5. REKURZIVNE RELACIJE

5.1 Fibonaccijev slijed (niz)

Primjer rekurzivnih relacija:

Svaki par zečica-zec dobiva tijekom svakog sljedećeg mjeseca par mladih: zečicu i zeca.

Pitanje: Ako je na početku bio samo jedan par $f_0 = 1$, koliko će parova f_n biti nakon n mjeseci?

Rješenje je jednoznačno određeno nizom prirodnih brojeva (f_n), $n = 0, 1, 2, ..$ koji je dan rekurzivnom relacijom

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n = 2, 3, ..$$

gdje je $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$.

Definicija *Fibonaccijev slijed (niz)* (F_n) definira se početnim vrijednostima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$ i rekurzivnom relacijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Propozicija 1 (A. de Moivre) Za Fibonaccijev slijed (F_n) vrijedi "zatvorena formula"

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Napomena: Može se pokazati (iz zatvorene formule) da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Ovaj broj naziva se **zlatni prerez** (**božanski omjer**).

Posljedica 1 Broj F_n u Fibonaccijevom slijedu jednak je cijelom broju koji je nabliži broju $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Slijed (F_n) ima eksponencijalni rast.

5.1 Linearne rekurzivne relacije

Opći oblik linearne rekurzivne relacije reda r je

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r} + f(n), \qquad n \geq r, \tag{1}$$

gdje su $c_1, c_2, ..., c_r$ zadani realni ili kompleksni brojevi i $c_r \neq 0$, a $f : \{r, r+1, ...\} \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$).

Ovdje je $n-$ti član *rekurzivno* određen vrijednostima *predhodnih* članova $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r}$.

Cilj: Riješiti (1) po a_n, tj. uz zadane *početne vrijednosti* $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ naći a_n eksplicitno kao funkciju od n (zatvorenu formu).

Linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Rekurzivna relacija (1) je homogena ako je $f(n) \equiv 0$ za sve n. Dakle, imamo

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r}, \qquad n \geq r. \tag{2}$$

Propozicija 2 Ako za dva slijeda (a_n') i (a_n''), $n \geq 0$ vrijedi rekurzivna relacija (2), onda vrijedi i za njihovu linearnu kombinaciju $(\lambda a_n' + \mu a_n'')$, gdje su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) bilo koji skalari.

Rješenje od (2) tražimo u obliku:

$$a_n = x^n, \qquad \underline{\textit{Eulerova supstitucija}}.$$

Uvrštavanjem u (2) za $x \neq 0$ dobivamo

$$x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_r x^{n-r}, \qquad n \geq r,$$

što povlači (dijeljenjem s $x^{n-r} \neq 0$)

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - ... - c_r = 0. \tag{3}$$

Po Osnovnom teoremu algebre *karakteristična jednadžba* (3) ima u skupu kompleksnih brojeva r korijena $x_1, x_2, ..., x_r$ (neki mogu biti međusobno jednaki).
Zbog pretpostavke $c_r \neq 0$ niti jedan x_i nije 0.

Razlikujemo dva slučaja:

1. Slučaj r različitih korijena karakteristične jednadžbe

Teorem 1 Neka su svi korijeni $x_1, x_2, ..., x_r$ karakteristične jednadžbe međusobno različiti. Tada je opće rješenje linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima jednako linearnoj kombinaciji

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + ... + \lambda_r x_r^n, \quad n = 0, 1, 2, ... \qquad (4)$$

gdje su $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_r$ bilo koji kompleksni brojevi.

2. Slučaj kada postoje višestruki korijeni karakteristične jednadžbe

Lema1 Ako je kompleksni broj x_0 $k-$struki korijen polinoma $P(x)$, onda je on $(k-1)-$struki korijen derivacije $P'(x)$.

Propozicija 3 Ako je kompleksni broj x_0 $k-$struki korijen karakteristične jednadžbe (3), onda svaki od k sljedova

$$a_n = x_0^n, \quad a_n = n x_0^n,\ ..., a_n = n^{k-1} x_0^n,$$

predstavlja rješenje rekurzivne relacije (2).

Teorem 2 Neka su $x_1, x_2, ..., x_m$ svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe kratnosti k_1, $k_2, ...k_m$. Rješenje $a_n^{(i)}$ od (2), koje odgovara korijenu x_i kratnosti k_i, je linearna kombinacija k_i sljedova

$$a_n = \lambda_1^{(i)} x_i^n + \lambda_2^{(i)} n x_i^n + ... + \lambda_{k_i}^{(i)} n^{k_i - 1} x_i^n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

pri čemu su $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}, ..., \lambda_{k_i}^{(i)}$ kompleksni koeficijenti. Opće rješenje je dano sa

$$a_n = a_n^{(1)} + ... + a_n^{(m)}. \tag{5}$$

(ovdje imamo ukupno $r = k_1 + k_2 + ... + k_m$ slobodnih koeficijenata).

Linearne nehomogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

Opći oblik je

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r} + f(n), \qquad n \geq r, \tag{6}$$

gdje su c_1, c_2, ..., c_r zadani realni ili kompleksni brojevi i $c_r \neq 0$, a $f : \{r, r+1, ...\} \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$).

Propozicija 4. Neka je $\left(a_n^{(0)}\right)$ opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije je dano Teoremom 2. Ako znamo neko patikularno rješenje $\left(a_n^{(p)}\right)$od (4) onda je opće rješenje nehomogene rekurzivne relacije (6) dano sa

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(p)}. \tag{7}$$

Napomena: Općenito nalaženje partikularnog rješenja je općenito komplicirano, ali u nekim slučajevima postoje recepti. Evo nekih:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
$C\ (const.)$	A
Cn	$An + B$
$P_k(n)$	$Q_k(n)$
$C\alpha^n$	$A\alpha^n$
$C\alpha^n \cos\beta n + D\alpha^n \sin\beta n$	$A\alpha^n \cos\beta n + B\alpha^n \sin\beta n$

Primjedba: Ako je $f(n) = C\alpha^n$ i $x = \alpha$ korijen karakteristične jednadžbe, onda partikularno rješenje ne možemo tražiti u obliku $a_n^{(p)} = A\alpha^n$.

5.2 Primjeri

Primjer 1 Dana je rekurzivna relacija

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2n, \qquad n \geq 2$$

uz početni uvjet $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Primjer 2 Dana je rekurzivna relacija

$$a_n = a_{n-1} + n - 1, \qquad n \geq 1$$

uz početni uvjet $a_0 = 0$.

Primjer 3 Hanojske kule.

- Imamo n kolutova s rupom u sredini, svi različitih polumjera i na ravnoj podlozi zabodena tri štapića;
- Svi kolutovi su nanizani na jedan štapić tako da je kolut s većim polumjerom uvijek ispod onog s manjim polumjerom;
- Cilj: Prenijeti sve kolutove (jedan po jedan) na drugi štapić tako da ni u jednom trenutku ne bude onaj s većim polumjerom ispod onog s manjim. Pri tome svaki od štapića možemo koristiti za privremeno smještanje kolutova;
- Pitanje: Koliki je najmanji broj prijenosa a_n potreban da se svih n kolutova prenese s prvog na drugi štapić?

Induktivni opis:

- Za $n = 1$ (jedan kolut) imamo samo jedan prijenos $a_1 = 1$;
- Pretpostavimo da znamo prenijeti n kolutova (imamo a_n prijenosa).
- Za prijenos $n + 1$ koluta imamo sljedeće:

- prenesemo n kolutova na drugi štapić (ukupno a_n prijenosa);
- prenosimo najveći kolut na treći štapić (ukupno 1 prijenos);
- prenesemo n kolutova s drugog na drugi štapić (ukupno a_n prijenosa).

Dakle, vrijedi

$$a_{n+1} = 2a_n + 1,\ a_1 = 1$$

<u>Rješenje je:</u>

$$a_n = 2^n - 1,\ n \in \mathbb{N}$$

<u>Napomena:</u> Zapravo imamo

$$a_{n+1} \leq 2a_n + 1.$$

Ali budući je

$$a_{n+1} \geq 2a_n + 1$$

imamo jednakost.

6. KOMBINATORIKA

6.1 Produktno pravilo

Osnovni problem: Nalaženje kardinalnog broja ($|A|$) konačnih skupova zadanih na razne načine.

Pravilo zbrajanja:

- Ako su A i B konačni disjunktni skupovi, onda vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B|$;

Propozicija 1 Neka su A_1 i A_2 neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$.

Napomena: Ako se nešto može obaviti na m načina, a svaki način ima n ishoda, onda je ukupan broj mogućih ishoda jednak mn.

Teorem 1 (Produktno pravilo) Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi

$$|A_1 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_n|$$

ili $\left|\prod_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$.

Skup svih funkcija $f : A \to B$, gdje su A i B neprazni konačni skupovi, označimo sa B^A.

Teorem 2 Neka su A i B neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

Napomena: Bilo koja funkcja $f : A \to B$ može vrijednost $f(a_1)$ poprimiti na $|B| = m$ načina, $f(a_2)$ isto na $|B| = m$ načina,..., $f(a_n)$ na $|B| = m$ načina, onda f možmo zadati na m^n načina.

Korolar 1 Broj uređenih $n-$torki sastavjenih od 0 i 1 (ili neka druga dva različita elmenta) jednak je 2^n.

Teorem 3 Neka je X neprazni konačan skup. Onda za partitivni skup 2^X vrijedi $\left|2^X\right| = 2^{|X|}$.

Napomena: Broj podskupova $n-$članog skupa jednak je broju uređenih $n-$torki nula i jedinica, a to je 2^n.

Propozicija 2 Neka je dan prirodan broj n. Kardinalan broj skupa svih Booleovi funkcija $F : B^n \to B$, $B = \{0, 1\}$ je jednak 2^{2^n}.

6.2 Varijacije, permutacije i kombinacije bez ponavljanja

Razlikujemo:

- Varijacije (i permutacije kao specijalan slučaj) - prebrojavamo uređene $k-$torke nekog konačnog skupa (poredak bitan);

- Kombinacije - prebrojavamo podskupove nekog konačnog skupa (poredak nije bitan);

Razlikujemo: varijacije i kombinacije bez i s ponavljanjem.

Definicija Varijacijom bez ponavljanja reda k konačnog skupa $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$, $k \leq n$, nazivamo bilo koju uređenu $k-$torku različitih elmenata iz A. Broj varijacija bez ponavljanja reda k označavamo sa P_k^n.

Varijaciju bez ponavljanja reda n nazivamo permutacija $n-$članog skupa. Broj permutacija $n-$članog skupa označavamo sa P^n.

Napomena: Svaku permutaciju skupa A_n možemo poistovjetiti s nekom bijekcijom $f : A_n \to A_n$.

Teorem 4 Broj varijacija bez ponavljanja reda $k \leq n$ skupa od n elemenata jednak je

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n\,(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)\,.$$

Broj permutacija $n-$članog skupa jednak je $n!$.

Definicija Kombinacijom bez ponavljanja reda k konačnog skupa $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$, $k \leq n$, nazivamo bilo koji $k-$člani podskup od A.

Teorem 5 Broj kombinacija bez ponavljanja reda $k \leq n$ skupa od n elemenata jednak je

$$\binom{n}{k} := \frac{n\,(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Svojstva:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Pascalov trokut

$$
\begin{array}{c||cccccc||cccccc}
n=0 & \binom{0}{0} & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & 1 & 1 & & & & \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
n=5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Propozicija 3 (Binomna formula) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

<u>Dokaz.</u> Matematičkom indukcijom ili kombinatorički.

6.3 Varijacije, permutacije i kombinacije s ponavljanjem

Definicija Neka je zadan skup od k elemenata $A_k = \{a_1, ..., a_k\}$. Promatrajmo sve uređene $n-$torke elmenata iz A u kojima se element a_1 pojavljuje n_1 puta, element a_2 pojavljuje n_2 puta, ..., element a_k pojavljuje n_k puta, pri čemu je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Takve $n-$torke nazivamo permutacije $n-$tog reda s ponavljanjem, a njihov broj označavamo s $P^n_{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Teorem 6 Broj permutacije $n-$tog reda s ponavljanjem skupa $A_k = \{a_1, ..., a_k\}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i = 1, ..., k$, jednak je

$$P^n_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Teorem 7 (Multinomni teorem)

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k},$$

gdje u gornjoj sumi zbrajamo po svim $k-$torkama cijelih brojeva $n_1, n_2, ..., n_k \geq 0$ takvim da je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Kraći zapis multinomnog teorema (pomoću **multiindeksa**)

Definirajmo:

- $\mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_k)\,;$
- $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in \mathbb{N}_0;$
- $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k;$
- $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_k^{\alpha_k};$
- $\binom{\mathbf{n}}{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_k!};$

Sada po multinomnom teoremu

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot ... \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k},$$

vrijedi:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=n} \binom{\mathbf{n}}{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

Primjer: **Propozicija (Mali Fermatov teorem)**

Ako je p prost broj, onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $p\,|k^p - k$, tj.

$$k^p \equiv k (\operatorname{mod} p).$$

Dokaz: Po multinomnom teoremu imamo

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^p = x_1^p + x_2^p + ... + x_k^p + \underbrace{\mathcal{O}}_{\text{OSTATAK}}.$$

Za $x_1 = x_2 = ... = x_k = 1$ dobivamo

$$k^p = k + \mathcal{O}_1.$$

Dakle, dovoljno je dokazati da je ostatak $\mathcal{O}_1$ djeljiv s p. Ostatak $\mathcal{O}_1$ je zbroj multinomnih koeficijenata

$$\frac{p!}{n_1!n_2! \cdot ... \cdot n_k!} \in \mathbb{N},$$

gdje je

$$n_i < p$$

za svaki $i = 1, ..., k$.

(Uočimo: Ako je za neki i, $n_i = p$, onda je $n_1 = n_2 = ... = n_{i-1} = n_{i+1} = ... = n_k = 1$, a to upravo znači da je $\frac{p!}{n_1!n_2! \cdot ... \cdot n_k!} = 1$ koeficijent uz x_i^p).

Dakle, svaki multinomni koeficijent u ostatku $\mathcal{O}_1$ je prirodan broj veći od 1, pa budući je

$$\frac{p!}{n_1!n_2! \cdot ... \cdot n_k!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{n_1!n_2! \cdot ... \cdot n_k!},$$

onda je $\mathcal{O}_1$ djeljiv s p, kao suma prirodnih brojeva koji su svi djeljivi s p. ∎

Napomena: Mali Fermatov teorem se može dokazati i bez korištenja multinomnog teorema (Poglavlje 3.7);

Prisjetimo se:

- Za $Nzm\,(a, n) = 1$ vrijedi $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, n)$ (Eulerova kongruencija).
- Za p prost vrijedi $\varphi\,(p) = p - 1$;
- Ako je p prost i $p \nmid a$ onda je $Nzm\,(a, p) = 1$ pa je $a^{p-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$.
- Neka je $a \in \mathbb{N}$. Imamo dva slučaja:
  - je p prost i $p \nmid a$ onda je $a^{p-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p) \Longrightarrow$ $a^p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, p)$;
  - je p prost i $p \mid a$ onda je $a^p \equiv a \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$;

  što je Mali Fermatov teorem.

Definicija Neka je zadan skup od n elemenata $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$. Promatrajmo sve uređene $k-$torke elmenata iz A, pri čemu se svaki element može i ponavljati. Takve $k-$torke nazivamo varijacije $k-$tog reda s ponavljanjem $n-$članog skupa, a njihov broj označavamo s V_n^k.

Teorem 8

$$V_n^k = n^k.$$

Definicija Neka je zadan skup od n elemenata $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$. Promatrajmo sve neuređene $k-$torke elmenata iz A_n, pri čemu se svaki element može i ponavljati. Takve neuređene $k-$torke nazivamo kombinacije $k-$tog reda s ponavljanjem $n-$članog skupa.

Teorem 9 Broj kombinacije $k-$tog reda s ponavljanjem $n-$članog skupa jedanak je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

6.4 Formula uključivanja i isključivanja

Ako su A_1 i A_2 konačni skupovi, onda je

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \,.$$

Slično, za tri konačna skupa

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| -$$

$$- |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \,.$$

Teorem 9 (Formula uključivanja i isključivanja ili Sylvesterova formula) Neka su $A_1, A_2, ..., A_k$ konačni skupovi. Onda vrijedi

$$|A_1 \cup ... \cup A_k| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_k| \,.$$

Općenitiji problem:

Neka je zadan konačan skup X s N elemenata. Neka su $S(1), ..., S(n)$, neka svojstva koja imaju neki njegovi elementi. Pretpostavka je da znamo za svaki element ima li svojstvo $S(i)$ ili ne. Neki element može imati više navedenih svojstava.

Oznake:

- N_0 je broj elemenata iz X koje nemaju ni jedno od svojstava $S(1), ..., S(n)$;
- $N_{i_1 \ldots i_k}$ je broj elemenata iz X koji imaju svojstva $S(i_1), ..., S(i_k)$.

Teorem 10 (Formula uključivanja i isključivanja)

$$N_0 = N - \sum_{i<j} N_{ij} + \sum_{i<j<k} N_{ijk} + ... + (-1)^n N_{12\ldots n}.$$

Napomena: Ako je $n = 2$, tj. ako imamo samo dva svojstva $S(1)$, $S(2)$, onda je

$$N_0 = N - (N_1 + N_2) + N_{12}$$

Primjer: Koliko ima permutacija bez ponavljanja f skupa $\{1, 2, ..., n\}$ takvih da je $f(k) \neq k$ za sve $k = 1, 2, ..., n$? Takve permutacije kod kojih niti jedan element nije na svom mjestu nazivamo neredima ili deranžmanima.

6.5 Dirichletov princip

Teorem 11 (Dirichletov princip) Neka je n predmeta smješteno u m kutija i $n > m$. Onda postoji kuija s barem 2 predmeta.

Teorem 12 Neka je $f : A \to B$ funkcija gdje su A i B konačni skupovi i $|A| > |B|$. Onda f nije injekcija, tj. postoje dva različita elementa $a_1, a_2 \in A$ takva da je $f(a_1) = f(a_2)$.

Teorem 13 (poopćeni Dirichletov princip) Neka je n predmeta smješteno u m kutija.Onda postoji kuija s barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ predmeta.

Teorem 14 Neka je $f : A \to B$ funkcija gdje su A i B konačni skupovi i $|A| = n, |B| = m$. Onda postoji element $b \in A$ koji je slika barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ elemenata iz A.

Primjer: **Teorem** Neka je zadan kut $\alpha \in \mathbb{R}$ (u radijanima) i niz kompleksnih brojeva (a_n) dan rekurzivno sa

$$a_{n+1} = e^{\alpha i} a_n, \; a_0 \in S^1,$$

gdje je $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ jedinična kružnica u kompleksnoj ravnini. Ako je α nesumjerljiv sa 2π, tj. $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, onda je niz (a_n) ***gust*** u S^1, tj. svaki inrerval na S^1 širine $\varepsilon > 0$ sadrži barem jedan član niza (a_n).