Uvod u teoriju brojeva
1. Djeljivost

Borka Jadrijević

Sadržaj:

Literatura:

- http://www.pmfst.hr/~borka/UTB.htm;
- Andrej Dujella, *Uvod u teoriju brojeva,* skripta (PMF-MO), http://web.math.hr/~duje/utb/utblink.pdf;
- D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001

Obveze:

- predavanja ($\geq$ 70%)
- vježbe ($\geq$ 70%)

Provjere znanja:

- *dva kolokvija:*
  - oba pozitivna
  - zadaci ($\geq$ 50%)
- *ispit:*
  - pismeni i usmeni.

Uvod

- Aritmetika (računstvo) je grana matematike koja se bavi brojevima.
- Danas je češći naziv za aritmetiku teorija brojeva.
- Teorija brojeva (klasična) se bavi ponajprije prirodnim brojevima, te cijelim i racionalnim brojevima.

Neka svojstva skupa prirodnih i skupa cijelih brojeva koja ćemo koristiti:

- Na skupu $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) su definirane operacije zbrajanja i množenja koje zadovoljavaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti;
- Na skupu $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) imamo uređaj takav da za svaka dva različita elementa $m, n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) vrijedi ili $m < n$ ili $n < m$;
- Svaki neprazan podskup skupa $\mathbb{N}$ ima najmanji element i vrijedi princip matematičke indukcije;

Definicija (1.1)

Neka su $a \neq 0$ i b cijeli brojevi. Kažemo da a dijeli b, odnosno da je b djeljiv s a ako postoji cijeli broj x takav da je $b = ax$. To zapisujemo sa $a \mid b$. Broj a nazivamo djelitelj broja b, a broj b višekratnik broja a.

Ako b nije djeljiv s a onda pišemo $a \nmid b$. Oznaku $a^k \| b$ ćemo koristiti kada $a^k \mid b$ i $a^{k+1} \nmid b$.

Zadatak (1.1)

Pokažite da relacija "dijeliti" na skupu $\mathbb{Z}$ ima sljedeća svojstva:

- *za svaki cijeli broj a, $a \neq 0$, vrijedi $a \mid a$;*
- *za svaka dva cijela broja a i b vrijedi: ako $a \mid b$ i $b \mid a$ onda je $a = \pm b$. Ako su $a, b \in \mathbb{N}$, onda je $a = b$;*
- *za svaka tri cijela broja a,b, c vrijedi: ako $a \mid b$ i $b \mid c$ onda $a \mid c$.*

Zadatak (1.2)

Ako su $a, b, c \in \mathbb{Z}$, *onda iz* $a \mid b$ *i* $a \mid c$ *slijedi* $a \mid (nb + mc)$ *za bilo koja dva cijela broja* m *i* n.

Teorem (1.1 (Teorem o dijeljenju s ostatkom))

Za proizvoljan prirodan broj a *i proizvoljan cijeli broj* b *postoje jedinstveni cijeli brojevi* q *i* r *takvi da je*

$$b = aq + r \quad i \quad 0 \leq r < a.$$

Dokaz:

Definicija (1.2)

Broj $d \in \mathbb{Z}$ nazivamo zajedničiki djelitelj od a i b ako $d \mid a$ i $d \mid b$.

Ako je barem jedan od brojeva a i b različit od nule, onda postoji konačno mnogo zajedničikih djelitelja od a i b i najveći među njima nazivamo najveći zajednički djelitelj od a i b i označavamo sa

$$\gcd(a, b) \quad (\text{ili} \quad nzd(a, b)).$$

Na sličan način definiramo najveći zajednički djelitelj za bilo koji konačan skup cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a označavamo ga s $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Uočimo:

- Svaki prirodan broj $a > 1$ ima uvijek dva djelitelja 1 i a i njih nazivamo *trivijalni djelitelji*.
- $\gcd(a, b) \geq 1$.
- $\gcd(a, 0) = |a|$, za svaki $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Teorem (1.2)

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ *i barem jedan od brojeva* a *i* b *je različit od nule. Neka je*

$$S = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N},$$

tada je

$$\gcd(a, b) = \min S.$$

Dokaz:

Napomena

Uočimo: *Ako se cijeli broj* d *može prikazati u obliku*

$$d = ax + by,$$

onda je $\gcd(a, b)$ *djelitelj od* d.

Posebno, ako je $ax + by = 1$, *onda je* $\gcd(a, b) = 1$.

Definicija (1.3)

Kažemo da su cijeli brojevi a i b relativno prosti, ako je $\gcd(a, b) = 1$.

Za cijele brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ *kažemo da su relativno prosti ako je* $\gcd(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$, *a da su u parovima relativno prosti ako je* $\gcd(a_i, a_j) = 1$ *za sve* $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Propozicija (1.1)

Neka su $a, b, m \in \mathbb{Z}$. *Ako je* $\gcd(a, m) = \gcd(b, m) = 1$, *onda je* $\gcd(ab, m) = 1$.

Dokaz:

Propozicija (1.2)

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, *tada je* $\gcd(a, b) = \gcd(a, b + ax)$ *za svaki* $x \in \mathbb{Z}$.

Dokaz:

Teorem (1.3 Euklidov algoritam)

Neka su dani $a \in \mathbb{Z}$ *i* $b \in \mathbb{N}$. *Pretpostavimo da je uzastopnom primjenom Teorema 1.1 dobiven niz jednakosti*

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2 \qquad (*) \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k, \quad 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} &= r_k q_{k+1}. \end{aligned}$$

Tada je $\gcd(a, b) = r_k$, *tj.* $\gcd(a, b)$ *jednako je posljednjem ostatku različitom od* 0. *Brojevi* $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ *takvi da je*

$$\gcd(a, b) = r_k = ax_0 + by_0, \qquad (**)$$

mogu se dobiti izražavanjem svakog r_i *kao linearne kombinacije od* a *i* b.

Dokaz:

Napomena

- *U Euklidovom algoritmu smo pretpostavili da je $b > 0$ što nije bitno ograničenje jer je* $\gcd(a, b) = \gcd(|a|, |b|)$;
- *Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ i $a < b$, onda u prvom koraku imamo $a = b \cdot 0 + a$, pa a i b zamijene mjesta;*
- *Primijetimo da je (konačan) niz ostataka u (*) $r_0 = b$, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ strogo padajući niz;*
- *Primijetimo da je*

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = q_1, \qquad \left\lfloor \frac{b}{r_1} \right\rfloor = q_2, \qquad \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = q_3 \quad \ldots,$$

gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli dio od x, tj. $\lfloor x \rfloor = q$, gdje je q najveći cijeli broj $\leq x$.

- *Brojevi $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ u (**) nisu jednoznačno određeni, jer je npr.*

$$\gcd(a, b) = ax_0 + by_0 = (x_0 + b)\, a + (y_0 - a)\, b.$$

Primjer (1.1)

Odredimo $d = \gcd(252, 198)$ *i prikažimo* d *kao linearnu kombinaciju brojeva* 252 *i* 198.

Rješenja jednadžbe $\gcd(a, b) = ax + by$, mogu se dobiti iz (*) na sljedeći način: Ako je

$$\begin{aligned} r_{-1} &= a, \quad r_0 = b, \quad r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1} \\ x_{-1} &= 1, \quad x_0 = 0, \quad x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1} \\ y_{-1} &= 0, \quad y_0 = 1, \quad y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1} \end{aligned}$$

onda je

$$ax_i + by_i = r_i, \quad \text{za } i = -1, 0, 1, \ldots, r+1.$$

Formula je točna za $i = -1$ i $i = 0$, pa tvrdnju dobivamo indukcijom (sami). Posebno je

$$ax_k + by_k = r_k = \gcd(a, b).$$

Primjer (1.2)

Odredimo $d = \gcd(3587, 1819)$ *i prikažimo* d *kao linearnu kombinaciju brojeva* 3587 *i* 1819.

Propozicija (1.3)

Za broj koraka k *u Euklidovom algoritamu vrijedi* $k < 2\log_2 b$.

Jednadžbu oblika

$$ax + by = c, \tag{1}$$

gdje su a, b, c zadani cijeli brojevi kojoj tražimo cjelobrojna rješenja x i y je primjer *diofantske jednadžbe*.

Propozicija (1.4)

Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ zadani cijeli brojevi i neka je $\gcd(a, b) = d$. Diofantska jednadžba (1) ima rješenje onda i samo onda ako $d \,|c$.

Dokaz:

Napomena

Ako $d \,|c$ onda jednadžba (1) ima beskonačno cjelobrojnih rješenja. Ako je (x_1, y_1) jedno rješenje, onda su sva ostala rješenja dana sa

$$x = x_1 + \frac{b}{d}t, \qquad y = y_1 - \frac{a}{d}t,$$

gdje je $t \in \mathbb{Z}$. (Dokaz - kasnije).

Zadatak (1.3)

Odredite cijele brojeve x i y (ako postoje) takve da je

$$a)\ 93x + 81y = 3, \quad b)\ 93x + 81y = -6,$$
$$c)\ 93x + 81y = 5, \quad d)\ 71x + 50y = 1.$$

Uočimo:

- Svaki prirodan broj $a > 1$ ima uvijek dva djelitelja 1 i a i njih nazivamo *trivijalni djelitelji*.

Definicija (1.4)

- *Za prirodan broj $p > 1$ kažemo da je prost broj (ili prim broj) ako nema niti jednog djelitlja d takvog da je $1 < d < p$, tj. ako ima samo trivijalne djelitelje;*
- *Prirodan broj $a > 1$ koji nije prost nazivamo složen broj.*

Napomena

- *Prvi prosti brojevi su:* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...
- *Ako je prirodan broj a složen, tada postoje prirodni brojevi m_1 i m_2, $2 \leq m_i < a$, $i = 1, 2$, takvi da je $a = m_1 m_2$.*

Ako želimo naći sve proste projeve $\leq a$, koristimo jednostavni postupak kojeg nazivamo **Eratostenovo sito:**

- Ispišemo, po redu, sve prirodne brojeve od 1 do a;
- Križamo 1;
- Zaokružimo 2 (prost) i križamo sve prave višekratnike od 2;
- Prvi preostali 3 (prost) zaokružimo i križamo sve prave višekratnike od 3 (koji nisu već prekriženi);
- Prvi preostali 5 (prost) zaokružimo i križamo sve prave višekratnike od 5 (koji nisu već prekriženi);
- ....
- Algoritam završava u konačno koraka, a zaokruženi brojevi su prosti.

Zadatak (1.4)

Nađimo sve proste brojeve ≤ 60 *pomoću Eratostenovog sita.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Teorem (1.4)

Svaki prirodan broj $n > 1$ *može se prikazati kao produkt prostih brojeva (s jednim ili više faktora).*

Dokaz:

Iz Teorema 1.4 slijedi: Za svaki prirodan broja n postoji prikaz u obliku

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, \tag{2}$$

gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ svi različiti prosti brojevi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Broj $\alpha_i \in \mathbb{N}$ nazivamo *kratnošću* prostog broja p_i, a prikaz (2) *kanonski rastav* broja n na proste faktore.

Propozicija (1.5)

Ako je p prost broj i $p \mid ab$, onda $p \mid a$ ili $p \mid b$. Općenitije, ako $p \mid a_1 a_2 \ldots a_k$, onda postoji barem jedan a_i takav da $p \mid a_i$.

Dokaz:

Teorem (1.5 Osnovni teorem aritmetike)

Faktorizacija svakog prirodnog broja $n > 1$ na proste faktore je jedinstvena do na poredak prostih faktora.

Dokaz:

Dakle, iz Teorema 1.4 i Teorema 1.5 slijedi da postoji jedinstven zapis (rastav) prirodnog broja $n > 1$ oblika

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdje su $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ svi prosti faktori od n i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Često pišemo

$$n = \prod_{p-prost} p^{\alpha(p)},$$

gdje je $\alpha(p) \geq 0$ i $\alpha(p) = 0$ za gotovo sve proste brojeve.
Ako je $n = 1$, onda su svi $\alpha(p) = 0$.

Neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$a = \prod_p p^{\alpha(p)}, \quad b = \prod_p p^{\beta(p)}, \quad c = \prod_p p^{\gamma(p)}.$$

Ako je

$$ab = c,$$

tada je po Teoremu 1.5

$$\alpha(p) + \beta(p) = \gamma(p) \quad \text{za sve } p.$$

Dakle, ako

$$a \,|\, c\ ,$$

tada je

$$\alpha(p) \leq \gamma(p) \quad \text{za sve } p.$$

Obrnuto, ako je

$$\alpha(p) \leq \gamma(p) \quad \text{za sve } p,$$

definiramo prirodan broj $b = \prod_p p^{\beta(p)}$, gdje je $\beta(p) = \gamma(p) - \alpha(p)$ za sve p. Tada je

$$ab = c, \text{ tj. } a \,|\, c\ .$$

Zaključujemo:

$$a \mid c \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(p) \leq \gamma(p) \quad \text{za sve } p. \tag{3}$$

Posljedica od (3):

$$\gcd(a, b) = \prod_p p^{\min\{\alpha(p), \beta(p)\}} \tag{4}$$

Definicija (1.5)

Ako su cijeli brojevi a i b različiti od 0, onda najmanji prirodan c broj takav da $a \mid c$ i $b \mid c$ nazivamo najmanji zajednički višekratnik od a i b i označavamo sa $\operatorname{lcm}(a, b)$ (ili $nzv(a, b)$).

Na sličan način definiramo najveći zajednički višekratnik za bilo koji konačan skup cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a označavamo ga sa $\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Iz (3) slijedi:

$$\operatorname{lcm}(a, b) = \prod_p p^{\max\{\alpha(p), \beta(p)\}} \tag{5}$$

Propozicija (1.6)

Neka su a i b cijeli brojevi, tada je

$$\gcd(a, b) \cdot \operatorname{lcm}(a, b) = |ab| .$$

Dokaz:

Zadatak (1.5)

Odredite

$$a)\ \operatorname{lcm}(482, 1687) \qquad b)\ \operatorname{lcm}(1400, 2420) .$$

Definicija (1.6)

- *Kažemo da je prirodan broj a (potpun) kvadrat ako se može zapisati u obliku n^2, $n \in \mathbb{N}$;*
- *Kažemo da je prirodan broj a kvadratno slobodan ako je 1 najveći kvadrat koji dijeli a;*

Uočimo: Neka je $a = \prod_p p^{\alpha(p)} \in \mathbb{N}$. Iz Teorema 1.5 slijedi:

- a potpun kvadrat $\Leftrightarrow \alpha(p)$ paran za sve p;
- a kvadratno slobodan $\Leftrightarrow \alpha(p) = 0$ ili $\alpha(p) = 1$ za sve p;
- ako je p prost, onda je: $p^k \| a \Leftrightarrow k = \alpha(p)$.

Zadatak (1.6)

Dokažite da svaki složen broj n ima prosti faktor $p \leq \sqrt{n}$.

Uočimo: U Zadatku 1.4 (Eratostenovo sito) algoritam je gotov već nakon križanja višekratnika od 7 jer je $\sqrt{60} < 11$.

Teorem (1.6 Euklid)

Skup svih prostih brojeva je beskonačan.

Dokaz:

Primjer (1.3)

Može se pokazati da za svaki realan broj $y \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p} > \ln \ln y - 1.$$

Iz ovoga direktno slijedi da red $\sum_{p-prost} \frac{1}{p}$ divergira, što je još jedan dokaz da prostih brojeva ma beskonačno mnogo.

Napomena

Ako za $x \in \mathbb{R}$ sa $\pi(x)$ označimo broj prostih brojeva koji su $\leq x$, onda je[a]

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad \textit{(Teorem o prostim brojevima (PNT)).}$$

Ovo je prvi naslutio Gauss (1792. god. - u svojoj petnaestoj godini), a dokazali su neovisno Hadamar i de la Vallée Poussin 1896.

---

[a] Neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$. Pišemo:

$$f(x) \sim g(x) \text{ ako je } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- Postoje metode za točno računanje $\pi(x)$, ako je x dovoljno malen. Spomenuti račun daje:

$$\begin{aligned}
\pi(10) &= 4 \\
\pi\left(10^2\right) &= 25 \\
\pi\left(10^8\right) &= 5\ 761\ 455 \\
\pi\left(10^{18}\right) &= 24\ 739\ 954\ 287\ 740\ 860 \\
\pi\left(10^{20}\right) &= 2\ 220\ 819\ 602\ 560\ 918\ 840 \\
\pi\left(10^{25}\right) &= 176\ 846\ 309\ 399\ 143\ 769\ 411\ 680
\end{aligned}$$

  Nitko još nije našao sve proste brojeve manje od 10^{25}, ali broj $\pi\left(10^{25}\right)$ je točan (trenutni rekord!).

- Bez ocjene greške

$$\left|\pi(x) - \frac{x}{\ln x}\right|,$$

  ne možemo precizno procijeniti broj prostih brojeva s danim brojem znamenaka.

Chebyshev (1850. god.) je dao ocjenu za $\pi(x)$ prije nego je *Teorem o prostim brojevima (PNT)* dokazan.

Pokazao je, ako je x velik, da tada vrijedi

$$0,9 \cdot \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1,1 \cdot \frac{x}{\ln x}.$$

Procijenimo broj postih brojeva p sa 100 znamenaka ($10^{99} < p < 10^{100}$). Imamo

$$0,9 \cdot \frac{10^{99}}{\ln 10^{99}} < \pi(10^{99}) < 1,1 \cdot \frac{10^{99}}{\ln 10^{99}},$$

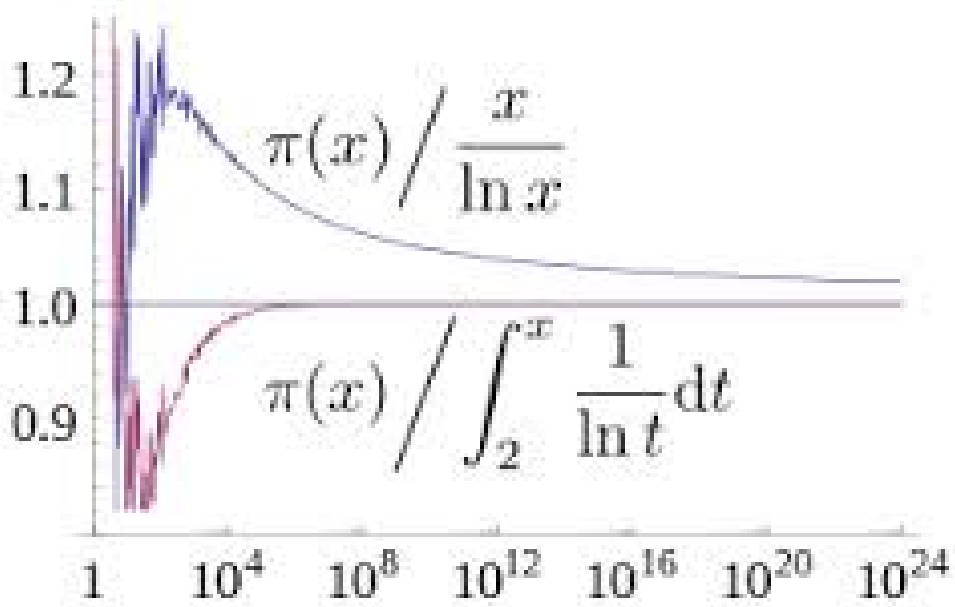
$$0,9 \cdot \frac{10^{100}}{\ln 10^{100}} < \pi(10^{100}) < 1,1 \cdot \frac{10^{100}}{\ln 10^{100}}$$

Sada je lako dati ocjenu za $\pi(10^{100}) - \pi(10^{99})$, što je upravo broj prostih brojeva sa 100 znamenaka:

$$3,42 \cdot 10^{97} < \pi(10^{100}) - \pi(10^{99}) < 4,38 \cdot 10^{97}.$$

Još bolja aproksimacija od $\pi(x)$ je

$$li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \qquad \text{- } \textit{logaritamsko-integralna funkcija.}$$



Teorem o prostim brojevima (PNT) je ekvivalentan s

$$\pi(x) \sim li(x),$$

jer, po L'Hospitalovom pravilu, direktno dobivamo $\lim_{x \to \infty} \frac{li(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$.

Primjer (1.4)

Neka je broj $2^k + 1$ *prost. Dokažimo da je tada* $k = 0$ *ili* $k = 2^n$ *za neki* $n \in \mathbb{N}$.

Napomena

Brojevi oblika

$$f_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

nazivaju se Fermatovi brojevi.

Fermat je mislio da su svi ovi brojevi prosti. Međutim

$$f_0 = 3, \quad f_1 = 5, \quad f_2 = 17, \quad f_3 = 257, \quad f_4 = 65537$$

su prosti, ali je složen

$$f_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700\,417.$$

Slutnja: Samo je konačno mnogo Fermatovih brojeva prosto.

Primjer (1.6)

Neka je broj $2^n - 1$ prost. Dokažimo da je tada i n prost broj.

Napomena

Brojevi oblika

$$M_p = 2^p - 1, \quad p \text{ prost},$$

nazivaju se Mersennovi brojevi.
Neki Mersennovi brojevi su prosti, kao npr. $M_7 = 127$, a neki su složeni, kao npr. $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

Slutnja: Beskonačno mnogo Mersennovi brojeva je prosto.

Zanimljivost: Najveći do danas pronađen prosti broj je

$$M_{57885161} = 2^{57885161} - 1$$

koji ima 17425170 znamenaka (to je Mersenneov 48. prost broj a pokazano je da je prost u siječnju 2013. godine - korištenjem testova prostosti za brojeve specijalnog oblika).