Matematika 2

1. **Neodređeni integral**
2. **Određeni integral**
3. **Funkcije više varijabli**
4. **Višestruki integral**
5. **Obične diferencijalne jednadžbe**

Literatura:

- B. Červar i B. Jadrijević, Matematika 2, Fesb-Split 2006. (radna verzija);
- http://www.fesb.hr/mat2
- http://www.pmfst.hr/zavodi/matematika/scripta/visa_matematika.pdf
- Petar Javor, Matematička analiza 2, Element, Zagreb, 2000.
- Luka Krnić i Zvonimir Šikić, Račun diferencijalni i integralni, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
- B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.
- Antunac-Majcen, Borozan, Devidé,...,*Riješeni zadaci iz više matematike, svezak III,* Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Obveze:

- predavanja ($\geq 70\%$)
- vježbe ($\geq 70\%$)

Provjere znanja:

- *tri kolokvija (parcijalna ispita):*

- sva tri pozitivna;
- zadaci i teoretska pitanja.

- *završni ispit:*

- tri dijela - sva tri pozitivna;
- zadaci i teoretska pitanja.

1. NEODREĐENI INTEGRAL

Pitanja:

- Je li dana realna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivacija neke realne funkcije $g : A \to \mathbb{R}$?

- Riješiti jednadžbu $g' = f$, pri čemu se za dani f traži g.

- Ta jednadžba ili nema rješenja ili ih ima beskonačno mnogo. Skup svih pripadnih rješenja ćemo nazvati **(neodređenim) integralom** funkcije f i pritom ćemo govoriti da smo funkciju f **integrirali**.
- integriranje tehnički neusporedivo složeniji račun-postupak od deriviranja, premda se, na neki način, radi o obratnomu računu.

Oznake:

- Jednostavnosti radi nazivom interval i oznakom I obuhvatiti ćemo sve mogućnosti:

$$(a, b)\,,\ (a, \infty)\,,\ (-\infty, b)\,,\ (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

1. Pojam i svojstva neodređenog integrala

Definicija 1.1 Neka je dan interval I i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. Svaku neprekidnu funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$, nazivamo **primitivnom funkcijom** za funkciju f na intervalu I.

Napomena:

- Primitivna funkcija za funkciju f se može definirati i malo općenitije (vidjeti: http://www.pmfst.hr/zavodi/matematika/scripta/visa_matematika.pdf, str. 190.));

- Primijetimo da je primitivna funkcija za funkciju f, definirana kao u Definiciji 1.1, derivabilna funkcija (kod općenitije definicije to ne mora biti) ;

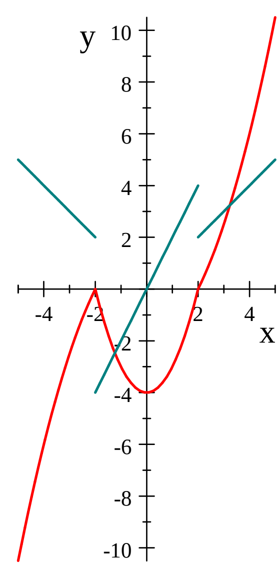
Primjer 1 Funkcija

$$F:\mathbb{R}\diagdown\{-2,2\}\to\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+2, & x<-2\\ x^2-4, & -2<x<2\\ \dfrac{x^2}{2}-2, & x>2\end{cases},$$

je primitivna funkcija za funkciju

$$f:\mathbb{R}\diagdown\{-2,2\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-x, & x<-2\\ 2x, & -2<x<2\\ x, & x>2\end{cases},$$

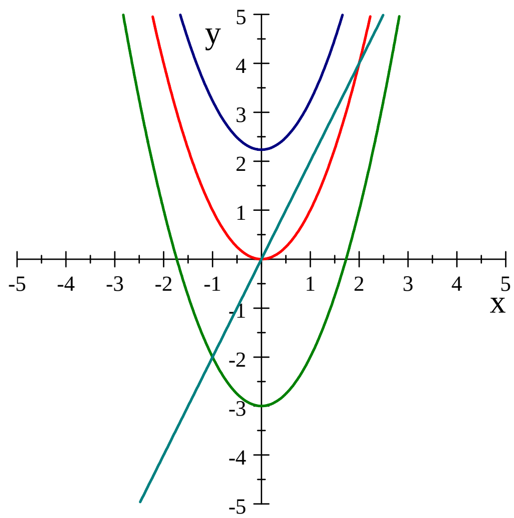
jer je $F'(x)=f(x)$ za svaki $\mathbb{R}\diagdown\{-2,2\}$.



Primjer 2 Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, su između ostalih i ove funkcije primitivne na $\mathbb{R}$:

$$F_1(x) = x^2, \quad F_2(x) = x^2 - 3, \quad F_3(x) = x^2 + \sqrt{5},$$

jer je npr. $F_2'(x) = 2x = f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.



Teorem 1.2 Ako za danu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji primitivna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, onda je i svaka funkcija $G : I \to \mathbb{R}$, $G = F + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, primitivna za funkciju f. Štoviše, ako su $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitivne funkcije za f, onda je $G = F + C$, za neki $C \in \mathbb{R}$.

(Sažeto: "Primitivna funkcija je jednoznačno određena do na aditivnu konstantu".)

Dokaz:

Definicija 1.3 Za danu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, skup svih njezinih primitivnih funkcija na intervalu (ili njihovoj uniji) I nazivamo **neodređenim integralom** funkcije f na intervalu I i označujemo s $\displaystyle\int f(x)dx$.

Skraćeno pišemo

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ x \in I,$$

gdje F neka (bilo koja) primitivna funkcija za f na I, a C oznaka za opću konstantu.

<u>Oznake:</u> funkciju f nazvati **integrandom** (ili **podintegralnom funkcijom**), x - **integracijskom varijablom**, a C - **integracijskom konstantom**.

Primjer 1

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

jer je

$$(-\cos x + C)' = \sin x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Primjer 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

jer je

$$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)\,.$$

Primjer 3

$$\int 2|x|dx = \int \left(\begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \right) dx = \begin{cases} x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^2 + C, & x < 0 \end{cases} \quad ,$$

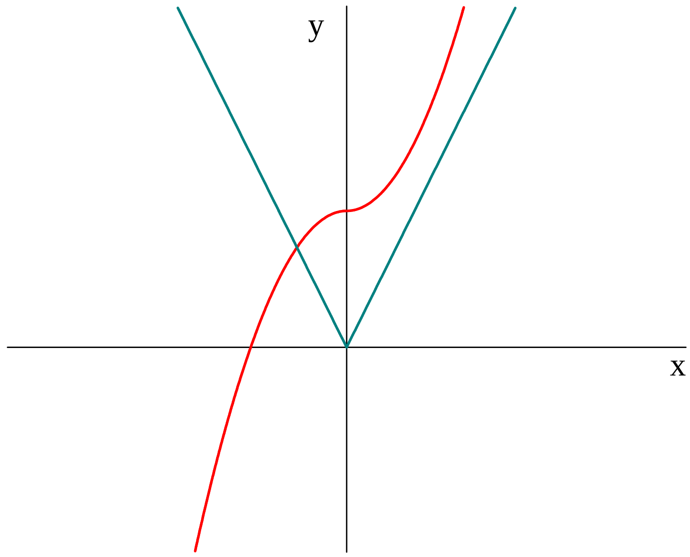
jer je

$$\left(\begin{cases} x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^2 + C, & x < 0 \end{cases} \right)' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} = 2\,|x|\,, x \in \mathbb{R}.$$

(Funkcija $x \mapsto 2|x|$ nije derivabilna u točki $x = 0$, dok njezina primitivna funkcija

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^2 + C, & x < 0 \end{cases}$$

to jest. Ta derivacija je 0, jer postoje derivacije slijeva i zdesna i obje iščezavaju.)



Teorem 1.4 Neka je $\int f(x)dx = F(x) + C$, tj. $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$ Tada na I vrijedi:

a) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ ("deriviranjem integrala dobivamo integrand");

b) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ ("diferenciranje poništava integriranje");

c) $\int dF(x) = F(x) + C$ ("integriranje poništava diferenciranje do na konstantu").

Dokaz: Očit.

Teorem 1.5 Neka funkcije $f_{1,2} : I \to \mathbb{R}$, dopuštaju primitivne funkcije na intervalu I, te neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ konstante. Tada i funkcija $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : X \to \mathbb{R}$ dopušta primitivnu funkciju na I i vrijedi

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx + C, \tag{1}$$

tj. neodređeni integral čuva (do na aditivnu konstantu) linearnu kombinaciju.

Dokaz:

Napomena: Ubuduće u jednakostima sličnima (1), opću konstantu C najčešće nećemo zapisivati, tj. u takvim "jednakostima" ćemo dopuštati da se lijeva i desna strana smiju razlikovati do na aditivnu konstantu.

Teorem 1.5 očito povlači

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Primjer 1

$$\int\left(4\cos x+\frac{x^3}{2}-3\right)dx \overset{(1)}{=} 4\int\cos x dx+\frac{1}{2}\int x^3dx-3\int dx$$

$$=4\sin x+\frac{x^4}{8}-3x+C.$$

(Naime, $(\sin x)'=\cos x$, $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$ i $(x)'=1$.)

Točnost **tablice osnovnih integrala** (na definicijskim područjima podintegralnih funkcija) lako se provjeri deriviranjem:

$$\int 0\cdot dx=C; \tag{2}$$

$$\int dx=x+C; \tag{3}$$

$$\int x^r dx=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C, \quad r\neq -1; \tag{4}$$

$$\int x^{-1}dx\equiv\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C; \tag{5}$$

$$\int e^x dx=e^x+C; \tag{6}$$

$$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C, \quad 0<a\neq 1; \tag{7}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \tag{8}$$

$$\int sh\, x dx = ch\, x + C \tag{8'}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \tag{9}$$

$$\int ch\, x dx = sh\, x + C \tag{9'}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C; \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{ch\, x^2 x} dx = th\, x + C; \tag{10'}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + C; \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cth\, x + C; \tag{11'}$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C; \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C; \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C; \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C; \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C. \tag{16}$$

Neodređene integrale od (2) do (16) nazivamo **tabličnim integralima**.

2. Osnovne integracijske metode

Neodređene integrale elementarnih funkcija što se mogu prikazati kao linearne kombinacije podintegralnih funkcija iz tablice gore, lako određujemo primjenom Teorema 1.5. U takvim slučajevima kažemo da smo funkciju integrirali **izravno (ili neposredno)**.

Primjer 1

$$\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = 2\int x^{\frac{7}{6}}dx \overset{(4)}{=} \frac{12}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C;$$

Primjer 2

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \overset{(1)}{=}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} \overset{(11),(10)}{=} -ctgx + tgx + C.$$

Skup svih izravno integrabilnih funkcija proširujemo primjenom dvaju jednostavnih postupaka: uvođenjem nove varijable **(supstitucija)** i prepoznavanjem diferencijala nekog umnoška (**parcijalna integracija**).

Supstitucija se sastoji u tomu da se nekom dopustivom zamjenom integracijske varijable ili podintegralnog izraza polazni integral svede na neke od onih tabličnih. O tomu govore dva iduća teorema.

Teorem 2.1 Neka za funkciju f postoji neka primitivna funkcija na intervalu I. Nadalje, neka je $\varphi : J \to I$, J - interval, strogo monotona i derivabilna surjekcija. Tada je

$$\int f(x)dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C, \tag{17}$$

gdje je Φ primitivna funkcija za funkciju $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na J. Drugačijim zapisom,

$$\int \left((f \circ \varphi) \cdot \varphi'\right)(t)dt = \Phi(t) + C.$$

Dokaz:

Napomena:

- Teorem 2.1 jamči da se, pod navedenim uvjetima, zadani integral smije rješavati zamjenom $x = \varphi(t)$ i $dx = \varphi'(t)dt$, tj.

$$\int f(x)dx = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right] = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \equiv$$

$$= \Phi(t) + C = \Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C = F(x) + C.$$

- Temeljna zamisao je u tomu da se nađe zamjenska funkcija φ, koja će polučiti funkciju $\phi = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, tako da integral $\displaystyle\int \phi(t)dt$ bude "tehnički" bitno jednostavniji (što bliži nekom tabličnom integralu) od polaznoga (netabličnog) $\displaystyle\int f(x)dx$. Naravno, idealno je ako se "iz prve" za $\displaystyle\int \phi(t)dt$ dobije neki tablični integral.

- Obično zamjenske funkcije koje su pogodne za pojednostavljenje podintegralnog izraza na svojim definicijskim područjima ne zadovoljvaju uvjete Teorema 1.15, pa uzimamo njihova suženja koja zadovoljavaju te uvjete.

Primjer 1

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x = t^6,\ t > 0 \\ dx = 6t^5 dt \end{bmatrix} = \int \frac{1+t^2}{t^3} \cdot 6t^5 dt =$$

$$\int 6(t^4+t^2)dt \overset{(1)}{=} 6\int t^4 dt + 6\int t^2 dt \overset{(4)}{=}$$

$$6 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} \overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} + C$$

Teorem 2.2 Neka je G primitivna funkcija za funkciju g na intervalu J, tj. $G'(t) = g(t)$, $t \in J$, te neka je $\psi : I \to J$, I - interval, derivabilna. Tada je

$$\int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)dx = G(\psi(x)) + C. \tag{18}$$

Dokaz: Promotrimo funkcije $f(x) = g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$ i $F(x) = G(\psi(x))$. Budući je $G'(t) = g(t), t \in J$ imamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= (G(\psi(x)))' = G'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) \\ &= g(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = f(x) \end{aligned}$$

za svaki $x \in I$, a to se i tvrdilo.

Napomena:
Teorem 2.2 kazuje da ako se u podintegralnoj funkciji $f(x)$ prepozna izraz oblika $g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$ i ako znamo da je $\int g(t)\,dt = G(t) + C$, onda je

$$\int f(x)\,dx = \int g(\psi(x)) \cdot \psi'(x)dx =$$

$$= G(\psi(x)) + C. = G(\psi(x)) + C.$$

Primjer 1

$$\int \cos 5x dx = \int \frac{1}{5} \cos 5x \cdot 5dx = [t = 5x; dt = 5dx] =$$

$$\frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

Primjer 2

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^r} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2xdx}{(1+x^2)^r} = [t = 1 + x^2; dt = 2xdx] =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^r} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|t| + C, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-r+1}}{-r+1} + C, & r \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, & r = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{-r+1}}{-r+1} + C, & r \neq 1 \end{cases}$$

Napomena: Vrijedi općenito

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}dx = \ln|h(x)| + C$$

i

$$\int (h(x))^r \, h'(x)dx = \frac{(h(x))^{r+1}}{r+1} + C, \ r \neq -1.$$

Parcijalna integracija se sastoji u tomu da se pogodnim izborom realnih funkcija $x \mapsto g(x)$ i $x \mapsto h(x)$, takvih da je $g(x)h'(x)dx = f(x)dx$, i primjenom diferencijala na produktnu funkciju $x \mapsto g(x)h(x)$, integral $\int f(x)dx$ ili bitno pojednostavni ili da postane nepoznanicom u lako rješivoj jednadžbi.

Teorem 2.3 Ako su funkcije $g, h : I \to \mathbb{R}$, neprekidno derivabilne, onda vrijedi

$$\int g(x)h'(x)dx = g(x)h(x) - \int h(x)g'(x)dx. \qquad (19)$$

<u>Dokaz:</u>

Napomena: Uobičajilo se uvesti pokrate $g(x) = u$ i $h(x) = v$ pa formula (19) ima i zapis

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Primjer 1

$$\int xe^x dx \; = \left[\begin{array}{c} u = x;\; dv = e^x dx; \\ du = dx; v = \displaystyle\int e^x dx = e^x \end{array} \right] \overset{(19)}{=}$$

$$= \; xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Primjer 2

$$I = \int e^x \sin x dx = \left[\begin{array}{c} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx,\; v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \left[\begin{array}{c} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos dx,\; v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right]$$

$$-e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \right) = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

Sada imamo

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \implies$$

$$I = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x \right) + C$$

Primjer 3 - Rekurzivna formula

Odredimo, za svaki $n \in N$, integral

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \equiv I_n.$$

Za $n = 1$ se radi o tabličnomu integralu (12),tj. $I_1 = arctgx + C$.

Neka je $n \geq 2$. Tada je

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx =$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n},$$

tj.

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}.$$

Primijenimo parcijalnu integraciju na

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}, \; n \geq 2,$$

uzevši

$$u = x; du = dx; dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^n};$$

$$v = \int \frac{xdx}{(1+x^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}}.$$

Slijedi,

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} =$$

$$\frac{-x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Dobili smo, dakle, **rekurzivnu formulu**[1]

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Primjerice, za $n = 2$ i $n = 3$ je, redom,

[1] **Rekurzivne formule** omogućuju da se integral koji ovisi o prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$ (ili $n \in \mathbb{Z}$) svede na integral (ili integrale) istog oblika, ali s manjim indeksom, npr. $n-1$ ili $n-2$.

$$I_2 \equiv \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} I_1$$

$$= \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} \arctan x + C,$$

$$I_3 \equiv \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{4} I_2 =$$

$$\frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1+x^2\right)} + \frac{3}{8} arctgx + C.$$