6. Diofantske aproksimacije

Diofantska jednadžba - algebarska (polinomijalna) jednadžba s dvjema ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima, kojoj se traže cjelobrojna ili racionalna rješenja.

Diofantske aproksimacije - ispituju koliko se dobro iracionalni brojevi mogu aproksimirati racionalnima.

Diofantska analiza - proučavanje diofantskih jednadžbi. Tu se isprepliću se dva različita ali usko povezana područja: diofantske aproksimacije i diofantske jednadžbe.

Primjer: Promatrajmo (diofantsku) jednadžbu

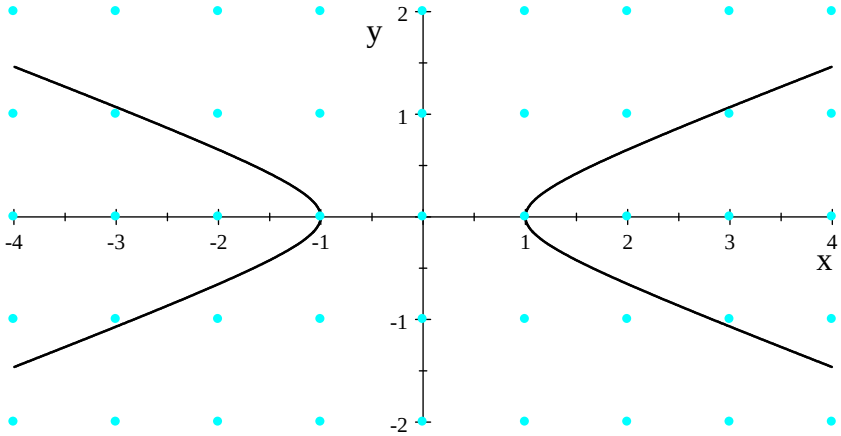
$$x^2 - 7y^2 = 1, \tag{1}$$

Želimo joj naći rješenja u cijelim brojevima. Očito, $(x, y) = (\pm 1, 0)$ su *(trivijlana*) rješenja.

Pitanja:

- Postoji li i neko netrivijlano rješenje?
- Postoji li beskonačno cjelobrojnih rješenja?
- Postoji li algoritam za nalaženje svih cjelobrojnih rješenja?

Sljedeći graf (hiperbola) opisuje sva realna rješenja od (1):



Cjelobrojna rješenja dobivamo presjekom ovog grafa s cjelobrojnom rešetkom.
Uočimo da je $(x, y) = (8, 3)$ cjelobrojno rješenje od (1). Dakle, postoji i netrivijlano rješenje od (1):

$$8^2 - 7\,(3)^2 = \left(8 - 3\sqrt{7}\right)\left(8 + 3\sqrt{7}\right) = 1,$$

pa je

$$\frac{8}{3} - \sqrt{7} = \frac{1}{3\left(8 + 3\sqrt{7}\right)} = 0.02091\,5\ldots\,.$$

Vidimo, da je racionalan broj $\frac{8}{3}$ jako blizu iracionalnom broju $\sqrt{7}$, tj. da cjelobrojno rješenje jednadžbe (1) inducira jako dobru aproksimaciju iracionalnog broja ($\sqrt{7}$) pridruženog toj jednadžbi.

Neka je α dani realan broj. Oznake:

- $\lfloor \alpha \rfloor$: najveći cijeli broj manji ili jednak α;
- $\{\alpha\}$: razlomljeni dio od α, tj.

$$\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor\,;$$

- $\|\alpha\|$: udaljenost od α do najbližeg cijelog broja, tj.

$$\|\alpha\| = \min\left\{\{\alpha\}\,,\ 1 - \{\alpha\}\right\}.$$

Očito vrijedi: $0 \leq \{\alpha\} < 1, 0 \leq \|\alpha\| \leq \frac{1}{2}$.

Teorem 6.1 (Dirichletov) Neka su α i Q realni brojevi i $Q > 1$. Tada postoje cijeli brojevi p, q takvi da je $1 \leq q < Q$ i $\|\alpha q\| = |\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}$.

Dokaz:

Korolar 6.1 Ako je α iracionalan broj, onda postoji beskonačno mnogo parova p, q relativno prostih cijelih brojeva takvih da je

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{2}$$

Dokaz:

Napomena 6.1 Tvrdnja Korolara 6.1 ne vrijedi ukoliko je α racionalan.

Neka je α proizvoljan realan broj.
Označimo

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor .$$

Ako je $a_0 \neq \alpha$ zapišimo

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1},$$

gdje je $\alpha_1 > 1$. Označimo

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$$

Ako je $a_1 \neq \alpha_1$ zapišimo

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2},$$

gdje je $\alpha_2 > 1$. Označimo

$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor$$

Ovaj proces možemo nastaviti u nedogled ukoliko nije $a_n = \alpha_n$ za neki n.

Ako je $a_n = \alpha_n$ za neki n, onda je α racionalan broj i vrijedi

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Što kraće zapisujemo $\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n]$.

Ako je $a_n \neq \alpha_n$ za sve n, definirajmo racionalne brojeve $\frac{p_n}{q_n}$ sa

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, ..., a_n].$$

Teorem 6.2 Brojevi p_n i q_n zadovoljavaju rekurzivne relacije

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1; \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1. \end{aligned}$$

Dokaz:

Uz dogovor $p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0,$ Teorem 6.2 vrijedi za sve $n \geq 0$.

Teorem 6.3 Za sve $n \geq -1$ vrijedi:

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n .$$

Dokaz:

Teorem 6.4

1. $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < ...,$
2. $\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > ...,$

3. Ako je n paran, a m neparan, onda je $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_m}{q_m}$.

Dokaz:

Uočimo:

1. $\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, \alpha_{n+1}]$ i $\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \Longrightarrow \alpha_n > a_n;$

2. $\alpha = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$, $n \geq 1;$

3. $\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} \Longrightarrow$

a) $\alpha > \frac{p_n}{q_n}$, n paran;

b) $\alpha < \frac{p_n}{q_n}$, n neparan;

$\Longrightarrow \alpha$ leži između dva susjedna.

4. $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1 \Longrightarrow\ q_n \geq n$ (q_n rastući);

5. 1., 3. i 4. $\Longrightarrow \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} \leq \frac{1}{n(n+1)}$;

6. $a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor > \alpha_{n+1} - 1 \ \Longrightarrow\ \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$;

7. 3. i 6. $\Longrightarrow \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_n q_n + q_{n-1})q_n} \overset{(6)}{>} \frac{1}{((a_{n+1}+1)q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{1}{(q_n + q_{n+1})q_n}$;

8. $\left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{(a_{n+1}q_{n+1} + q_n)q_{n+1}} \leq \frac{1}{(q_n + q_{n+1})q_{n+1}} \underset{(q_n)\text{ rast.}}{\overset{4)}{<}} \frac{1}{(q_n + q_{n+1})q_n}$

9. 7. i 8. $\Longrightarrow \left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \Longrightarrow$ svaki sljedeći bolje aproksimira α;

10. ako je α racionalan, onda je $a_n = \alpha_n$ za neki n, inače

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{q_n^2} \qquad (3)$$

$\Longrightarrow$ postoji beskonačno brojeva koji zadovoljavaju

$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, što je u suprotnosti s Napomenom 6.1.

Teorem 6.5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha.$$

Dokaz:

Definicija 6.1 Ako je a_0 cijeli broj, $a_1, ..., a_n$ prirodni brojevi, te ako je

$$\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n],$$

onda ovaj izraz nazivamo razvoj broja α u **konačni jednostavni verižni (neprekidni) razlomak;**
Ako je α iracionalan, onda uvodimo oznaku

$$\lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, ..., a_n] = [a_0, a_1, ..., a_n, ...].$$

Ako je

$$\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, ...],$$

onda ovaj izraz nazivamo razvoj broja α u **beskonačni jednostavni verižni (neprekidni) razlomak;**

- $$\frac{p_i}{q_i} = [a_0, a_1, ..., a_i]$$

  je $i-$**ta konvergenta** od α;

- a_i je $i-$**ti parcijalni kvocijent**

- $$\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, ...]$$

  je $i-$**ti potpuni kvocijent** od α.

Primjer 6.1 Ako je $\frac{b}{c}$ racionalan broj, $\gcd(b, c) = 1$, $b > c > 0$ i (iz Euklidovog algoritma)

$$\begin{aligned}
b &= cq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < c \\
c &= r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{j-2} &= r_{j-1}q_j + r_j, \quad 0 < r_j < r_{j-1} \\
r_{j-1} &= r_jq_{j+1}.
\end{aligned}$$

Tada je $(b, c) = r_j$ i

$$\frac{b}{c} = [q_1, q_2, ..., q_{j+1}] = [q_1, q_2, ..., q_j, q_{j+1} - 1, 1].$$

Napomena Može se pokazati da je razvoj broja α u beskonačni jednostavni verižni (neprekidni) razlomak je jedinstven.

Zadatak 6.1 Prikažite kao jednostavni verižni (neprekidni) razlomak

- $\frac{21}{25} = [0, 1, 5, 4]\,;$
- $\frac{25}{21} = [1, 5, 4]\,;$
- $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \left[\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n}\right] = \left[\underbrace{1, 1, ..., 1, 2}_{n-1}\right]$

Zadatak 6.2 Nađite prve četiri konvergente jednostavnog verižniog razlomaka

- $e = [1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2k, 1, ..]$
- $\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, ...]$

Zadatak 6.3 Ako je

$$\alpha = [1, 1, 1, ...]$$

onda je

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ ($F_n - n$-ti Fibonaccijev broj).

Napomena: Neka je α iracionalan broj, iz formule (3) slijedi da svaka konvergenta od α zadovoljava nejednakost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Teorem 6.6 Neka su $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$ dvije uzastopne konvergente od α**.** Tada barem jedna od njih zadovoljava nejednakost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Korolar 6.3 Za svaki α iracionalan broj postoji beskonačno racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Teorem 6.7 (Legendere) Neka su p i q cijeli brojevi takvi da je $q \geq 1$ i

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

tada je $\frac{p}{q}$ neka konvergenta od α.

Teorem 6.8 (Borel) Neka su $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$ tri uzastopne konvergente od α**.** Tada barem jedna od njih zadovoljava nejednakost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Teorem 6.9 (Hurwitz) Za svaki α iracionalan broj postoji beskonačno racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

Konstanta $\sqrt{5}$ je najbolja moguća, tj. tvrdnja ne vrijedi ako se $\sqrt{5}$ zamijeni s bilo kojom drugom konstantom $A > \sqrt{5}$.

Definicija 6.2 Za beskonačan verižni razlomak

$$[a_0, a_1, a_{2,}...]$$

kažemo da je *periodski* ako postoje cijeli brojevi $k \geq 0, m \geq 1$ takvi da je $a_{n+m} = a_n$ za sve $n \geq k$. U tom slučaju verižni razlomak pišemo u obliku

$$\left[a_0,\ a_1, ...,\ a_{k-1},\ \overline{a_k,\ a_{k+1}, ..., a_{k+m-1}}\right],$$

gdje ”crta” iznad brojeva $a_k,\ a_{k+1}, ..., a_{k+m-1}$ znači da se taj blok brojeva ponavlja u nedogled.

Primjer

- $\beta = [\overline{2, 8}] \Longrightarrow \beta = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$;
- $\alpha = [3, 1, \overline{2, 8}] \Longrightarrow \alpha = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{\beta}} \Longrightarrow \alpha = \frac{36+2\sqrt{5}}{11}$.

Definicija 6.3 Za iracionalan broj α kažemo da je *kvadratna iracionalnost* ako je α korijen kvadratne jednadžbe s racoinalnim koeficijentima.

Teorem 6.10 (Euler, Lagrange) Razvoj u jednostavni verižni razlomak realnog broja α je periodski ako i samo ako je α kvadratna iracionalnost.

Dokaz:

Iz dokaza slijedi *algoritam* za nalaženje jednostavnog verižnog (neprekidnog) razlomka od

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{d}}{b}.$$

Množeći brojnik i nazivnik od b, ako je nužno, možemo pretpostaviti da $b|(d - a^2)$.

Neka je

$$\alpha = \frac{a+\sqrt{d}}{b},\ s_0 = a,\ t_0 = b,\ t_0 \,\big|\, \left(d - s_0^2\right),$$

$$a_n = \left\lfloor \frac{s_n + \sqrt{d}}{t_n} \right\rfloor, \quad s_{n+1} = a_n t_n - s_n,$$

$$t_{n+1} = \frac{d - s_{n+1}^2}{t_n} \quad \text{za} \ \ n \geq 0.$$

Ako je

$$(s_j, t_j) = (s_k, t_k) \ \text{ za } \ j < k,$$

onda je

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_{j-1}, \overline{a_j, \ldots, a_{k-1}}].$$

Zadatak 6.4 Nađite jednostavni verižni (neprekidni) razlomak od:

- $\sqrt{6} = \left[2, \overline{2, 4}\right]$;
- $\sqrt{d^2 - d} = \left[d - 1, \overline{2, 2d - 2}\right]$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$;
- $\sqrt{\frac{5}{3}} = \left[1, \overline{3, 2}\right]$;
- $\sqrt{\frac{2c+1}{2c}} = \left[1, \overline{4c, 2}\right]$, $c \in \mathbb{N}$;
- $\frac{2+\sqrt{5}}{3} = \left[\overline{1, 2, 2, 1, 12}\right]$.

Teorem 6.11 Kvadratna iracionalnost α ima čisto periodski razvoj u jednostavni verižni razlomak ako i samo ako je $\alpha > 1$, te $-1 < \alpha' < 0$, gdje je α' konjugat od α (u tom slučaju kažemo da je α *reducirana* kvadratna iracionalnost).

Dokaz:

Teorem 6.12 Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat, onda jednostavan verižni razlomak od $\sqrt{d}$ ima oblik

$$\sqrt{d} = \left[a_0; \overline{a_1, a_2 ..., a_{r-1}, 2a_0}\right],$$

gdje je $a_0 = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$, a niz $a_1, a_2 ..., a_{r-1}$ je centralno simetričan, tj. vrijedi

$$a_i = a_{r-i} \text{ za } i = 1, ..., r-1.$$

Ovdje $r = r(d)$ označava duljinu najkraćeg perioda u razvoju od $\sqrt{d}$.
Nadalje, uz oznake od prije, imamo $\alpha_0 = \sqrt{d}$, $t_0 = 1$, $s_0 = 0$ i $t_i = 1$ ako i samo ako $r \mid i$. Nadalje, $t_i \neq -1$ za svaki i.

Napomena: Neka $r = r(d)$ označava duljinu najkraćeg perioda u razvoju od $\sqrt{d}$, tada vrijedi sljedeće:

- ako je $s_n = s_{n+1}$ onda je $r = 2n$;

- ako je $t_n = t_{n+1}$ onda je $r = 2n + 1$.

Zadatak 6.5 Nađite jednostavni verižni (neprekidni) razlomak od:

- $\sqrt{15} = \left[3, \overline{1, 6}\right]$;

- $\sqrt{29} = \left[5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}\right]$.

Teorem 6.13 Neka je d prirodan broj koji nije potpun kvadrat, onda za sve $n \geq -1$ vrijedi

$$p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^{n+1} t_{n+1}.$$

Dokaz:

7. Diofantske jednadžbe

Diofantska jednadžba

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{4}$$

gdje je $d \in \mathbb{N}$, $d \neq \square$, naziva se **Pellova jednadžba.**

Diofantska jednadžba oblika

$$x^2 - dy^2 = N, \tag{5}$$

gdje je $d \in \mathbb{N}$, $d \neq \square$ i $N \in \mathbb{Z}$, $N \neq 0$, naziva se **pellovska jednadžba.**

Napomena:

- $d \in \mathbb{Z}$ i $d < 0 \Longrightarrow (4)$ i (5) imaju konačno rješenja;

- $d = \square = a^2 \Longrightarrow x^2 - a^2y^2 = (x - ay)(x + ay) = N \Longrightarrow$ konačno rješenja;

- Pellova jednadžba ima beskonačno rješenja, a pellovska, ako ih ima, ima ih beskonačno.

Teorem 7.1 Neka je $d \in \mathbb{N}$, $d \neq \square$, te neka su $\frac{p_n}{q_n}$ konvergente u razvoju od $\sqrt{d}$. Neka je $N \in \mathbb{Z}$, $|N| < \sqrt{d}$. Tada za svako pozitivno rješenje $x = u$, $y = v$ jednadžbe

$$x^2 - dy^2 = N,$$

takvo da je $\gcd(u, v) = 1$ vrijedi $u = p_n$, $v = q_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz:

Iz Teorema 6.12, 6.13, 7.1 slijedi:

Teorem 7.2 Sva rješenja u prirodnim brojevima jednadžbi $x^2 - dy^2 = \pm 1$ nalaze se među $x = p_n$, $y = q_n$, gdje su $\frac{p_n}{q_n}$ konvergente u razvoju od $\sqrt{d}$. Neka je r duljina perioda u razvoju od $\sqrt{d}$.
Ako je r paran, onda jednadžba $x^2 - dy^2 = -1$ nema rješenja, a sva rješenja od $x^2 - dy^2 = 1$ su dana sa $x = p_{kr-1}$, $y = q_{kr-1}$, $k \in \mathbb{N}$.
Ako je r neparan, onda su sva rješenja od $x^2 - dy^2 = -1$ dana sa $x = p_{kr-1}$, $y = q_{kr-1}$, $k \in \mathbb{N}$, k neparan, a sva rješenja od $x^2 - dy^2 = 1$ dana sa $x = p_{kr-1}$, $y = q_{kr-1}$, $k \in \mathbb{N}$, k paran.

Dokaz:

Teorem 7.3 Ako je (x_1, y_1) je najmanje rješenje[1] u prirodnim brojevima jednadžbe $x^2 - dy^2 = 1$ (fundamentalno rješenje), onda su sva rješenja ove jednadžbe u prirodnim brojevima dana sa (x_n, y_n) za $n \in \mathbb{N}$, gdje su x_n i y_n prirodni brojevi definirani sa

$$x_n + \sqrt{d}y_n = \left(x_1 + \sqrt{d}y_1\right)^n, \tag{6}$$

tj.

$$\begin{aligned} x_n &= x_1^n + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2j} x_1^{n-2j} y_1^{2j} d^j, \\ y_n &= \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2}-1 \right\rfloor} \binom{n}{2j-1} x_1^{n-2j+1} y_1^{2j-1} d^{j-1}. \end{aligned}$$

Dokaz:

Teorem 7.4 Neka je (x_n, y_n) niz svih rješenja od $x^2 - dy^2 = 1$ u prirodnim brojevima zapisan u rastućem redosljedu. Definirajmo $(x_0, y_0) = (1, 0)$, tada vrijede rekurzivne relacije

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2x_1 x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 0, \\ y_{n+2} &= 2x_1 y_{n+1} - y_n \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Dokaz:

[1] (x_1, y_1) je najmanje rješenje ako za svako drugo rješenje (s, t) vrijedi $x_1 + \sqrt{d}y_1 < s + \sqrt{d}t$.

Primjer Nađite sva rješenja od:

- $x^2 - 15y^2 = 1;$
- $x^2 - 15y^2 = -1;$

tako da je $1 < x < 1000.$

Rješenje:

$$\sqrt{15} = \left[3, \overline{1, 6}\right] \Longrightarrow \ r = 2 \text{ (paran)} \Longrightarrow$$

- $x^2 - 15y^2 = -1 \overset{T.\ 7.2}{\Longrightarrow}$ nema rješenja;
- $x^2 - 15y^2 = 1 \overset{T.\ 7.2}{\Longrightarrow}$ rješenja $(x, y) = (p_{2k-1}, q_{2k-1}),$ $k \in \mathbb{N}$
  - $(x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (4, 1)$ je najmanje rješenje u prirodnim brojevima jednadžbe $x^2 - 15y^2 = 1$, a ostala $(x, y) = (p_3, q_3), (p_5, q_5), (p_7, q_7), \ldots$.
- Traženje konvergenti, tj. rješenja u prirodnim brojevima:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1; \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1. \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	3	1	6	1	6	1	6	1	6	1
p_n	5	**4**	27	**31**	213	**244**	1677	**1921**	13203	**15124**
q_n	1	**1**	7	**8**	55	**63**	433	**496**	3409	**3905**

- Kako je

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (p_1, q_1) = (4, 1)\\ (x_2, y_2) &= (p_3, q_3) = (31, 8)\,,\\ (x_3, y_3) &= (p_5, q_5) = (244, 63)\,,\\ (x_4, y_4) &= (p_7, q_7) = (1921, 496)\\ &\Longrightarrow \quad x_3 < 1000,\ x_4 > 1000,\end{aligned}$$

  imamo samo šest rješenja $(x, y) = (4, \pm 1)\,,$ $(31, \pm 8)\,, (244, \pm 63)$ tako da je $1 < x < 1000.$

- Kako je $(x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (4, 1)$ najmanje rješenje od $x^2 - 15y^2 = 1$ sva pozitivna rješenja su dana sa

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= 2x_1x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 0,\\ y_{n+2} &= 2x_1y_{n+1} - y_n \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

  gdje je $(x_0, y_0) = (1, 0)$ i $(x_1, y_1) = (4, 1)\,.$ Npr. imamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1x_1 - x_0 = 2 \cdot (4)^2 - 1 = 31 \\ y_2 &= 2x_1y_1 - y_0 = 2 \cdot 4 \cdot 1 - 0 = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2x_1x_2 - x_1 = 2 \cdot 4 \cdot 31 - 4 = 244 \\ y_3 &= 2x_1y_2 - y_1 = 2 \cdot 4 \cdot 8 - 1 = 63. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 2x_1x_3 - x_2 = 2 \cdot 4 \cdot 244 - 31 = 1921 \\ y_4 &= 2x_1y_3 - y_2 = 2 \cdot 4 \cdot 63 - 8 = 469. \end{aligned}$$

Ovo je brži način.

Primjer Nađite najmanja rješenja u prirodnim brojevima od:

- $x^2 - 29y^2 = 1;$
- $x^2 - 29y^2 = -1;$

Rješenje:

$$\sqrt{29} = \left[5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}\right] \Longrightarrow r = 5 \text{ (neparan)} \Longrightarrow$$

- $x^2 - 29y^2 = -1 \overset{T.\ 7.2}{\Longrightarrow}$ sva pozitivna rješenja su dana sa

$$x = p_{5k-1}, y = q_{5k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \text{ neparan}$$

$\Longrightarrow$ najmanje za $k = 1$ $(n = 4) \overset{rek.}{\Longrightarrow}$

$$(x_1, y_1) = (p_4, q_4) = (70, 13)\,;$$

- $x^2 - 29y^2 = 1 \overset{T.\ 7.2}{\Longrightarrow}$ sva pozitivna rješenja su dana sa

$$x = p_{5k-1}, y = q_{5k-1}, k \in \mathbb{N}, \quad k \text{ paran}$$

$\Longrightarrow$ najmanje za $k = 2$ $(n = 9) \overset{rek.}{\Longrightarrow}$

$$(x_1, y_1) = (p_9, q_9) = (9801, 1820)\,;$$

- Traženje konvergenti, tj. minimalnih rješenja u prirodnim brojevima:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1; \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1. \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	5	2	1	1	2	10	5	2	1	1
p_n	5	11	16	27	**70**	727	1524	2251	3775	**9801**
q_n	1	2	3	5	**13**	135	283	418	701	**1820**

- Kako je $(x_1, y_1) = (p_9, q_9) = (9801, 1820)$ najmanje rješenje od $x^2 - 29y^2 = 1$ sva pozitivna rješenja su dana sa

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2x_1 x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 0, \\ y_{n+2} &= 2x_1 y_{n+1} - y_n \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

gdje je $(x_0, y_0) = (1, 0)$ i $(x_1, y_1) = (9801, 1820)$. Npr. imamo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 x_1 - x_0 = 2 \cdot (9801)^2 - 1 = 192\,119\,201 \\ y_2 &= 2x_1 y_1 - y_0 = 2 \cdot 9801 \cdot 1820 - 0 = 35\,675\,640. \end{aligned}$$

Primjer Pokazati: p prost i $p \equiv 1 \pmod 4 \Longrightarrow$ $x^2 - py^2 = -1$ ima rješenje.

Primjer Nađite najmanja rješenja u prirodnim brojevima od:

- $x^2 - 13y^2 = \pm 1;$
- $x^2 - 14y^2 = \pm 1;$
- $x^2 - 31y^2 = \pm 1;$

Primjer

- Pokazati: $x^2 - \left(k^2 - 1\right) y^2 = -1,\ k \in \mathbb{Z},$ nema rješenje.
- Naći fundamentalno rješenje od $x^2 - \left(k^2 - 1\right) y^2 = 1,$ $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2;$

Rješenje:

- $k \geq 2 \Longrightarrow \sqrt{k^2 - 1} = \left[k - 1, \overline{1, 2k - 2}\right] \Longrightarrow r = 2$ (paran);
- $\overset{T.\ 7.2}{\Longrightarrow} x^2 - \left(k^2 - 1\right) y^2 = -1$ nema rješenja;

- $\overset{T.\,7.2}{\Longrightarrow} x^2 - \left(k^2-1\right) y^2 = 1$ sva pozitivna rješenja su dana sa

$$x = p_{2k-1},\ y = q_{2k-1},\ k \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ najmanje za $k = 1\ (n = 1) \Longrightarrow (x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (k, 1)$.

- $k = 1 \Longrightarrow x^2 = -1$ nema rješenja;

- $k = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = -1$ nema rješenja.

Još neke diofantske jednadžbe

Teorem 7.5 Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cijeli brojevi i neka je $\gcd(a, b) = d$. Tada (linearna) diofantska jednadžba

$$ax + by = c \tag{7}$$

ima rješenje onda i samo onda ako $d \,|c$. Ako $d \,|c$, onda jednadžba (7) ima beskonačno cjelobrojnih rješenja. Ako je (x_1, y_1) jedno rješenje, onda su sva rješenja dana sa $x = x_1 + \frac{b}{d}t$, $y = y_1 - \frac{a}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Dokaz:

Teorem 7.6 Neka su $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ cijeli brojevi i neka je $\gcd(a_1, a_2, ..., a_n) = d$. Tada (linearna) diofantska jednadžba

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c \tag{8}$$

ima rješenje onda i samo onda ako $d \,|c$. Ako jednadžba (8) ima cjelobrojnih rješenja, onda ih ima beskonačno.

Dokaz:

Definicija 7.1 Uređenu trojku prirodnih brojeva (x, y, z) nazivamo *Pitagorina trojka* ako su x, y katete, a z hipotenuza pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{9}$$

Ako su x, y, z relativno prosti, onda kažemo da je (x, y, z) *primitivna Pitagorina trojka* (a pripadni trokut *primitivni Pitagorin trokut*).

Uočimo:

U primitivnoj Pitagorinoj trojci točno jedan od brojeva x, y je neparan:

- oba parna $\Longrightarrow$ z paran $\Longrightarrow$ nije primitivna;

- oba neparna $\Longrightarrow$ $x^2+y^2 \equiv 2 \bmod 4 \Longrightarrow z^2 \equiv 2 \bmod 4$ ($\Longrightarrow\Longleftarrow$);

Teorem 7.7 Sve primitivne Pitagorine trojke (x, y, z) u kojima je y paran dane su formulama

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

gdje je $m > n$ i m, n su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti.

Dokaz:

Iz prethodnog teorema slijedi da su sve Pitagorine trojke dane identitetom

$$\left[d\left(m^2-n^2\right)\right]^2+(2dmn)^2=\left[d\left(m^2+n^2\right)\right]^2. \quad (10)$$

Primjer Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka

a) 39, **b)** 199, **c)** 34, **b)** 2001.

Primjer Nađite sve primitivne Pitagorine trokute u kojima su sve tri stranica između 2000 i 3000.

Teorem 7.8 Jednadžba

$$x^4+y^4=z^2$$

nema rješenja u prirodnim brojevima. Drugim riječima, ne postoji pravokutni trokut kojem su duljine kateta kvadrati prirodnih brojeva.

Dokaz:

Napomena:

Tvrdnja Teorema 7.8 povlači i tvrdnju da jednadžba

$$x^4 + y^4 = z^4$$

nema rješenja u prirodnim brojevima. Ovo je specijalan slučaj tzv. *Velikog Fermatovog teorema* koji kaže: Jednadžba

$$x^n + y^n = z^n$$

nema rješenja u prirodnim brojevima za $n \geq 3$. Ovaj teorem je 1995. dokazao Andrew Wiles.

Propozicija 7.1 Ne postoji Pitagorin trokut u kojem su hipotenuza i jedna kateta kvadrati prirodnih brojeva.

Dokaz:

Korolar 7.1 Ne postoji Pitagorin trokut čija je površina potpun kvadrat.

Dokaz:

Primjer Nađimo sva rješenja diofantske jednadžbe

$$x^2 + 5y^2 = z^2$$

uz uvjet $\gcd(x, y, z) = 1$.