

3.9. Ekstremi funkcija više varijabli

Definicija 3.18 Za funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, kažemo da ima lokalni maksimum (minimum) u točki $T_0 \in D$, ε -okolina $K(T_0, \varepsilon) \subseteq D$ točke T_0 sa svojstvom da je

$$f(T) < f(T_0), \quad \text{za svaku točku } T \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\}$$

$$(f(T) > f(T_0), \quad \text{za svaku točku } T \in K(T_0, \varepsilon) \setminus \{T_0\})$$

Ukoliko je

$$f(T) \leq f(T_0), \quad \text{za svaki } T \in D$$

$$(f(T) \geq f(T_0), \quad \text{za svaki } T \in D)$$

onda kažemo da f ima globalni maksimum (minimum) u točki $T_0 \in D$.

Kao i do sada promatrat ćemo funkcije dviju varijabli.

Primjer Funkcije

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{i} \quad f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

imaju minimum (lokalni i globalni) u točki $(0, 0)$.

Primijetimo da je za prvu funkciju točka $(0, 0, 0)$ tjeme paraboloida (grafa) i da ona u toj točki ima parcijalne derivacije, a da je za drugu funkciju ta točka vrh stošca (grafa) i da ne postoje parcijalne derivacije u toj točki.

Teorem 3.19 (Nužan uvjet za lokalni ekstrem)

Ako funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ima u točki $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Točka u kojima se prve parcijalne derivacije poništavaju naziva se stacionarna točka.

Stacionarna točka je kandidat za ekstrem.

Teorem 3.20 (Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem)

Neka je $T_0 = (x_0, y_0) \in D$ stacionarna točka funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, i neka su druge parcijalne derivacije funkcije f neprekidne na nekoj ε -kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$\begin{aligned} D(T_0) &= f_{xx}(T_0) \cdot f_{yy}(T_0) - [f_{xy}(T_0)]^2 = \\ &= \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Tada vrijedi:

- Ako je $D(T_0) > 0$ i $f_{xx}(T_0) > 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni minimum $f(T_0)$;
- Ako je $D(T_0) > 0$ i $f_{xx}(T_0) < 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni maksimum $f(T_0)$;
- Ako je $D(T_0) < 0$, tada f u točki T_0 nema ekstrem.

Napomena Ako je $D(T_0) = 0$ ne možemo zaključiti ništa o ekstremu. U ovom slučaju možemo imati ekstrem, ali i sedlastu točku. Tu je potrebno daljnje ispitivanje.

Primjer Odrediti ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Vrijedi:

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y = 4(x^3 - y) = 0 \Rightarrow x^3 = y,$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4x = 4(y^3 - x) = 0 \Rightarrow y^3 = x.$$

Slijedi

$$x^9 - x = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0,$$

i $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ su nultočke. Stacionarne točke su

$$T_1 = (0, 0), T_2 = (1, 1), T_3 = (-1, -1).$$

Budući da je

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 12y^2,$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

imamo:

•

$$D(0, 0) = (144x^2y^2 - 16) \Big|_{(x,y)=(0,0)} = -16$$

i funkcija f u T_1 nema ekstrem;

•

$$D(1, 1) = (144x^2y^2 - 16) \Big|_{(x,y)=(1,1)} = 128, \quad f_{xx}(1, 1) = 12$$

i funkcija f u T_2 ima lokalni minimum $z_{\min} = -1$;

•

$$D(-1, -1) = (144x^2y^2 - 16) \Big|_{(x,y)=(-1,-1)} = 128,$$

$$f_{xx}(-1, -1) = 12$$

i funkcija f u T_3 ima lokalni minimum $z_{\min} = -1$.

Slično imamo za funkcije tri varijable.

Teorem 3.19a) (Nužan uvjet za lokalni ekstrem)

Ako funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, ima u točki $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ lokalni ekstrem i ako je u toj točki derivabilna, onda je

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Teorem 3.20a) (Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem)

Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ stacionarna točka funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, i neka su druge parcijalne derivacije funkcije f neprekidne na nekoj ε -kugli $K(T_0; \varepsilon) \subseteq D$. Neka je

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) & f_{xz}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) & f_{yz}(T_0) \\ f_{xz}(T_0) & f_{yz}(T_0) & f_{zz}(T_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(T_0) & f_{xy}(T_0) \\ f_{xy}(T_0) & f_{yy}(T_0) \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \Delta_1 = f_{xx}(T_0)$$

- Ako je $\Delta_3 > 0$, $\Delta_2 > 0$ i $\Delta_1 > 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni minimum $f(T_0)$;
- Ako je $\Delta_3 < 0$, $\Delta_2 > 0$ i $\Delta_1 < 0$, tada je f u točki T_0 ima lokalni maksimum $f(T_0)$;
- U svim ostalim slučajevima kada je $\Delta_2 \neq 0$, f u točki T_0 nema lokalni ekstrem;
- Ako je $\Delta_2 = 0$ nema odluke.

Prisjetimo se: Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu (zatvorenom intervalu) $[a, b]$, onda ona na tom intervalu poprima (globalnu) minimalnu i maksimalnu vrijednost.

Teorem 3.21 Ako je $z = f(x, y)$ neprekidna na zatvorenom omeđenom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tada postoje točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u kojima f ima globalni maksimum $f(x_1, y_1)$ i globalni minimum $f(x_2, y_2)$, redom.

Traženje globalnih ekstrema:

- a) Nađu se stacionarne točke (lokalni ekstremi) funkcije f i vrijednosti od f u njima;
- b) Nađu točke ekstrema od f na rub od D i vrijednosti od f u njima;
- c) Točka kojoj pripada najveća vrijednost od f iz a) i b) je točka globalnog maksimuma, a točka kojoj pripada najmanja vrijednost od f je točka globalnog minimuma.

Primjer (auditorne vježbe).

Primjer U skupu svih kvadratastih kutija (kvadri bez gornje stranice) jednakog oplošja O ($12m^2$) odredite onaj s najvećom volumenom.

Zadano je (uz oznake x -širina.; y -dužina.; z -visina.)

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$

i treba naći maksimum funkcije

$$V(x, y, z) = xyz.$$

Iz polaznog uvjeta je $z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$, pa problem možemo riješiti tražeći maksimum funkcije

$$V(x, y) = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)}.$$

Vrijedi

$$V_x(x, y) = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2},$$

$$V_y(x, y) = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2},$$

i za naći stacionarne točke, zbog prirode zadatka ($x, y > 0$), dovoljno je riješiti sustav

$$12 - 2xy - x^2 = 0,$$

$$12 - 2xy - y^2 = 0.$$

Mora biti $x^2 = y^2$, a to daje $x = y$ (ostale mogućnosti otpadaju zbog $x, y > 0$).

Slijedi da je $(2, 2)$ je stacionarna točka. Dovoljne uvjete nije potrebno ispitivati zbog prirode zadatka. Dobivamo

$$z = \frac{12 - 2 \cdot 2}{2(2 + 2)} = 1,$$

te za kutiju dimenzija $(x, y, z) = (2, 2, 1)$, $V_{\max} = 4$.

Prethodni primjer možemo interpretirati na način:

- Odrediti ekstrem funkcije $V(x, y, z) = xyz$ uz uvjet da je $\varphi(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0$.

Definicija 3.22 Ekstrem funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$ naziva se **vezani (uvjetni) ekstrem**.

Napomena:

- Vezani ekstrem možemo interpretirati na način: graf funkcije $z = f(x, y)$ (ploha) presjecimo cilindričnom plohom $\varphi(x, y) = 0$. Presječnica je prostorna krivulja i njezin ekstrem je traženi vezani ekstrem.
- U definiciju se ne moramo ograničiti na dimenziju 2 i samo jedan uvjet. Npr., problem vezanog ekstrema je i: naći ekstrem funkcije $u = f(x, y, z)$ uz uvjete $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$ (nažalost, ovdje nemamo geometrijskog prikaza problema).

Nalaženje vezanog ekstrema najlakše je provesti **Lagrangeovim postupkom**:

- Formira se pripadna **Lagrangeova funkcija**

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y);$$

- Nađu se stacionarne točke funkcije F ; neka su to točke (x_i, y_i, λ_i) ;
- Izračunaju se vrijednosti $f(x_i, y_i)$: najveća vrijednost od njih je vezani maksimum od $f(x, y)$, a najmanja je traženi vezani minimum.

Primjer Odrediti ekstrem funkcije $f(x, y) = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$.

Pripadna Lagrangeova funkcija je

$$F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda (x^2 + y^2 - 5),$$

pa imamo sustav

$$F_x(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda x = 0,$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda y = 0,$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 5 = 0,$$

čija su rješenja

$$\left[x = -1, y = -2, \lambda = \frac{1}{2} \right], \quad \left[x = 1, y = 2, \lambda = -\frac{1}{2} \right],$$

Imamo $f(-1, -2) = -5$, - minimumi, $f(1, 2) = 5$ - minimum.

Geometrijska interpretacija:

Točke $T_1(-1, -2, -5)$ i $T_2(1, 2, 5)$ su točke na prostornoj krivulji (elipsi)

$$\mathcal{K} \dots \begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

(dobivenoj kao presjek ravnine i valjka) minimalno, odnosno maksimalno udaljene od xy -ravnine.

Vratimo se primjeru: odrediti ekstrem funkcije

$$V(x, y, z) = xyz$$

(volumen) uz uvjet da je

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Formirajmo pripadnu Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda (xy + 2xz + 2yz - 12)$$

i odredimo njezine stacionarne točke. Riješimo sustav

$$F_x(x, y, z, \lambda) = yz + y\lambda + 2z\lambda = 0,$$

$$F_y(x, y, z, \lambda) = xz + x\lambda + 2z\lambda = 0,$$

$$F_z(x, y, z, \lambda) = xy + 2x\lambda + 2y\lambda = 0,$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Rješenja su

$$\left[x = 2, y = 2, z = 1, \lambda = -\frac{1}{2} \right]$$

$$\left[x = -2, y = -2, z = -1, \lambda = \frac{1}{2} \right].$$

Zaključujemo da je traženi vezani maksimum $V_{\max} = 4$ i on se postiže za $x = 2, y = 2, z = 1$.