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}dx \overset{(s1),(s2)}{=} \int \frac{1}{3t^2+2t+2}dt =$$

$$\tfrac{1}{3}\int \frac{1}{(t+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}}dt \overset{t+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}u}{=} \tfrac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{\sqrt{5}}arctgu =$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3t+1}{\sqrt{5}} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C$$

Ako je funkcija R "parna", tj. ako je

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

moguće je to svođenje provesti zamjenskom funkcijom

$$t = tgx \quad (x = arctgt) \tag{ss1}$$

koja povlači:

$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt,\ \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}. \tag{ss2}$$

Primjer Izračunati integral $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}dx$.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x} dx \overset{(ss1),(ss2)}{=}$$

$$\int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t^2+2t-1} dt =$$

$$\int \frac{1}{(t+1)^2 - 2} dt \overset{t+1=\sqrt{2}u}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2-1} du \overset{(14)}{=}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\frac{t+1}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{t+1}{\sqrt{2}} + 1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1-\sqrt{2}+tgx}{1+\sqrt{2}+tgx}\right| + C.$$

Napokon, u najjednostavnijim slučajevima

$$\int R(\sin x) \cdot \cos x dx \quad \text{i}$$
$$\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$$

rabimo, redom, zamjenske funkcije

$$t = \sin x, \; dt = \cos x dx, \qquad \text{(sss1)}$$
$$t = \cos x, \; dt = -\sin x dx. \qquad \text{(sss2)}$$

Primjer Izračunati integral $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx$.

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} dx \overset{(sss2)}{=} \int \frac{-1}{(2+t)(1-t^2)} dt =$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{6}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt =$$

$$\tfrac{1}{3}\ln|t+2| + \tfrac{1}{6}\ln|t-1| - \tfrac{1}{2}\ln|t+1| = \tfrac{1}{6}\ln\left|\frac{(t+2)^2(t-1)}{(t+1)^3}\right| =$$

$$\tfrac{1}{6}\ln\left|\frac{(\cos x+2)^2(\cos x-1)}{(\cos x+1)^3}\right| + C.$$

Promatrani se integral može izračunati i ovako:

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx \overset{(s1),(s2)}{=} \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}} dt = \ldots$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln\left|t\left(t^2+3\right)\right| = \tfrac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\cdot\left(tg^2\frac{x}{2}+3\right)\right| + C.$$

Napomena: Primijetimo da se izračunavanjem neodređenog integrala različitim metodama (ili samo različitm zamjenskim funkcijama) mogu dobiti "različite" primitivne funkcije. Ali, kao što znamo, one se mogu razlikovati do na aditivnu konstantu. To npr. znači da su na svakom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, na kojemu su oba rezultata iz predhodnog primjera definirana, ona i međusobno jednaka do na aditivnu konstantu.

Posve slično integriranju kompozicije trigonometrijske i racionalne funkcije, integrira se i $\int R(shx, chx)dx$, kompozicija hiperbolne i racionalne funkcije.

Primjer Integral

$$\int \frac{1}{2shx + 3chx} dx$$

supstitucijom

$$th\frac{x}{2} = t,\ dx = \frac{2}{1-t^2}dt,\ shx = \frac{2t}{1-t^2},\ chx = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

prelazi u integral racionalne funkcije:

$$\int \frac{1}{2shx + 3chx} dx = \int \frac{\frac{2}{1-t^2}}{2\frac{2t}{1-t^2} + 3\frac{1+t^2}{1-t^2}} dt =$$

$$\int \frac{2}{3t^2+4t+3}dt = \tfrac{2}{3}\int \frac{1}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}dt \overset{t+\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}u}{=} \tfrac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{u^2+1}du =$$

$$\tfrac{2}{\sqrt{5}}arctgu = \tfrac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{3t+2}{\sqrt{5}} = \tfrac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{3th\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}} + C$$

3.3 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

Primitivna funkcija za iracionalnu funkciju nije, općenito, elementarna funkcija, tj. neodređeni integral $\int f(x)dx$ iracionalne funkcije f **nije**, općenito, **elementarno rješiv**. Razmatrat ćemo samo neke elementarno rješive tipove neodređenih integrala iracionalnih funkcija:

- $$\int R\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx, \quad m_i, n_i, k \in \mathbb{N}, i = 1, \cdots, k.$$

  (auditorne vježbe)

- $$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

  $m_i, n_i, k \in \mathbb{N}, i = 1, \cdots, k,$ (auditorne vježbe).

- $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

  (auditorne vježbe)

- **Binomni integral**, tj.

  $$\int x^s \left(a + bx^r\right)^p dx, \quad p, r, s \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

  Općenito, on nije elementarno rješiv. Skup svih elementarno rješivih binomnih integrala karakterizira ovaj teorem:

Teorem 3.1 Binomni integral (1) je elementarno rješiv onda i samo onda, ako je barem jedan od brojeva

$$p, \ \frac{s+1}{r}, \ \frac{s+1}{r} + p$$

cijeli broj.

Dokaz:

Dakle, imamo sljedeće supstitucije:

$p \in \mathbb{Z} \implies x = t^n,\ n -$ (najmanji) zajed. nazivnik od s i r;

$\dfrac{s+1}{r} \in \mathbb{Z} \implies a + bx^r = t^n,\ n -$ nazivnik od p;

$\dfrac{s+1}{r} + p \in \mathbb{Z} \implies ax^{-r} + b = t^n,\ n -$ nazivnik od p;

Primjer Izračunati integral $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx$.

$$\int \frac{1}{x^4\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} p = -\frac{1}{2},\ s = -4,\ r = 2 \\ p \notin \mathbb{Z},\ \dfrac{s+1}{r} = \frac{-3}{2} \notin \mathbb{Z}, \\ \dfrac{s+1}{r} + p = -2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x^{-2}+1 = t^2,\ x^2 = \frac{1}{t^2-1} \\ -2x^{-3}dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \left(1 - t^2\right)dt =$$

$$t - \frac{t^3}{3} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)^3 = \frac{2x^2-1}{3x^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} + C$$