Diferencijalni i integralni račun 2

Borka Jadrijević

PREDAVANJA: srijeda, 15:00 – 18:00

KONZULTACIJE: utorak, 11:00 – 12:00
srijeda, 17:00 – 18:00

Sadržaj:

Literatura:

Udžbenici:

- N. Uglešić, Viša matematika, II, str 235.-339., http://www.pmfst.hr/zavodi/matematika/scripta/visa_matematika.pdf;
- B. Červar, B. Jadrijević, *Matematika 2*, interna skripta, Fesb, Split 2006 ;
- I. Slapničar, M.Matić, Matematika 2, http://www.fesb.hr/mat2;
- Petar Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2000.;
- Luka Krnić i Zvonimir Šikić, *Račun diferencijalni i integralni, I*. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1993.;
- J. Steward, *Calculus: concepts and contexts*, ITP, Pacific Grove, 1998.;

Zbirke zadataka:

- B. P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.;
- A. Borozan, N. Duković, G. Gyramati-Pavlić, I. Hang, P. Keglević, B. Kronfeld, V. Mardešić, I. Matulić-Bendić, D. Stošić, *Riješeni zadaci iz više matematike, svezak III,* Školska knjiga, Zagreb, 1975.;
- M. Antunac-Majcen, A. Borozan, V. Devidé, M. Dejanović-Strižak, N. Duković, G. Gyramati-Pavlić, B. Kronfeld, V. Mardešić, I. Matulić-Bendić, D. Stošić, *Riješeni zadaci iz više matematike, svezak IV,* Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Obveze:

- predavanja ($\geq 70\%$)
- vježbe ($\geq 70\%$)

Provjere znanja:

- *domaće zadaće*;
- *dva kolokvija (parcijalna ispita):*

- zadaci;
- oba pozitivna.

- *završni ispit:*

- pismeni - dva dijela - oba pozitivna;
- usmeni ispit.

1. FUNKCIJE VIŠE VARIJABLA

1.1 Zadavanje skalarnih funkcija

Definicija 1.1 Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Funkciju

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazivamo realnom funkcijom od m realnih varijabla (ili, kraće, skalarnom funkcijom).

$$T \equiv (x_1, x_2, ..., x_m) \in D \ \xrightarrow{f} \ u = f\,(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}$$

(Svakoj uređenoj $m-$torci $(x_1, x_2, ..., x_m) \in D$ (ili točci $T \in D$) pravilom f pridružen je jedan i samo jedan realan broj $u \in \mathbb{R}.)$

Kao i funkciju jedne varijable, funkciju više varijabla (skalarnu funkciju) možemo zadati **analitički, tablično, grafički, parametarski, implicitno**, ...

Dakle:

- Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazivamo funkcijom dviju varijabla.

$$(x,y) \in D \ \xrightarrow{f} \ z = f(x,y) \in \mathbb{R}$$

– $f\,[D] = \{\ z \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$ – slika funkcije,

– $x,\ y$ – nezavisne varijable,

– z – zavisna vrijabla.

Funkciju obično zadajemo u eksplicitnom obliku

$$z = f(x,y).$$

Budući da, u tom slučaju, nije naznačena domena, podrazumijevamo da je domena maksimalan podskup D_f od $\mathbb{R}^2$ za koji pravilo f "ima smisla".

Skup

$$\Gamma_f = \{\ (x,y,f(x,y))\ \mid (x,y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

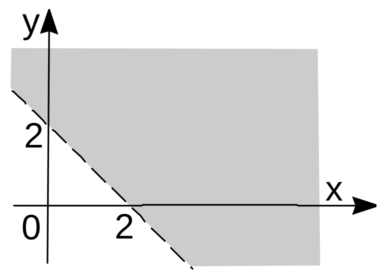
nazivamo graf funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Graf u prostoru $\mathbb{R}^3$ predstavlja neku plohu.

Primjer 1.1 Zapis $z = \ln(x+y-2)$ definira funkciju

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ \ D_f \subseteq \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = \ln(x+y-2),$$

pri čemu je definicijsko područje D_f određeno nejednadžbom $x + y - 2 > 0$, tj.

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x + 2\right\}$$



- Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Funkciju

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

nazivamo funkcijom triju varijabla.

$$(x, y, z) \in D \ \xrightarrow{f} \ u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

- $f\,[D] = \{\ u \ \mid u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D\}$ $-$ slika funkcije,
- $x,\ y,\ z$ $-$ nezavisne varijable,
- u $-$ zavisna vrijabla.
- $u = f(x, y, z)$ $-$ eksplicitni oblik (domena D_f - maksimalan podskup od $\mathbb{R}^3$ za koji pravilo f ima smisla)

- graf funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je

  $\Gamma_f = \{\ (x,\ y,\ z,\ f(x,y,z))\ \mid (x,y,z) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^4$

  (ne možemo nacrtati)

Primjer 1.2 Pravilo $u = \arcsin(x^2+y^2+z^2-2)$ definira funkciju

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \arcsin(x^2+y^2+z^2-2),$$

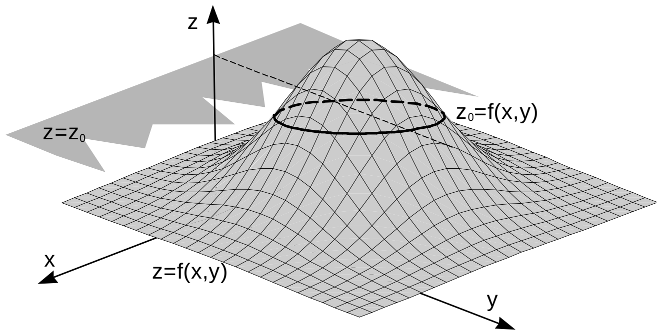
pri čemu je definicijsko područje D_f određeno nejednadžbama $-1 \le x^2+y^2+z^2-2 \le 1$. Dakle,

$$D_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 3\right\}.$$

Graf Γ_f skalarne funkcije moguće je nacrtati (djelomično) samo za $m \le 2$.

- U slučaju $m = 2$ crtanjem ističemo samo neke njegove važne podskupove. To su, najčešće, presjeci Γ_f odabranim ravninama u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ako su te ravnine usporedne s ravninom $z = 0$ (koordinatnom xy-ravninom), dobivene presjeke nazivamo **razinskim krivuljama** funkcije f (ili grafa

Γ_f). Po tomu, svaki broj $z_0 \in f[D]$ određuje jednu razinsku krivulju jednadžbom $f(x,y) = z_0$.



Dakle, na svakoj razinskoj krivulji su funkcijske vrijednosti nepromijenjive.

Primjer 3 Funkcijski graf Γ_f za funkciju

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

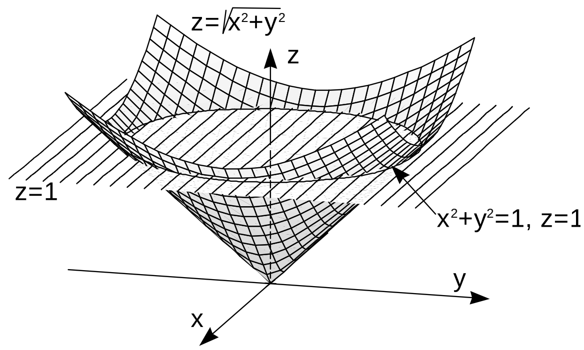
crtamo ističući njegove presjeke s koordinatnim ravninama ili ravninama usporednim s njima:

- – ravninom $x = 0$ (to su zrake: $z = y$, $z \geq 0$, $x = 0$; $z = -y$, $z \geq 0$, $x = 0$);

  – ravninom $y = 0$ (to su zrake: $z = x$, $z \geq 0$, $y = 0$; $z = -x$, $z \geq 0$, $y = 0$);

  – ravninom $z = 1$ (to je razinska krivulja (kružnica) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$).

Primijetimo da je Γ_f stožasta ploha



- Slično se u slučaju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim plohama** (ili **nivo-plohama**) funkcije f. Pritom svaka jednadžba

$$f(x, y, z) = u_0, \ \ u_0 \in f\left[D\right],$$

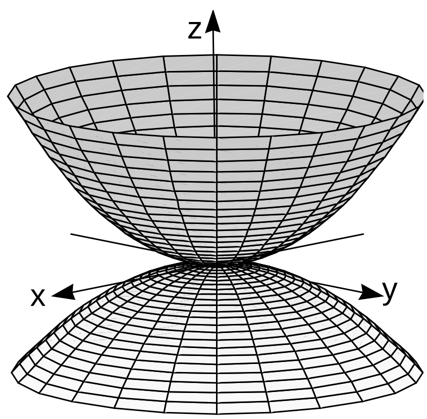
određuje točno jednu pripadnu razinsku plohu na kojoj su sve funkcijske vrijednosti jednake u_0.

Primjer 1.3 Razinske plohe za funkciju

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\} \ ,$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z},$$

su paraboloidi (bez "tjemena") $z = \frac{1}{u_0}\left(x^2 + y^2\right)$, za $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Za $u_0 = 0$ dobivamo $z-$os ($x = 0$, $y = 0$) bez točke ishodišta $O \equiv (0, 0, 0)$.

Promatrajmo funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 \equiv (x_0, y_0) \in D$.

Neka je Π_{y_0} ravnina $y = y_0$ i označimo s $D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D$. Očito je $D_{y_0} = \{T \equiv (x, y_0) \in D\} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku T_0. Suženje

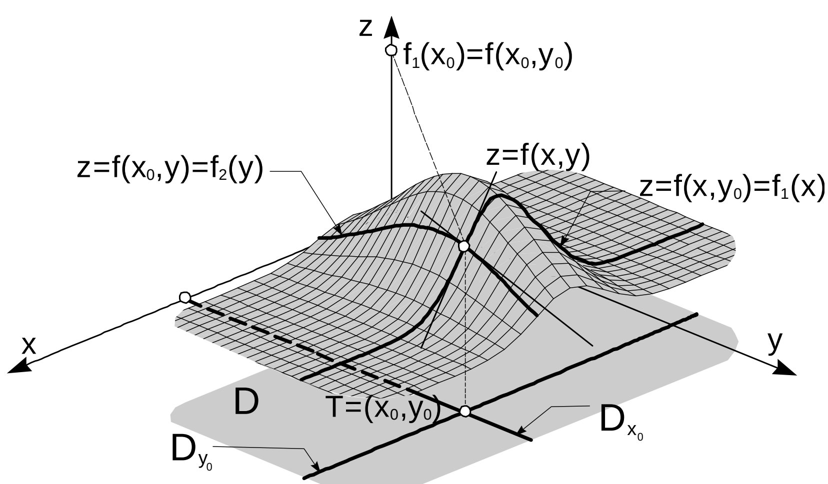
$$f|_{D_{y_0}} \equiv f_1 : D_{y_0} \to \mathbb{R}$$

smijemo smatrati funkcijom jedne varijable jer se mijenja samo koordinata x.

Analogno imamo funkciju

$$f|_{D_{x_0}} \equiv f_2 : D_{x_0} \to \mathbb{R}$$

koju možemo smatrati funkcijom varijable y.



Slično, neka je dana funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ i neka točka $T_0 \equiv \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in D$. Promotrimo skup

$$D_{T_0,i} = \{T \equiv (x_1, x_2, ..., x_m) \in D \mid x_j = x_j^0,\ i \neq j\} \subseteq D$$

Uočimo da je u $D_{T_0,i}$ promjenjiva samo jedna koordinata, pa ga možemo smatrati podskupom od $\mathbb{R}$ (dio pravaca u $\mathbb{R}^m$).

Suženje

$$f\mid_{D_{T_0,i}} \equiv f_{T_0,i} : D_{T_0,i} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tada smijemo smatrati funkcijom jedne varijable.

Reći ćemo da je skalarna funkcija f **(strogo) uzlazna (silazna, monotona, po djelovima monotona) po varijabli** x_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, ako je za svaku točku $T \equiv (x_1, x_2, ..., x_m) \in D$, pripadno suženje

$$f_{T,i} : D_{T,i} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uzlazna (silazna, monotona, po djelovima monotona) funkcija.

1.2. Granična vrijednost i neprekidnost

Najprije treba definirati što u $\mathbb{R}^m$ znači "**biti blizu**", tj. što će biti "**mala okolina**" po volji odabrane točke.

Poslužit ćemo se standardnom udaljenošću $d(T, T_0)$ među točkama, tj.

- koja se za $T = (x), T_0 = (x_0)$ (slučaj $m = 1$) svodi na standardnu udaljenost u $\mathbb{R}$

$$d(T, T_0) = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0|.$$

- za $T = (x, y)\,, T_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sa

$$d\,(T, T_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

- za $T = (x, y, z)\,, T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ sa

$$d\,(T, T_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

- općenito, za $T = (x_1, x_2, ..., x_m)\,, T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in \mathbb{R}^m$ udaljenost $d(T, T_0)$ definiramo sa

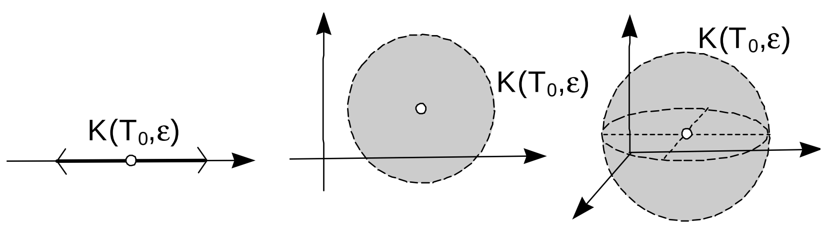
$$d\,(T, T_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2}.$$

Definicija 1.2

i) Za bilo koju točku $T_0 \in \mathbb{R}^m$ i bilo koji broj $\varepsilon > 0$, skup

$$K(T_0; \varepsilon) \equiv \{T \in \mathbb{R}^m \mid d\,(T_0, T) < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

nazivamo (otvorenom) **kuglom** polumjera ε oko točke T_0.

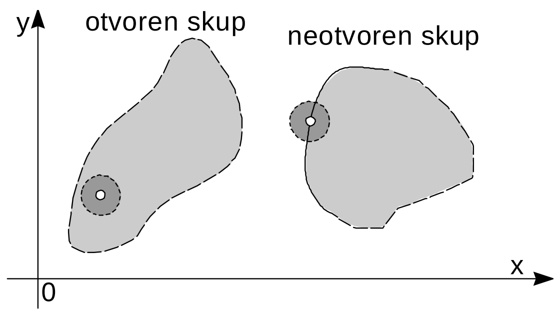


Kugle

ii) Reći ćemo da je skup $U \subseteq \mathbb{R}^m$ **okolina** točke $T_0 \in U$ ako postoji neki $\varepsilon > 0$ takav da je kugla $K(T_0; \varepsilon) \subseteq U$.

iii) Za skup $U \subseteq \mathbb{R}^m$ reći ćemo da je **otvoren** ako je on unija neke množine (otvorenih) kugala.

<u>Napomena:</u> Ako je skup $D \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvoren onda je on okolina svake svoje točke. Neotvoreni skup sadrži točke kojima nije okolina .



Definicija 1.3

i) Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^m$ i $T_0 \in \mathbb{R}^m$. Reći ćemo da je točka T_0 **gomilište** skupa D ako svaka okolina od T_0 siječe skup $D \setminus \{T_0\}$.

ii) Za skup D kažemo da je **zatvoren** ako sadrži sva svoja gomilišta.

iii) Za točku $T \in D$ kažemo da je **unutarnja točka** skupa D ako postoji okolina od T koja je podskup od D.

iv) Ako za točku $T \in D$ postoji neka okolina koja ne siječe skup $D \setminus \{T\}$ onda kažemo da je T **izolirana točka** skupa D.

v) Napokon, reći ćemo da je skup D **omeđen** ako postoji neka kugla koja ga sadrži.

Napomena:

- Svaka točka $T \in D \subseteq \mathbb{R}^m$ je ili gomilište skupa D ili izolirana točka skupa D. Svaka unutarnja točka skupa D je gomilište skupa D;

- Skup može imati gomilišta koja nisu njegovi elementi;

- Ima skupova koji nisu ni zatvoreni ni otvoreni;

- Svaki zatvoren skup u $\mathbb{R}^m$ je komplement nekog otvorenog ili obrnuto.

Graničnu vrijednost niza (T_n) u $\mathbb{R}^m$ definiramo analogno onoj za realne nizove.

Definicija 1.4 Reći ćemo da je točka $T_0 \in \mathbb{R}^m$ **granična vrijednost** (ili **limes**) niza $\{T_n\}$ u $\mathbb{R}^m$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$n \geq n_o \Rightarrow d\left(T_n, T_0\right) < \varepsilon.$$

(Primijetimo da se nejednakost $d\left(T_n, T_0\right) < \varepsilon$ ekvivalentna uvjetu $T_n \in K(T_0; \varepsilon)$!).

U tom slučaju kažemo da niz $\{T_n\}$ konvergira prema točki T_0 i pišemo $\{T_n\} \to T_0$. Budući da svaki niz može imati najviše jednu graničnu vrijednost (dokaz sličan onomu za realne nizove), smijemo pisati

$$\lim_{n \to \infty} T_n = T_0.$$

Nizovna konvergencija u $\mathbb{R}^m$ svodi se na konvergenciju realnih nizova. Naime, vrijedi:

Teorem 1.5 Niz $\{T_n\}$ u $\mathbb{R}^m$, $T_n \equiv \left(x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n\right)$, konvergira prema $T_0 \equiv \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in \mathbb{R}^m$ onda i samo onda, ako svaki koordinatni niz $\{x_i^n\}$ u $\mathbb{R}$ konvergira prema $x_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Primjer 1.4 Nađite graničnu vrijednost niza $\{T_n\}$ u $\mathbb{R}^3$, $T_n \equiv \left(\frac{1-n}{n+1}, \frac{1}{n^2+1}, \frac{n}{n+1}\right)$.

Budući je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n+1} = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

po prethodnom teoremu je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-n}{n+1}, \frac{1}{n^2+1}, \frac{n}{n+1}\right) = (-1, 0, 1).$$

I graničnu vrijednost skalarne funkcije definiramo analogno onoj za realne funkcije (jedne) realne varijable.

Intuitivno:

Neka su dani funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, i točka T_0 koja je gomilište od D. Kažemo da je $L_0 \in \mathbb{R}$ limes funkcje f u T_0, i pišemo

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = L_0,$$

ako vrijednosti $f(T)$ teže prema L_0 kad T teži prema T_0.

Matematička definicija:

Definicija 1.6 Neka su dani funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, i točka T_0 koja je gomilište od D. Reći ćemo da je broj $L_0 \in \mathbb{R}$ **granična vrijednost funkcije** f **u točki** T_0 ako je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in D \setminus \{T_0\})$$

$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow |f(T) - L_0| < \varepsilon.$$

(Primijetimo da se uvjet provjerava u točkama $T \in K(T_0; \delta)$, $T \neq T_0$!)

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = L_0 \quad \textbf{ili} \quad \lim_{T_0} f(T) = L_0.$$

Analogno se poopćuje i granična vrijednost kad $T \to \infty$.

Primjer 1.5 Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

ima u točki $(0,0)$ graničnu vrijednost 0, $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$.

Zaista, budući da je $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, to je

$$\lim_{(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\leq \lim_{(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{2xy} \right| = \lim_{(0,0)} \left| \frac{x}{2} \right| = 0,$$

pa je i $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$.

Teorem 1.7 Broj $L_0 \in \mathbb{R}$ je granična vrijednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, u točki T_0, $\lim\limits_{T \to T_0} f(T) = L_0$, onda i samo onda ako, za svaki niz $\{T_n\}$ u D koji konvergira prema T_0 u $\mathbb{R}^m$, $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = T_0$, pripadni funkcijski niz vrijednosti $\{f\,(T_n)\}$ konvergira prema L_0 u $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(T_n) = L_0$.

Teorem vrijedi i za $T \to \infty$.

Napomena: Teorem 1.7 kaže da se traženje graničnih vrijednosti skalarnih funkcija može svesti na traženje graničnih vrijednosti realnih nizova.

Primjer 1.6 Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

nema granične vrijednosti u točki $T_0 \equiv (0,0)$.

Zaista, promatramo li nizove

$$\{T_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\} \quad i \quad \{S_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \right\}$$

u $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Očito je:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = (0,0) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, 0 \right) = (0,0)$$

tj. oba niza konvergiraju prema točki $T_0 \equiv (0,0)$. S druge strane, pripadni nizovi funkcijskih vrijednosti

$$\{f(T_n)\} = \left\{ \frac{(\frac{1}{n})^2 - (\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} \right\} \to 0, \quad \{f(S_n)\} = \left\{ \frac{(\frac{1}{n})^2 - 0^2}{(\frac{1}{n})^2 + 0^2} \right\} \to 1,$$

konvergiraju redom prema (različitim) brojevima 0 i 1, redom.

Napomena Kod funkcija jedne varijable smo imali:
$\exists \lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x)$ i $\exists \lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x)$ i
$\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = L \implies \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$,

Ovdje (za $m \geq 2$) je situacija složenija. Puteva kako "doći" u T_0 ima beskonačno. No, jasno je da limes ne smije ovisiti o putu.

Napomena 1.1 Ukoliko je

$$\lim_{\substack{T \to T_0 \\ c_1}} f(T) = L_1 \quad \text{i} \quad \lim_{\substack{T \to T_0 \\ c_2}} f(T) = L_2,$$

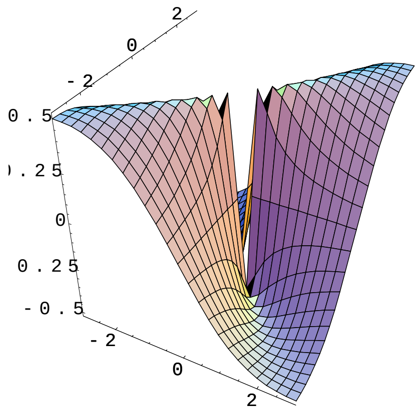
te $L_1 \neq L_2$ tada $\lim\limits_{T \to T_0} f(T)$ ne postoji. Ovo je postupak kako utvrditi da limes ne postoji (to je puno lakše nego utvrditi da postoji).

Primjer 1.7 Ispitajte graničnu vrijednost funkcije

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

u točki $(0,0)$.

Ukoliko $(x,y) \to (0,0)$ ide po putevima koje određuju pravci $y = kx$ imamo



1.$z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{\substack{(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

i traženi limes ne postoji jer za različite k dobijamo različite vrijednosti.

Primjer 1.8 Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2},$$

ima u točki $(0,0)$ graničnu vrijednost 1, $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 1$.

Ukoliko $(x,y) \to (0,0)$ ide po putevima koje određuju pravci $y = kx$ imamo

$$\lim_{\substack{(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2+k^2x^2\right)}{x^2+k^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left[x^2\left(1+k^2\right)\right]}{x^2\left(1+k^2\right)} = 1,$$

što ne znači da limes postoji i da je jednak 1.

Zadatak se može riješiti prijelazom na polarne koordinate. Budući je $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$, tada $(x,y) \to (0,0)$ ako i samo ako $\rho \to 0$. Imamo

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} = 1.$$

Budući da dobiveni rezultat ne ovisi o φ, tj. o kutu pod kojim "dolazimo" u točku $(0,0)$, dakle ne ovisi o krivulji po kojoj dolazimo u točku $(0,0)$, zaključujemo da limes postoji i da je jednak 1.

Definicija 1.8

- Reći ćemo da je funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ **neprekidna u točki** $T_0 \in D$ ako je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T \in D)$$

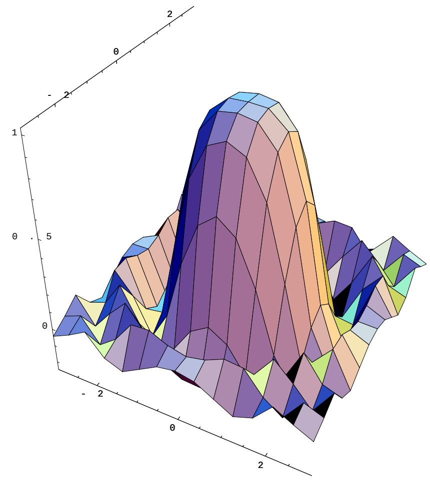
$$d(T, T_0) < \delta \Rightarrow |f(T) - f(T_0)| < \varepsilon.$$

- Ako je f neprekidna u svakoj točki $T \in A \subseteq D$ kažemo da je f **neprekidna funkcija na skupu** $A \subseteq D$;
- Ako je f neprekidna na skupu $A = D$ kažemo da je f **neprekidna funkcija**;
- U protivnim slučajevima govorimo o **prekidnoj** funkciji (u točki, na skupu).

<u>Izravna posljedica:</u>

Teorem 1.9 Funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ neprekidna u točki $T_0 \in D$ onda i samo onda ako je

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = f(T_0)$$



2.$z = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

Primjer 1.9 Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je neprekidna. Jer je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1 = f(0,0).$$

Neka važna svojstva neprekidnih funkcija - analogija s funkcijama jedne varijable (bez dokaza):

Neka je dana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$.

- Ako je f neprekidna u točki T_0 i $f(T_0) < 0$ ($f(T_0) > 0$) onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $f(T) < 0$ ($f(T) > 0$) za svaki $T \in D \cap K(T_0; \varepsilon)$.

- Neka je $A \subseteq D$ zatvoren i omeđen. Ako je funkcija f neprekidna na A onda postoje brojevi $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je
$$m \leq f(T) \leq M$$
za svaki $T \in A$, tj. $f|_A$ je omeđena funkcija. Štoviše, $f|_A$ poprima svoju najmanju (minimum) i svoju najveću (maksimum) vrijednost, tj. postoje $T_1, T_2 \in A$ takvi da je
$$f(T_1) \leq f(T) \leq f(T_2)$$
za svaki $T \in A$.

- Zbroj $f + g$, razlika $f - g$, umnožak $f \cdot g$ i količnik $\frac{f}{g}$ (kad god su definirani) neprekidnih skalarnih funkcija jesu neprekidne skalarne funkcije.