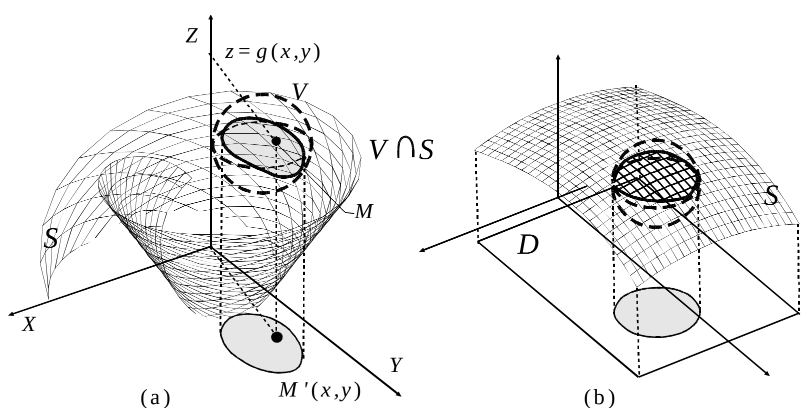
Glatka ploha i njena ploština

Definicija 5.9 Neka je u $\mathbb{R}^3$ dan pravokutni koordinatni sustav $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Skup $S \subset \mathbb{R}^3$ nazivamo **plohom** ako za svaku točku $T_0 \in S$ postoje otvorena okolina $V \subseteq \mathbb{R}^3$ od T_0, otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i preslikavanje

$$g : U \to \mathbb{R}$$

takvi da je $z = g(x, y)$, $(x, y) \in U$, jednadžba presječnoga skupa $S \cap V$. Jednostavnije rečeno: $S \subset \mathbb{R}^3$ nazivamo plohom ako je lokalno dio grafa neke funkcije.



Reći ćemo da je ploha S **glatka** (**u točki** $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = g(x_0, y_0)$) ako je pripadna funkcija g diferencijabilna (u točki (x_0, y_0)).

(Drugim riječima, ploha S je glatka čim u svakoj svojoj točki $T \in S$ dopušta tangencijalnu ravninu.)

Ako se za cijelu plohu S može naći jedno preslikavanje

$$g : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

tako da njegova suženja udovoljavaju Definiciji 5.9, onda se

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

naziva **eksplicitnom jednadžbom** plohe S.

Neka je $G : V \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija na otvorenom skupu $V \subseteq \mathbb{R}^3$ sa svojstvom $\operatorname{grad} G(x, y, z) \neq \overrightarrow{0}$ u svakoj točki $(x, y, z) \in V$. Tada je skup

$$S = \{(x, y, z) \in V \mid G(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

glatka ploha. Pritom je, u svakoj točki, gradijent

$$\operatorname{grad} G(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right\}_{(x,y,z)}$$

okomit na tangencijalnu ravninu, što odmah daje jednadžbu pripadne tangencijalne ravnine.

Primjer

- Preslikavanjem

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^2 + y^2,$$

  je zadana glatka ploha (paraboloid) dana čija je eksplicitna jednadžba

$$z = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Neka je

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \;\; G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

  Tada je skup

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

  ploha. Ta ploha je glatka jer je za svaku točku $(x,y,z) \in S$

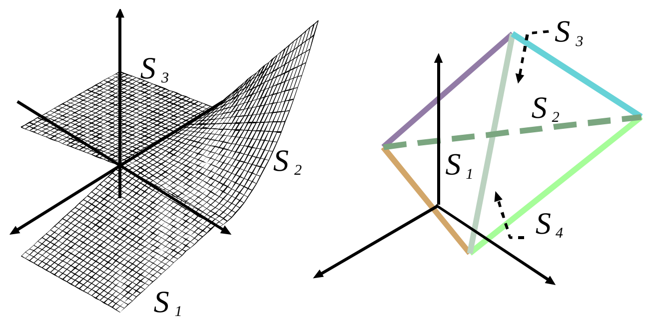
$$\operatorname{grad} G(x,y,z) = \{2x, 2y, 2z\} \neq \overrightarrow{0}.$$

Napomena: Ovdje je S sfera, tj. ploha koja je unija dvije plohe S_1 i S_1 čije su eksplicitne jednadžbe

$$S_1.....z \;=\; \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$S_2.....z \;=\; -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

U nekim razmatranjima i primjenama javljat će se plohe poput ovih:



Uočavamo da se radi o plohi S sastavljenoj od konačno glatkih ploha S_1,..., S_n tako da u točkama ”spojnih krivulja” ne postoje tangencijalne ravnine (ni normale).

Za takve plohe kažemo da su **po dijelovima glatke**. Pokazuje se da je skup svih točaka takve plohe u kojima nema normale ”ploštinski zanemariv” pa ćemo ga u našim razmatranjima o plošnom integralu smjeti zanemarivati.

Da bismo definirali plohinu ploštinu polazimo od pretpostavke da je ploština paralelograma $\square$ određenoga vrhovima T_i, $i = 1, 2, 3, 4$

$$P(\square) = \left|\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_4}\right|$$

Neka je, u danom pravokutnom koordinatnom sustavu $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Budući da taj paralelogram leži u ravnini zadanoj jednadžbom

$$z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1),$$

to je

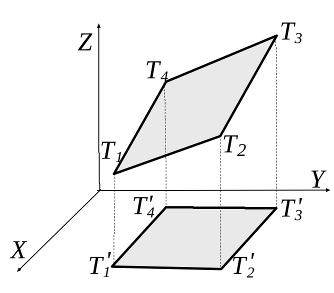
$$P(\square) = \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & p(x_2 - x_1) + q(y_2 - y_1) \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & p(x_4 - x_1) + q(y_4 - y_1) \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left| -p\overrightarrow{i} - q\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \right| \cdot \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot P\left(\square'\right),$$

gdje je $\square'$ (također paralelogram, s vrhovima T_i', $i = 1, 2, 3, 4$) okomita projekcija paralelograma $\square$ u XY-ravninu.



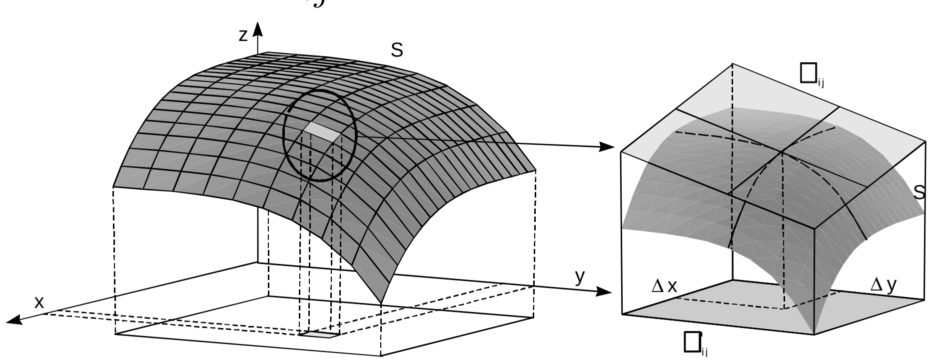
Naime,

$$P\left(\square'\right) = \left|\overrightarrow{T_1'T_2'} \times \overrightarrow{T_1'T_4'}\right| =$$

$$\left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - x_1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Neka je $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, eksplicitna jednadžba glatke plohe S. Uočimo bilo koji pravokutnik $\square' \subseteq D$ pa promatrajmo dio S' dio plohe S što se okomito projicira na $\square'$.

Podijelimo $\square'$ usporednicama s x- i y-osi na više "malih" pravokutnika $\square'_{ij}$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots m$. To će uvjetovati odgovarajuću podjelu od S' na više "malih" ploha S'_{ij}, od kojih je svaka određena suženjem funkcije g na $\square'_{ij}$, $i = 1, \cdots, n$.



Označimo s $\square_{ij}$ "mali" paralelogram koji leži u tangencijalnoj ravnini na plohu S u točki $(x_i, y_j, g(x_i, y_j)) \in S'_{ij}$ koji se okomito projicira na "mali" pravokutnik $\square'_{ij}$.

"Mali" paralelogram $\square_{ij}$ i "mala" ploha S'_{ij} imaju približno jednaku površinu, naravno, pretpostavljajući dovoljno sitnu podjelu pravokutnika $\square'$.

Zato za pripadnu površinu uzimamo (približno)

$$P(S') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(S'_{ij}) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(\square_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{1 + p_{ij}^2 + q_{ij}^2} P(\square'_{ij}).$$

Budući da je $P(\square'_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$, pri čemu su Δx_i i Δy_j razmaci između odgovarajućih susjednih usporednica, to je

$$P(S') \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{1 + p_{ij}^2 + q_{ij}^2} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j,$$

$$p_{ij} = \frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial x}, q_{ij} = \frac{\partial g(x_i, y_j)}{\partial y}.$$

Sjećajući se definicije određenog integrala skalarne funkcije, uočavamo da se na desnoj strani pojavila integralna suma skalarne funkcije

$$(x,y) \mapsto \sqrt{1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2},$$

pa ima smisla određeni integral

$$\iint_{\square'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

smatrati površinom plohe S'. Jasno je sada da se to smije proširiti preko D na S.

Dakle, ako je $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$, eksplicitna jednadžba glatke plohe S, tada je

$$P(S) = \iint_{D} \sqrt{1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

njezina površina.

Definicija 5.10 Neka je $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, diferencijabilna funkcija, a $D \subseteq X$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Neka je S ploha zadana jednadžbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$. Tada njezinu **ploštinu** definiramo kao broj

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Primijetimo da u slučaju konstantne funkcije $g(x, y) = c \in \mathbb{R}$ na D dobivamo $S = D$ i

$$P(D) = \iint_D dxdy,$$

što se slaže s prije poznatom formulom.

Ako ploha S nije glatka, ali ju se može rastaviti po dijelovima glatkim krivuljama na konačno mnogo "disjunktnih" glatkih ploha $S_1, \cdots, S_n$, onda je njezina površina zbroj

$$P(S) = P(S_1) + \cdots + P(S_n).$$

U slučaju plohe S, što se okomito projicira na područje D, implicitno zadane jednadžbom $G(x,y,z)=0$, formula za ploštinu prelazi u

$$P(S)=\iint_D \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z}\right|}dxdy,$$

pri čemu naznačene parcijalne derivacije treba iskazati funkcijama od x i y.

Napokon, formaliziramo li $P(S)=\iint_D dS$, smijemo reći da je

$$dS \equiv \sqrt{1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

infinitezimalni **ploštinski element.** (Strogo, bolje bi bilo pisati $dP(S)$ umjesto dS!).

Plošni integral prve vrste

Definicija 5.11 Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidna funkcija (skalarno polje), a $S \subseteq X$ glatka ploha zadana jednadžbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, na zatvorenom području D omeđenom po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Tada dvostruki integral

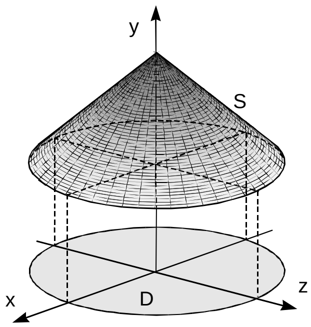
$$\iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

nazivamo **plošnim integralom prve vrste** skalarnoga polja f po plohi S i označujemo ga s

$$\iint_S f dS.$$

(Primijetimo da je oznaka u skladu s prethodnim razmatranjem.)

Primjer 1 Izračunati površinu dijela stožaste plohe $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$ koji je određen uvjetom $1 \leq y \leq 2$.



Slika 1.

Ploha S ("privilegirana" y-os) i njena projekcija D (krug $x^2 + z^2 \leq 1$) na xz-ravninu prikazani su na Slici 1.
Treba izračunati

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial(2-\sqrt{x^2+z^2})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(2-\sqrt{x^2+z^2})}{\partial z}\right)^2} dxdz.$$

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2 + \left(-\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)^2} dxdz =$$

$$\iint_{x^2+z^2\leq 1} \sqrt{2} dxdz = \sqrt{2} \iint_{x^2+z^2\leq 1} dxdz = \sqrt{2} P(D) = \sqrt{2}\pi.$$

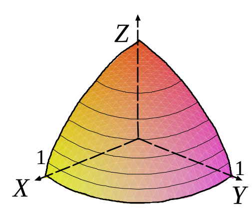
Primjer 2 Izračunajmo plošni integral prve vrste $\iint_S f dS$, ako je

$$f(x, y, z) = x + y + z,$$

a S dio jedinične središnje sfere u I. oktantu . Budući da je

$$S...z \;=\; g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$(x, y) \;\in\; D... \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases},$$



to je

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

pa je

$$1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Prema tomu,

$$\iint_S f\,dS=\iint_D\left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\overset{\textit{polarne koordinate}}{=} \;\dots =$$

$$\iint_{D_{\rho,\varphi}}\left(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+\sqrt{1-\rho^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\cdots=\frac{3\pi}{4}.$$

Napomena:

(i) Aproksimiramo li plohu S tvarnim objektom kojemu je ”debljina zanemariva prema dužini i širini” (tkanina, tanka koža, tanki lim ili sl.) gustoće $f(x, y, z)$, onda pripadni plošni integral prve vrste mjeri masu toga objekta.

(ii) Ako je ploha S po dijelovima glatka i sastavljena od konačno mnogo glatkih ploha $S_1, \cdots, S_n$ onda se njezin plošni integral prve vrste definira kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \cdots + \iint_{S_n} f dS.$$

Na kraju navedimo očiglednu linearnost plošnog integrala prve vrste:

Teorem 5.11 Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne funkcije, $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\iint_S (\lambda f + \mu g)\, dS = \lambda \iint_S f dS + \mu \iint_S g dS.$$

Plošni integral druge vrste

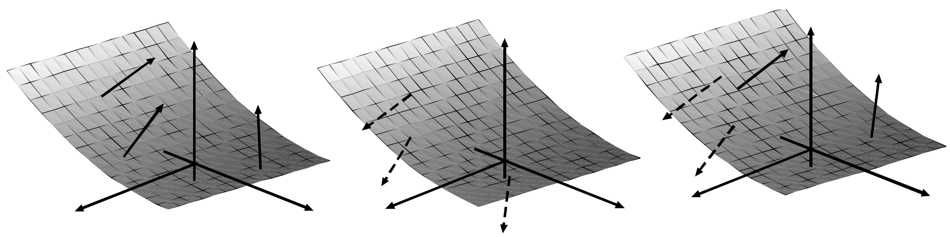
Kao što smo uveli dvije vrste poopćenja (jedno za skalarno, a drugo za vektorsko polje) određenog integrala na integral po krivulji, tako uvodimo i dvije vrste poopćenja dvostrukog integrala na integral po plohi:

- Integral skalarnog polja po plohi smo definirali kao plošni integral prve vrste;
- Sada ćemo definirati integral vektorskog polja po plohi.

  Slično slučaju krivuljnog integrala vektorskog polja (po usmjerenoj krivulji), ovdje treba definirati pojam **usmjerene** plohe. Strogo definiranje toga pojma je komplicirano, pa ćemo kratko i jednostavno, samo pojasniti o čemu se radi.

Usmjerenu plohu ćemo definirati pomoću njezinih usmjerenih tangencijalnih ravnina, a usmjerenu ravninu pomoću njezinih normalnih vektora.

U tu svrhu najprije uočimo da ravnina ima **dvije strane** od kojih je jedna određena skupom svih (jediničnih) normalnih vektora $\overrightarrow{n}_0$, a druga skupom svih $-\overrightarrow{n}_0$.

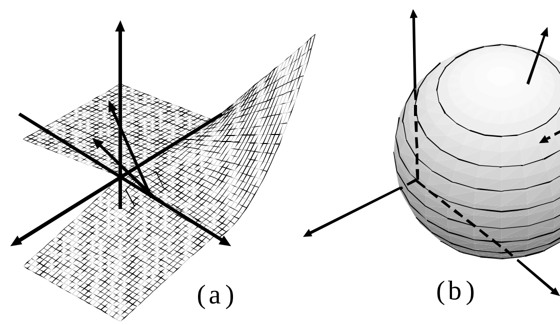


1.slika

Odabirom jedne od tih strana, tj. ili svih $\overrightarrow{n}_0$ ili svih $-\overrightarrow{n}_0$, odabrano je jedno od dvaju (neprekidnih) **usmjerenja** (ili **orijentacija**) promatrane ravnine. (Mješoviti odabir bi tvorio neko ”prekidno usmjerenje”!).

Reći ćemo da je glatka ploha S **usmjerena** (ili **orijentirana**) ako joj je usmjerena svaka tangencijalna ravnina i pritom je to ”usmjeravanje neprekidno”, tj. opisno govoreće, u bliskim točkama su bliski i pripadni normalni vektori.

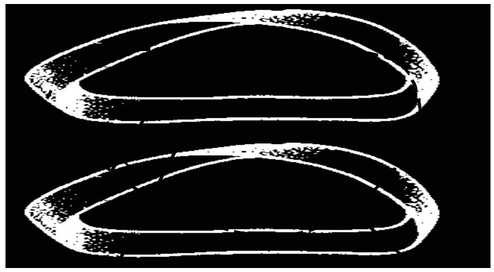
Drugim riječima, ploha S je (neprekidno) usmjerena ako ima dvije strane i jedna od njih je odabrana. Smijemo zamisliti da svako (neprekidno) usmjerenje tvore svi jedinični normalni vektori što ”izlaze” iz odabrane strane. Pojmovi su ilustrirani slikom 1.



2.slika

- Ako ploha S nije glatka ali je po dijelovima glatka, zahtijevamo (neprekidnu) usmjerenost svakoga glatkog dijela i njihovu međusobnu suglasnost, tj. pripadnost svih normalnih vektora točno jednoj strani te plohe (v. Slika 2. (a)). (Nepostojanje normalnih vektora u točkama "spojnih krivulja" zanemarujemo!)

- Poseban slučaj jesu jednostavno zatvorene plohe (sfera, rub geometrijskog tijela). Budući da one, očito, imaju dvije strane, **vanjsku** i **unutrašnju**, tako ih i usmjerujemo, tj. ili skupom svih vanjskih jediničnih normalnih vektora ili skupom svih onih unutrašnjih (v. Slika 2.(b)).



3.slika

Primjer 3 Möbiusova vrpca je primjer glatke plohe koja se ne može (neprekidno) usmjeriti.

Promatrajmo pravokutnik $ABCD$ pa mu zalijepimo stranicu AD sa stranicom BC i to tako da smo BC ”preokrenuli” i identificirali C s A i B s D. Dobit ćemo plohu, tzv. Möbiusovu vrpcu.

Pokažimo da Möbiusova vrpca nije usmjeriva ploha!

- Odaberimo bilo koju njezinu točku T_0 i u njoj normalni vektor $\overrightarrow{n}_0$ pa ”krenimo kroz njezine normalne vektore u kontinuirani obilazak” po naznačenoj (crtkanoj) jednostavno zatvorenoj krivulji.

- Vrativši se u polaznu točku T_0 pojavit će se normalni vektor $-\overrightarrow{n}_0$. Primijetimo da pritom nismo napuštali ”odabranu stranu” te plohe (tj. nismo prelazili preko ruba), a na kraju-početku smo se našli na ”drugoj strani”. To, zapravo, znači da Möbiusova vrpca *ima samo jednu stranu*.

Napomena: Promatrati samo po dijelovima glatke usmjerene plohe. Pritom, ako je ploha S zadana jednadžbom $z = g(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, jedno usmjerenje određuje izbor jediničnih normalnih vektora

$$\overrightarrow{n}_0(x, y) = \frac{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2}},$$

a drugo usmjerenje je onda dano vektorima $-\overrightarrow{n}_0(x, y)$.

Plohu S usmjerenu vektorima $\overrightarrow{n}_0(x, y)$ označujemo sa $\overset{\curvearrowright}{S}$, a u drugomu slučaju - sa $\overset{\curvearrowleft}{S}$.

Ako je ploha S jednostavno zatvorena, njezino usmjerenje vanjskim normalnim vektorima označujemo sa $\overset{\curvearrowleft}{S}$, a unutrašnjima - sa $\overset{\curvearrowright}{S}$.

Napokon, ponekad ćemo koristiti i oznaku $d\overrightarrow{S}$ za

$$\overrightarrow{n}_0(x, y)dS \quad \text{ili} \quad -\overrightarrow{n}_0 dS.$$

Definicija 5.12 Neka je $\overrightarrow{w} = \{w_x,\ w_y,\ w_z)\} : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidna funkcija (vektorsko polje), a $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, jednadžba usmjerive glatke plohe $S \subseteq X$, pri čemu je D zatvoreno područje rub kojega je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja.
Tada dvostruki integral

$$\iint_D \left(-w_x \frac{\partial g}{\partial x} - w_y \frac{\partial g}{\partial y} + w_z\right)(x, y, g(x,y))dxdy$$

nazivamo **plošnim integralom druge vrste** vektorskoga polja $\overrightarrow{w}$ po usmjerenoj plohi $\overset{\curvearrowright}{S}$ i označujemo s

$$\iint_{\overset{\curvearrowright}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} \quad \text{ili} \quad \iint_S \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n}_0 dS.$$

Primijetimo da su oznake posve u skladu s definicijom jer je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2} dxdy \quad \text{i}$$

$$\overrightarrow{n}_0(x,y) = \frac{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2}}.$$

Spomenimo da se plošni integral druge vrste

$$\iint_{\overset{\curvearrowright}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\,\overrightarrow{S}$$

u fizici naziva **tokom** (ili **fluksom**) vektorskoga polja $\overrightarrow{w}$ kroz plohu S.

U slučaju usmjerene po dijelovima glatke plohe $\overset{\curvearrowright}{S}$, sukladno sastavljene od usmjerenih glatkih ploha $\overset{\curvearrowright}{S}_1, \cdots, \overset{\curvearrowright}{S}_n$, odgovarajući plošni integral druge vrste definiramo kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint_{\overset{\curvearrowright}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\,\overrightarrow{S} \overset{\text{def.}}{=} \iint_{\overset{\curvearrowright}{S}_1} \overrightarrow{w} \cdot d\,\overrightarrow{S} + \cdots + \iint_{\overset{\curvearrowright}{S}_n} \overrightarrow{w} \cdot d\,\overrightarrow{S}.$$

Za plošni integral druge vrste vrijedi ovaj teorem:

Teorem 5.13 Neka su $\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne vektorske funkcije, $S \subseteq X$ usmjeriva po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je:

1) $\displaystyle\iint_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\,\overrightarrow{S} = -\iint_{\overset{\curvearrowright}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\,\overrightarrow{S};$

2) $\iint_{\overset{\frown}{S}} (\lambda \overrightarrow{w} + \mu \overrightarrow{u}) \cdot d\overrightarrow{S} = \lambda \iint_{\overset{\frown}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} + \mu \iint_{\overset{\frown}{S}} \overrightarrow{u} \cdot d\overrightarrow{S}$.

Napomena: Pridodajemo još jedan zapis plošnog integrala druge vrste. Zadamo li, formalno, jedinične normalne vektore na S pomoću njihovih smjerovnih kosinusa,

$$\overrightarrow{n}_0 = \overrightarrow{i} \cos\alpha + \overrightarrow{j} \cos\beta + \overrightarrow{k} \cos\gamma \equiv \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\},$$

pripadni plošni integral druge vrste ima zapis

$$\iint_{\overset{\frown}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{S} (w_x \cos\alpha + w_y \cos\beta + w_z \cos\gamma) dS =$$

$$\iint_{\overset{\frown}{S}} w_x dydz + w_y dzdx + w_z dxdy.$$

U svezi s tim, podsjetimo na još jedno definiranje plošnog integrala druge vrste.

Neka su dane neprekidne skalarne funkcije

$$P, Q, R : X \to \mathbb{R}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^3,$$

i dvostrana ploha $S \subseteq X$, te neka

$$\overrightarrow{n}_0 = \{\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma\}$$

označuje jedinični normalni vektor na odabranu stranu S^+ plohe S u bilo kojoj točki. Tada se pripadni plošni integral druge vrste "definira" kako slijedi:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

(Uočimo da na desnoj strani stoji plošni integral prve vrste!)

Napomena: Ako je usmjeriva glatka ploha S zadana jednadžbom $z = g(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}$, onda usmjerenje određuje jedan od jediničnih normalnih vektora

$$\pm\overrightarrow{n}_0(x,y)=\pm\frac{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\overrightarrow{i}-\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2}}.$$

Budući je

$$\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2}},$$

onda je

$$dS=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|},$$

pa je

$$\iint_{S^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=$$

$$=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=$$

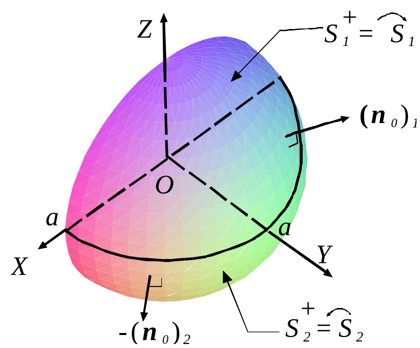
$$\iint_D(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=$$

$$\iint_D(P\frac{\cos\alpha}{|\cos\gamma|}+Q\frac{\cos\beta}{|\cos\gamma|}+R\frac{\cos\gamma}{|\cos\gamma|})dxdy.$$

Primjer 4 Izračunajmo plošni integral druge vrste

$$\iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

pri čemu je S^+ "vanjska" strana "desne" polusfere S središnje sfere zadane jednadžbom $x^2+y^2+z^2 = a^2$.



4. slika

Rastavimo "desnu" polusferu S na dvije plohe, $S = S_1 \cup S_2$, gdje je

$$S_{1,2} \ldots z_{1,2} = g_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$(x, y) \in D \ldots \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}.$$

Budući da je S^+ "vanjska strana", to je $S^+ = \overset{\curvearrowright}{S_1} \cup \overset{\curvearrowleft}{S_2}$, pa po Teoremu 5.13 slijedi

$$\iint_{S^+} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{\overset{\curvearrowright}{S_1}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} + \iint_{\overset{\curvearrowleft}{S_2}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S}$$

$$= \iint_{\overset{\curvearrowright}{S_1}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} - \iint_{\overset{\curvearrowright}{S_2}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S}.$$

Tražene parcijalne derivacije jesu

$$\frac{\partial g_{1,2}(x,y)}{\partial x} = \frac{\mp x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial g_{1,2}(x,y)}{\partial y} = \frac{\mp y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Time smo pripremili sve za za izračunavanje. Dakle,

$$\iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy =$$

$$= \iint_{S_1} (x^2 \cos\alpha_1 + y^2 \cos\beta_1 + z^2 \cos\gamma_1) dS -$$

$$\iint_{S_2} (x^2 \cos\alpha_2 + y^2 \cos\beta_2 + z^2 \cos\gamma_2) dS$$

$$= \iint_D \left(x^2 \left(-\frac{\partial g_1}{\partial x} \right) + y^2 \left(-\frac{\partial g_1}{\partial y} \right) + z^2 \right) dxdy -$$

$$\iint_D \left(x^2 \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x} \right) + y^2 \left(-\frac{\partial g_2}{\partial y} \right) + z^2 \right) dxdy$$

$$= \iint_D \left(x^2 \frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + y^2 \frac{2y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dxdy =$$

$$\overset{\text{polarne koordinate}}{=} \iint_{D_{\rho\varphi}} \left(\frac{2\rho^3 \cos^3 \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + \frac{2\rho^3 \sin^3 \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) \rho d\rho d\varphi$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \left(\left(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi \right) \int_0^a \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) d\varphi = \cdots = \frac{\pi a^4}{2}.$$

(Izračunajte ovaj plošni integral druge vrste ne rastavljajući plohu S!

Uputa: Odabere li se Y-os ”povlaštenom”, S dopušta eksplicitnu jednadžbu $y = h(z, x)$.)

Ostrogradski - Gaussova formula

Ovdje ćemo povezati trostruki integral po području $V \subset \mathbb{R}^3$ s plošnim integralom druge vrste po njegovu usmjerenu rubu $\overset{\curvearrowleft}{\partial V}$.

Teorem 5.14 (Teorem o divergenciji) Neka je

$$\overrightarrow{w} : X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^3,$$

neprekidno diferencijabilno vektorsko polje, a $V \subseteq X$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom plohom $\overset{\curvearrowleft}{S} \equiv \overset{\curvearrowleft}{\partial V}$ usmjerenom vanjskim normalama. Tada vrijedi Ostrogradski-Gaussova formula

$$\iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{w} dV = \iint_{\overset{\curvearrowleft}{\partial V}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} \quad \left(= \iint_{\partial V} \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n}_0 dS \right).$$

Napomena: Često se Ostrogradski-Gaussova formula zapisuje pomoću skalarnih funkcija. Neka su

$$P, Q, R : X \to \mathbb{R}$$

neprekidno derivabilne funkcije na okolini X zatvorenog područja $V \subset R^3$, rub ∂V kojega je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena ploha. Tada je

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint_{\partial V} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS,$$

gdje su $\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$ smjerovni kosinusi vanjske normale na plohu ∂V.

Primjer 5 Izračunajmo plošni integral druge vrste

$$\iint_{\overset{\curvearrowleft}{S}} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

po sferi $\overset{\curvearrowleft}{S}$ ... $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ usmjerenoj vanjskim normalama.

Imamo da je

$$\iint_{\overset{\curvearrowleft}{S}} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iint_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\,\overrightarrow{S},$$

pri čemu je $\overrightarrow{w} = \{w_x,\ w_y,\ w_z\}$, $w_x(x,y,z) = x^3$, $w_y(x.y.z) = y^3$ i $w_z(x,y,z) = z^3$, te da smijemo primijeniti Teorem o divergenciji. Prema tomu,

$$\iint_{\overset{\curvearrowleft}{S}} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \iint_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} =$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{w} dV = \iiint_V \left(3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right) dxdydz =$$

$$\overset{\textit{sferne koordinate}}{=} \iiint_{V_{r\theta\varphi}} 3r^2 \cdot r^2 \sin\theta \cdot drd\theta d\varphi =$$

$$3\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\sin\theta \int_0^a r^4 dr \right) d\theta \right) d\varphi = \cdots = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

Stokesova formula

Sjetimo se Greenove formule

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} Pdx + Qdy$$

kojom se dvostruki integral po ravninskom područje D prevodi na krivuljni integral druge vrste po njegovu rubu. Stavimo li $\overrightarrow{w} = \{P,\ Q\}$, dobivamo njezin vektorski zapis:

$$\iint_D \left(\operatorname{rot} \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{k}\right) dxdy = \oint_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{r} \quad \left(= \oint_{\partial D} \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{t}_0 ds\right)$$

Stokesova formula će biti poopćenje Greenove formule na prostorno vektorsko polje $\overrightarrow{w}$, plohu $S \subset \mathbb{R}^2$ i njezin rub ∂S.

Prije samoga iskaza treba definirati sukladno usmjerenje plohe i njezina ruba.

Kao što smo se već dogovorili, plohu S zadanu jednadžbom

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

usmjerenu jediničnim normalnim vektorima

$$\overrightarrow{n}_0(x,y) = \frac{-\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{1 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g(x,y)}{\partial y})^2}}$$

označujemo sa $\overset{\curvearrowright}{S}$, a usmjerenu normalama $-\overrightarrow{n}_0(x,y)$ - sa $\overset{\curvearrowleft}{S}$. Usmjerimo rub ∂D (po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu ravninsku krivulju) područja D pozitivno, tj. kao $\overset{\curvearrowleft}{\partial D}$ ("pravilo desne ruke" kad je palac usmjeren kao vektora $\overrightarrow{k}$), pa mu pridijelimo parametrizaciju (s porastom parametra)

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial D} ... x = \phi(t), y = \psi(t), \quad t \in [a,b].$$

Budući da se rub ∂S (po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja) okomito projicira na ∂D i S dopušta parametrizaciju

$$S ... r(x,y) = (x, y, g(x,y)), \quad (x,y) \in D,$$

to se usmjerenje s $\overset{\curvearrowleft}{\partial D}$ "prenosi" na ∂S (porastom parametra), označimo ga kao $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$, tj.

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial S}...r(\phi(t),\psi(t)) \equiv \rho(t) =$$

$$= (\phi(t),\psi(t),g(\phi(t),\psi(t))), \quad t \in [a,b].$$

Pritom govorimo da su ploha $\overset{\curvearrowright}{S}$ i njezin rub $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$ **sukladno usmjereni**.

Dakako, u slučaju negativnoga usmjerenja $\overset{\curvearrowright}{\partial D}$ dobivamo odgovarajuće usmjereni rub $\overset{\curvearrowright}{\partial S}$, pa i tada kažemo da su ploha $\overset{\curvearrowleft}{S}$ i njezin rub $\overset{\curvearrowright}{\partial S}$ sukladno usmjereni. Primijetimo da se u oba slučaja radi o poštivanju "pravila desne ruke" kad je palac usmjeren kao normalni vektor.

Teorem 5.15 (Stokesov teorem) Neka je $\overrightarrow{w} : X \to \mathbb{R}^3$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno diferencijabilna vektorska funkcija, $\overset{\curvearrowright}{S} \subseteq X$ usmjerena po dijelovima glatka ploha, a $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$ sukladno joj usmjereni rub koji je po dijelovima glatka jednostavno zatvorena krivulja. Tada vrijedi **Stokesova formula**

$$\iint_{\overset{\frown}{S}} \operatorname{rot} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{\overset{\frown}{\partial S}} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{r} \quad \left(= \oint_{\partial S} \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{t}_0 ds \right).$$

Napomena: Kako za Greenovu tako se i za Stokesovu formulu često rabi skalarni zapis. U tu svrhu, neka su

$$P, Q, R : X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^3,$$

neprekidno derivabilne funkcije, a $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha s rubom ∂S po dijelovima glatkom jednostavno zatvorenom krivuljom. Tada se pripadna Stokesova formula zapisuje kako slijedi:

$$\oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS,$$

pri čemu su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ smjerovni kosinusi normalnih vektora na plohu S sukladno usmjereni s rubom ∂S.

Primjer 6 Izračunajmo cirkulaciju vektorskog polja

$$(x, y, z) \mapsto \overrightarrow{w}(x, y, z) = \left\{x^2y^3,\ 1,\ z\right\}$$

duž usmjerenoga ruba $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$ plohe S zadane jednadžbom $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

Najprije, iz dane jednadžbe slijedi

$$S ... z = g(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2},$$

$$(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Budući da sukladno usmjerenje (s rubom $\overset{\curvearrowleft}{\partial S}$) na S znači $\overset{\curvearrowright}{S}$ usmjerenu normalama $\overrightarrow{n}_0$ (s obzirom na g), to

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}},$$
$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$$

povlači

$$\overrightarrow{n}_0(x,y) = \left\{ \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2-x^2-y^2}}{\sqrt{2}} \right\} \quad \text{i}$$

$$dS = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dxdy.$$

Tako dobivamo

$$\iint_{\overset{\frown}{S}} \operatorname{rot} \overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{\partial \overset{\frown}{S}} w_x dx + w_y dy + w_z dz \overset{\text{Stokesova formula}}{=}$$

$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \cos\beta + = \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS =$$

$$= \iint_D \left((0-0)\frac{x}{\sqrt{2}} + (0-0)\frac{y}{\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. (0 - 3x^2y^2)\frac{\sqrt{2-x^2-y^2}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dxdy =$$

$$= -3 \iint_D x^2 y^2 dx dy \overset{\textit{polarne koordinate}}{=}$$

$$-3 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \int_0^2 \rho^5 d\rho \right) d\varphi = -\pi.$$