4. VIŠESTRUKI INTEGRAL

4.1 Višestruki integral - definicija

Prisjetimo se: Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ i neka je segment $[a,b]$ točkama $x_0 = a$, $x_1, ..., x_n = b$ podijeljen na n jednakih djelova duljine $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ i neka je $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Određeni integral funkcije f od a do b definiramo kao

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x}_{\text{Riemannova suma}}$$

Ukoliko je $f(x) \geq 0$, Riemannova suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ daje aproksimaciju površine ravninskog lika ispod krivulje $y = f(x)$ za $x \in [a,b]$, sumom površina pravokutnika, a integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ daje pravu površinu tog lika.

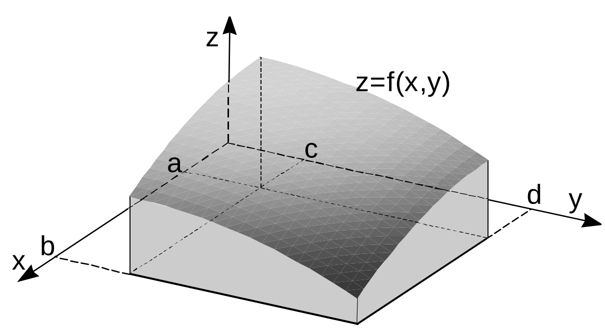
Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na zatvorenom pravokutniku

$$K = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\, c \le y \le d\right\}$$

i neka je $f(x,y) \ge 0, (x,y) \in K$. Graf G_f funkcije f je ploha čija je jednadžba $z = f(x,y)$. Označimo sa T "pseudokvadar" određen s pravokutnikom K i grafom G_f funkcije f nad njim (Slika 1.), tj.

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in K,\ 0 \le z \le f(x,y)\right\}.$$

Izračunajmo volumen V tijela T.



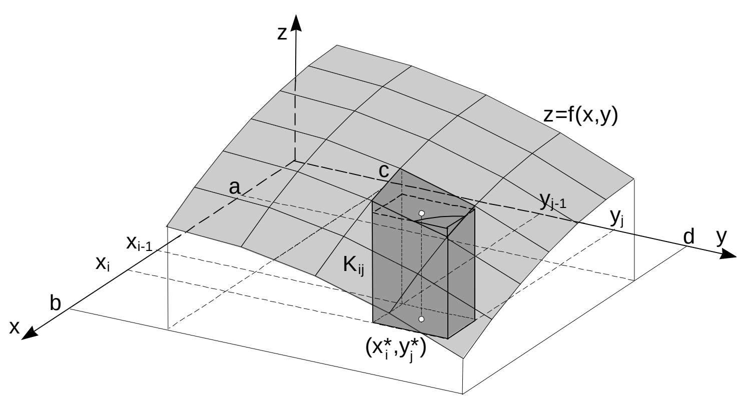
Slika 1.

Postupiti ćemo slično izračunu površine, ovdje upisivajući kvadre koji će aproksimirati volumen odgovarajućeg pseudokvadra. Segment $[a,b]$ podijelimo diobenim točkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ na m podsegmenata $[x_{i-1}, x_i]$ jednake duljine $\triangle x = \frac{b-a}{m}$. Segment $[c,d]$ podijelimo diobenim točkama $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ na n podsegme-

nata $[y_{j-1}, y_j]$ jednake duljine $\triangle y = \frac{d-c}{n}$.
Razdiobe segmenata $[a, b]$ i $[c, d]$ određuju razdiobu pravokutnika K na pravokutnike

$$K_{ij} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\},$$

$i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n$, jednake površine $\triangle x \triangle y$.
U svakom pravokutniku K_{ij} odaberimo točku (x_i^*, y_j^*) i volumen kvadra kojemu je baza pravokutnik K_{ij} i visina $f(x_i^*, y_j^*)$ iznosi $V_{ij} = f(x_i^*, y_j^*)\triangle x \triangle y$. Taj volumen možemo uzeti kao aproksimaciju volumena pseudokvadra određenog pravokutnikom K_{ij} i grafom G_f funkcije f nad njim.



Slika 2.

Jasno je da traženi volumen V tijela T možemo aproksimirati zbrojem svih ovako dobivenih V_{ij} tj.

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\triangle x \triangle y.$$

Dakako da će aproksimacija volumena V biti bolja kada je razdioba pravokutnika K finija, tj. kada su m i n veći (Slika 2b.-dodatak), pa stoga možemo uzeti da je

$$V = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \triangle x \triangle y.$$

Limes ovakvoga tipa možemo promatrati i kada funkcija f nije pozitivna.

Definicija 4.1 Dvostruki integral funkcije $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ nad pravokutnikom $K \subseteq \mathbb{R}^2$ je broj

$$I = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \triangle x \triangle y$$

(uz oznake od prije) ukoliko on postoji.

Uobičajena oznaka je

$$I = \iint_K f(x,y)dxdy.$$

Napomena:

1. Suma $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \triangle x \triangle y$ naziva se Riemannovom sumom, a integral $\iint_K f(x,y)dxdy$ Riemannovim integralom funkcije f nad K.

2. Limes iz Definicije 4.1. uvijek postoji ukoliko je funkcija f neprekidna. On postoji i za neke prekidne funkcije.

Primjer Izračunati dvostruki integral

$$I = \iint_K xydxdy,$$

gdje je $K = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Podijelimo segment $[0, 1]$ na x-osi na m-jednakih dijelova diobenim točkama

$$0 = x_0 < x_1 \cdots < x_{m-1} < x_m = 1, \ \triangle x = \frac{1}{m}, \ x_i = \frac{i}{n},$$

a segment $[0, 1]$ na y-osi na n-jednakih dijelova diobenim točkama

$$0 = y_0 < y_1 \cdots < y_{n-1} < y_n = 1, \ \triangle y = \frac{1}{n}, \ y_j = \frac{j}{n}.$$

U svakom pravokutniku $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ odaberimo točku

$$(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j) = \left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right).$$

Imamo

$$I = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_i^*, y_j^*\right) \triangle x \triangle y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i \cdot y_j) \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{m}\right)\cdot\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}i\cdot j=$$

$$\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{m}i\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{m}i\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m}i=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4m}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4mn},$$

pa je

$$I=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_i^*,y_j^*)\triangle x\triangle y=$$

$$=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4m}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4mn}\right)=\frac{1}{4}$$

Napomena: Lako je dokazati da vrijedi:

1.
$$\iint_K [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy =$$
$$= \iint_K f(x,y)dxdy + \iint_K g(x,y)dxdy;$$

2.
$$\iint_K cf(x,y)dxdy = c\iint_K f(x,y)dxdy,\ c\in\mathbb{R}.$$

3. Ako je $f(x,y)\le g(x,y)$ za svaki $(x,y)\in K$ tada je
$$\iint_K f(x,y)dxdy \le \iint_K g(x,y)dxdy.$$

Posve slično se definira i trostruki integral. Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija triju varijabla definirana na kvadru $K = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$.

Podijelimo diobenim točkama

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b, \\ c &= y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d, \\ s &= z_0 < z_1 < \cdots < z_n = t \end{aligned}$$

segmente $[a, b]$, $[c, d]$, $[s, t]$ na podsegmente jednake duljine $\triangle x = \frac{b-a}{l}$, $\triangle y = \frac{d-c}{m}$, $\triangle z = \frac{t-s}{n}$. Kvadar K podijelimo na podkvadre

$$\begin{aligned} K_{ijk} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ y_{j-1} &\leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\}, \end{aligned}$$

$i = 1, \cdots, l$, $j = 1, \cdots, m$, $k = 1, \cdots n$. Svi podkvadri imaju jednaki volumen $\triangle x \triangle y \triangle z$. Riemannova trostruka suma je oblika

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \triangle x \triangle y \triangle z$$

gdje je (x_i^*, y_j^*, z_k^*) bilo koja točka iz kvadra K_{ijk}.

Definicija 4.2 Trostruki integral funkcije $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ nad nad kvadrom $K \subseteq \mathbb{R}^3$ je broj

$$J = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \triangle x \triangle y \triangle z$$

ukoliko on postoji.

Uobičajena oznaka je

$$J = \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz.$$

4.2 Računanje višestrukih integrala

Prisjetimo se (jednostrukog) integrala realne funkcije jedne varijable kojega, naravno, nismo izračunavali po definiciji, nego primjenom Newton-Leibnizove formule, tj. primjenom neodređenog integrala. Istu tehniku primijeninimo i na dvostruki integral.

Prvo izračunajmo određeni integral $\int_a^b f(x, y) dx$ uzimajući da je varijabla y konstanta. Rezultat će biti funkcija u varijabli y i potom nju integrirajmo uzimajući c i d kao granice integracije. Prethodni postupak kaže da se izračun dvostrukog integrala $\iint_K f(x, y) dx dy$ svodi na izračun dvaju jednostrukih integrala. Pokazuje se da vrijedi tzv. **Fubinijev teorem**:

Teorem 4.3 (Fubini) Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, pri čemu je $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ pravokutnik. Tada vrijedi

$$\iint_K f(x, y)dxdy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Uobičajeni zapis je

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

i pritom kažemo da smo proveli integraciju u redoslijedu yx, odnosno xy.

Primjer Izračunajmo $I = \iint_K xy^2 dxdy$, $K = [1, 2] \times [0, 1]$.

$$I = \iint_K xy^2 dxdy = \int_1^2 dx \int_0^1 xy^2 dy =$$

$$\int_1^2 \left(x \left(\frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_1^2 x \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) dx =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}) = \frac{1}{2}$$

Dakako, isti se rezultat dobiva i u obrnutom redoslijedu integriranja.

Napomena Za integral iz prethodnog primjera kažemo da je integral sa separiranim varijablama i on se može jednostavnije izračunati kao umnožak dvaju jednostrukih integrala:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy \right).$$

U prethodnom primjeru je

$$\iint_K xy^2 dxdy = \left(\int_1^2 xdx \right) \cdot \left(\int_0^1 y^2 dy \right) =$$

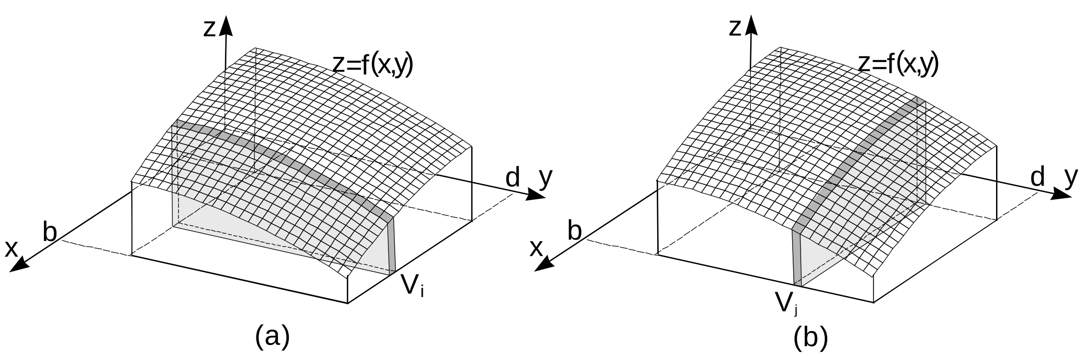
$$\left(\left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=1}^{x=2} \right) \cdot \left(\left(\frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Napomena Dokaz Fubinijevog teorema je složen, ali se u slučaju pozitivne funkcije može intuitivno razumijeti tvrdnja teorema. Naime, u slučaju pozitivne funkcije dvostruki integral $\iint_K f(x,y)dxdy$ je broj koji je jednak volumenu V odgovarajućeg pseudokvadra. Do izračuna toga volumena možemo doći i na sljedeća dva načina. U prvom slučaju istaknuti dio (Slika 4.4.(a)) ima volumen

$$V_i \simeq \left[\int_c^d f(x_i^*,y)dy\right] \triangle x.$$

slučaju je

$$\begin{aligned} V &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left[\int_c^d f(x_i^*,y)dy\right] \triangle x = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx. \end{aligned}$$



Slika 4.4.

U drugom slučaju istaknuti dio (Slika 4.4.(b)) ima volumen

$$V_j \simeq \left[\int_a^b f(x, y_j^*)dx\right] \triangle y.$$

Zbroj tih volumena

$$\sum_{j=1}^{n} V_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_a^b f(x, y_j^*)dx\right] \triangle y$$

aproksimira volumen V i u graničnom slučaju je

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left[\int_a^b f(x, y_j^*)dx\right] \triangle y =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy.$$

Ovim računanjem volimena V na dva načina dobivamo da je zaista

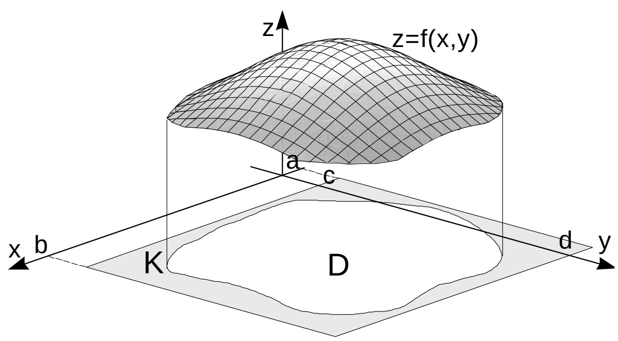
$$\iint\limits_K f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy.$$

Za neprekidnu funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen (Slika 4.5.), pripadni integral definiramo pomoću njezinoga trivijalnog proširenja

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in K \setminus D \end{cases}$$

na neki pravokutnik $K \supseteq D$.



Slika 4.5.

Sjetimo se interpretacije integrala pozitivne funkcije preko volumena: volumen ispod grafa funkcije f nad D i volumen ispod grafa funkcije $\widetilde{f}$ nad K (primijetimo da $\widetilde{f}$ nije neprekidna funkcija) su jednaki, pa ima smisla integral funkcije f nad D definirati preko integrala funkcije $\widetilde{f}$ nad K (lako se vidi da taj integral, ako postoji, ne ovisi o odabranom pravokutniku).

Definicija 4.4 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen skup. Neka je $K \subset \mathbb{R}^2$ bilo koji pravokutnik što sadrži D, a funkcija $\widetilde{f} : K \to \mathbb{R}$ trivijalno proširenje funkcije f. Ako je funkcija $\widetilde{f}$ integrabilna onda **dvostruki integral** *(na D)* od f definiramo formulom

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_K \widetilde{f}(x,y)dxdy. \tag{1}$$

Napomena Vrijedi:

1. $\displaystyle\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy;$

2. $\displaystyle\iint_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy,\ \lambda \in \mathbb{R};$

3. Ako je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (ili $\iint_{D_1 \cap D_2} f(x,y)dxdy = 0$) onda je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

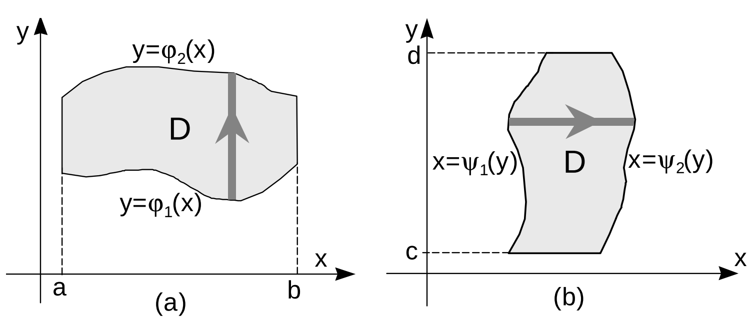
Posebno, kad je definicijsko područje $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđeno grafovima dviju neprekidnih funkcija lako dobivamo, iz formule (1), ovaj teorem:

Teorem 4.5 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemu je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima neprekidnih funkcija $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$ (Slika 4.6.(a)). Tada je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \quad (2)$$

Posve slično, kad je $D \subset \mathbb{R}^2$ omeđen grafovima neprekidnih funkcija $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$, $\psi_1 \leq \psi_2$ (Slika 4.6.(b)), vrijedi

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy. \quad (3)$$



Slika 4.6.

Umjesto (2) i (3) uobičajilo se pisati

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

i pritom smo u prvome slučaju integraciju proveli u redoslijedu yx, a u drugome u redoslijedu xy.

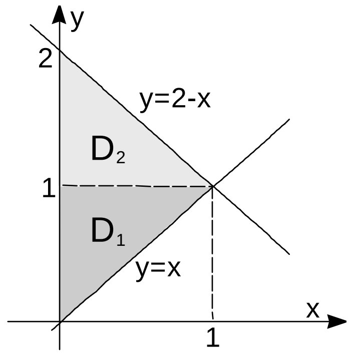
Primjer Promijeniti poredak integracije u integralu

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} \frac{x}{y} dy$$

i izračunajti njegovu vrijednost.
Područje integracije

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2-x \end{cases}$$

možemo zapisati i na ovaj način $D = D_1 \cup D_2$ (Slika 4.8.),



Slika 4.7.

gdje je

$$D_1 \cdots \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}, \; D_2 \cdots \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 2-y \end{cases}.$$

Imamo

$$I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} =$$

$$\int_0^1 dy \int_0^y \frac{x}{y} dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} \frac{x}{y} dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{y} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{1}{y} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=2-y} \right) dy =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{y} \left(\frac{y^2}{2} - 0 \right) dy + \int_1^2 \frac{1}{y} \left(\frac{(2-y)^2}{2} - 0 \right) dy = 2 \ln 2 - 1$$

I trostruki integral $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ po omeđenom integracijskom području $D \subset \mathbb{R}^3$ definiramo preko trivijalnog proširenja

$$\widetilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in D \\ 0, & (x,y,z) \in K \setminus D \end{cases}$$

funkcije f na bilo koji kvadar K što sardži D, stavljajući

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_K \widetilde{f}(x,y,z)dxdydz.$$

Iskažimo sada analogone prethodnih teorema u slučaju trostrukog integrala.

Teorem 4.6 Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemu je $K = [a,b] \times [c,d] \times [r,s] \subset \mathbb{R}^3$ kvadar. Tada vrijedi:

$$\iiint_K f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

"Izmijenjujući mjesta" varijablama dobivamo analogne integracijske formule.

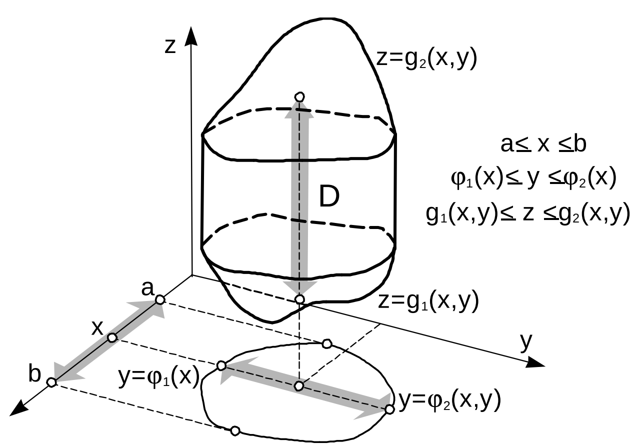
Teorem 4.7 Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, funkcija, pri čemu je

$$D = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \end{array} \right\},$$

gdje su φ_1, φ_2 i g_1, g_2 neprekidne funkcije (Slika 4.9.). Tada je

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \quad (4)$$



Slika 4.9.

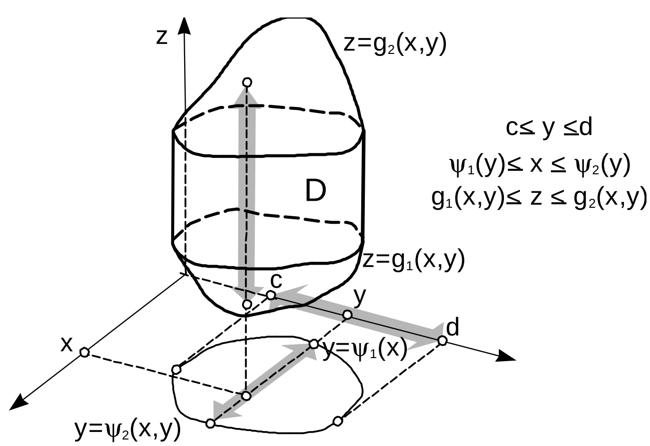
Posve slično, ako je

$$D = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \end{array} \right\},$$

gdje su ψ_1, ψ_2 i g_1, g_2 neprekidne funkcije (Slika 4.10.). Tada je

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy. \qquad (5)$$



Slika 4.10.

Kao i kod dvostrukog integrala uobičajilo se umjesto zapisa (4) i (5) koristiti

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \tag{4a}$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \tag{5a}$$

i pritom govorimo da smo integraciju proveli u redoslijedu zyx, odnosno redoslijedu zxy.

Primjer Izračunajmo

$$\iiint_D 2z dx dy dz$$

gdje je $D \subset \mathbb{R}^3$ omeđen grafovima funkcija $g_1(x,y) = x^2 + y^2$ i $g_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Uočimo da promatrane plohe prolaze ishodištem i da se sijeku uzduž jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$ u ravnini $z = 1$. Budući da između ravnina $z = 0$ i $z = 1$ vrijedi $x^2 + y^2 < \sqrt{x^2+y^2}$, to je promatrano tijelo D određeno nejednadžbama:

$$\begin{aligned} -1 \ &\leq \ x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \ &\leq \ y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ x^2 + y^2 \ &\leq \ z \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Imamo:

$$\iiint_D 2z dx dy dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 2z dz =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\left(z^2 \right) \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=\sqrt{x^2+y^2}} \right] dy =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\left(x^2+y^2\right) - \left(\left(x^2+y^2\right)^2 \right) \right] dy =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(y^2+x^2-x^4-2x^2y^2-y^4\right) dy =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{1}{3}y^3 + x^2y - x^4y - \frac{2}{3}x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right) \Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right] dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{2}{3} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 + 2\left(x^2-x^4\right)\sqrt{1-x^2} \right.$$

$$\left. -\frac{4}{3}x^2 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 - \frac{2}{5} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^5 \right] dx = \frac{\pi}{6}$$