UVOD U ALGEBRU S ANALITIČKOM GEOMETRIJOM

Borka Jadrijević

Sadržaj:

1. Klasična algebra vektora

2. Analitička geometrija

3. Osnovne algebarske strukture

Literatura:

<u>Udžbenici:</u>

- K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.;
- S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2001.

<u>Zbirke zadataka:</u>

- N. Bakić, A. Milas, *Zbirka zadataka iz linearne algebre s rješenjima,* PMF–Matematički odjel, HMD, Zagreb, 1995.;
- N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2001.

Obveze:

- predavanja ($\geq 70\%$)
- vježbe ($\geq 70\%$)

Provjere znanja:

- *dva kolokvija (parcijalna ispita):*

- zadaci;
- $k_1, k_2 \geq 40$ i $\frac{k_1+k_2}{2} \geq 50$;

- *završni ispit:*

- pismeni ispit;
- usmeni ispit.

1. Klasična algebra vektora

- U realnom fizikalnom svijetu i egzaktnim znanostima:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...);
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).

- Pretpostavka: intuitivno jasan pojam trodimenzionalnog (Euklidskog) prostora, čija ćemo osnovna svojstva smatrati poznatima.

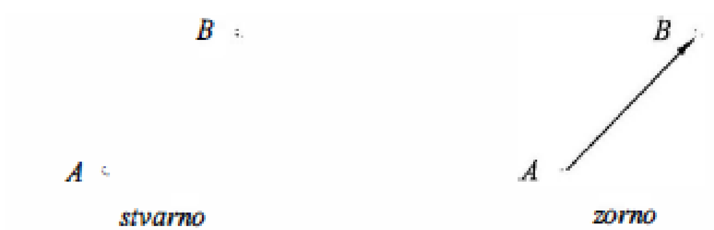
- Oznake:
  - trodimenzionalni prostor: E^3
  - točke: A, B, M, N, P,...,$T \in E^3$;
  - dužine: $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, ...;
  - udaljenosti - duljine dužina: $d\left(A, B\right)$ ili $|AB|$, ...

1.1 Usmjerena (orijentirana) dužina

Definicija 1.1 *Neka su $A, B \in E^3$. Uređeni par (A, B) nazivamo* ***usmjerena dužina*** *(ili* ***orijentirana dužina****) kojoj je* ***početak*** *(početna točka) točka A i* ***kraj*** *točka B.*

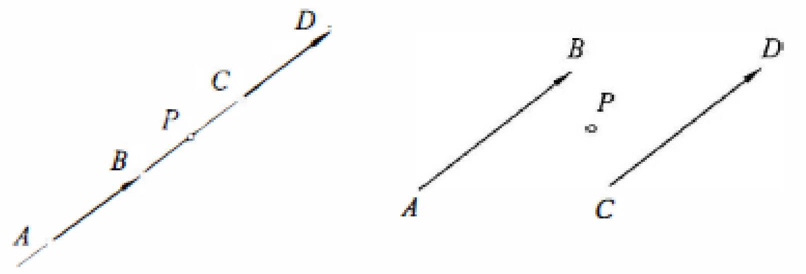
- Skup svih usmjereni dužina ćemo označiti s $\mathfrak{D}$. Dakle: $\mathfrak{D} = E^3 \times E^3$.

- Standardna oznaka za usmjerenu dužinu (A, B) je $\overrightarrow{AB}$. Dakle: $\overrightarrow{AB} = (A, B)$.



Definicija 1.2 *Za usmjerene dužinu $\overrightarrow{AB}$ kažemo da je* ***ekvivalentna*** *usmjerenoj dužini $\overrightarrow{CD}$ ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ imaju zajedničko polovište. Pišemo $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.*

- Uočimo: u slučaju $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, točke A, B, C i D sigurno pripadaju istoj ravnini, a kada sve četiri nisu na istom pravcu, one određuju četverokut $ABDC$ koji je paralelogram.



Teorem 1.1 *Relacija $\equiv$ je relacija ekvivalencije u skupu $\mathfrak{D}$.*

<u>**Dokaz:**</u>

Propozicija 1.1 Neka je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, onda je $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{BD}$.

<u>**Dokaz:**</u>

- Očito vrijedi: Ako je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, onda je $d(A, B) = d(C, D)$ i $d(A, C) = d(B, D)$.

<u>1.2 Vektori</u>

Definicija 1.3 *Skup svih međusobno ekvivalentnih usmjereni dužina nazivamo <u>vektor</u>. Pojedinu usmjerenu dužinu iz tog skupa nazivamo <u>predstavnikom</u> vektora.*
Točnije, vektor je <u>klasa ekvivalencije</u> orijentiranih dužina za danu relaciju ekvivalencije $\equiv$.

- Vektor čiji je predstavnik usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ označavamo s $\left[\overrightarrow{AB}\right]$, tj.
$$\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left\{\overrightarrow{PQ} \in \mathfrak{D} \mid \overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{AB}\right\}.$$

- Vektore se standardno kraće označava $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... tj.
$$\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right].$$

- Skup svih vektora ćemo označiti V^3, tj.
$$V^3 = \mathfrak{D}/\equiv \ = \left\{\left[\overrightarrow{AB}\right] \mid \overrightarrow{AB} \in \mathfrak{D}\right\}$$
(<u>kocijentni skup</u>).

- Uočimo da za bilo koja dva vektora $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ i $\left[\overrightarrow{CD}\right]$ vrijedi:
$$\left[\overrightarrow{AB}\right] \cap \left[\overrightarrow{CD}\right] = \emptyset \quad \text{ili} \quad \left[\overrightarrow{AB}\right] = \left[\overrightarrow{CD}\right].$$

Propozicija 1.2 *Neka je dana bilo koja točka $O \in E^3$ i bilo koji vektor $\vec{a} \in V^3$. Tada postoji točno jedna točka $T \in E^3$ tako da je $\overrightarrow{OT} \in \vec{a}$, tj. tako da je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right]$.*

<u>**Dokaz:**</u>

Popularno kažemo da smo vektor $\vec{a}$ "nanijeli" iz točke O kao početka.

Definiramo:

- **Nul-vektor** je vektor $\vec{0} = \left[\overrightarrow{AA}\right] = \left\{\overrightarrow{AA} \mid A \in E^3\right\}$.

  Uočimo: Sve orijentirane dužine oblika $\overrightarrow{AA}$ i samo one međusobno su ekvivalentne, tj. pripadaju jednoj klasi ekvivalencije, odnosno istom elementu $\vec{0} \in V^3$.

- **Suprotni vektor** vektora $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ je vektor $\left[\overrightarrow{BA}\right]$ koji označavamo $-\vec{a}$. Dakle, ako je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, onda je $-\vec{a} = \left[\overrightarrow{BA}\right]$.

  Očito je $-(-\vec{a}) = \vec{a}$, te ako je $\vec{b} = -\vec{a}$, onda je $\vec{a} = -\vec{b}$ pa kažemo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **par suprotnih vektora.**

  Uočimo: Ako svim orijentiranim dužinama neke klase, vektora $\vec{a}$, zamijenimo početak i kraj, dobivamo opet orijentirane dužine neke klase, recimo vektora $\vec{b} := -\vec{a}$ i nadalje, svi predstavnici tog vektora mogu se dobiti na taj način.

- **Nosač** vekora $\vec{a} \neq \vec{0}$ je svaki pravac određen točkama M i N, gdje je $\overrightarrow{MN} \in \vec{a}$.

- **Smjer** $s_{\vec{a}}$ vekora $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ je smjer s_{AB} pravca određenog s A i B, tj. skup svih njemu paralelnih pravaca. Dakle, $s_{\vec{a}}$ je skup svih nosača vektora $\vec{a}$.

- **Modul ili duljina ili norma** $|\vec{a}|$ vekora $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ je $|\vec{a}| = d\,(A, B) = |AB|$.

Uočimo: Norma vektora ne ovisi o izboru predstavnika.

- Za dva vektora $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ kažemo da su **kolinearna** ako točke O, A, B pripadaju istom pravcu.

Alternativno: Za dva nenul vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su **kolinearna** ako imaju isti smjer. Dogovorno, nul-vektor je je kolinearan sa svakim vektorom.

- **Orijentacija:** Kolinearni vektori $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ imaju **istu orijentaciju** ako se točke A i B nalaze s iste strane točke O, a imaju **suprotnu orijentaciju** ako se točke A i B nalaze s različitih strana točke O.

- **Jedinični vektor** $\vec{e}$ je vektor duline 1. Dakle, $|\vec{e}| = 1$.

Uočimo:

- Nul-vektor je duljine 0, tj. $\left|\vec{0}\right| = 0$ (jedini takav!). Smjer i orijentacija nul-vektora nisu definirani.

- Svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ je jednoznačno određen modulom (duljinom), smjerom i orijentacijom.

- Dva suprotna vektora imaju isti modul i isti smjer, ali suprotne orijentacije.

- Skup svih vektora u ravnini označavamo s V^2 a skup vektora na pravcu s V^1.

- Neka je O izabrana točka u prostoru E^3.
  - Za svaki vektor $\vec{a}$ moguće je odabrati (jednoznačno !) njegovog predstavnika tako da mu početna točka bude O, tj. tako da je
  $$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right].$$
  (Propozicija 1.2)
  - Vektor $\overrightarrow{r_{_T}} = \overrightarrow{OT}$ nazivamo **radijus-vektor** ili **vektor položaja** točke $T \in E^3$. Označimo sa $V^3(O)$ skup svih radijus-vektora s početkom u O.

1.3 Operacije s vektorima

Neka su $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{BC}\right]$ vektori. <u>Zbroj vektora</u> $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left[\overrightarrow{AB}\right] + \left[\overrightarrow{BC}\right] = \left[\overrightarrow{AC}\right]$$

(<u>pravilo trokuta</u>) ili ako je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA'}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB'}\right]$ onda je

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left[\overrightarrow{OC'}\right],$$

gdje je C' četvrti vrh paralelograma definiranog točkama O, A', B' (<u>pravilo paralelograma</u>).

<u>Uočimo:</u> Zbroj vektora ne ovisi o izboru predstavnika jer vrijedi

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{A'B'} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{B'C'} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{A'C'}.$$

Definicija 1.4 *Preslikavanje (binarnu operaciju)*

$$z : V^3 \times V^3 \longrightarrow V^3$$

definirano s

$$z\left(\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c},$$

nazivamo <u>zbrajanje vektora</u>.

<u>Uočimo:</u>

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \in V^3 \times V^3 \xrightarrow{z} \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in V^3.$$

Propozicija 1.3 Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ proizvoljni vektori, tada vrijedi:

1. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti);
2. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
3. $\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$;
4. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (svojstvo komutativnosti).

Dokaz:

Poopćenje: Zbog svojstva 1. imamo:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n=\left[\overrightarrow{A_0A_1}\right]+\left[\overrightarrow{A_1A_2}\right]+...+\left[\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right]=\left[\overrightarrow{A_0A_n}\right]$$

Definiramo oduzimanje vektora kao

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Ako je $\vec{a}=\left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b}=\left[\overrightarrow{OB}\right]$ onda je

$$\vec{a}-\vec{b}=\left[\overrightarrow{BA}\right].$$

Neka je $\vec{a}$ vektor i $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkt skalara λ i vektora $\vec{a}$ je vektor $\vec{c} = \lambda\vec{a}$ zadan sa:

- vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su kolinearni (smjer);
- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$ (modul);
- ako je $\lambda > 0$ onda $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ imaju istu orijentaciju, a ako je $\lambda < 0$ onda $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ imaju suprotnu orijentaciju. (Za $\lambda = 0$ je $|\lambda\vec{a}| = 0$, pa je $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ nul-vektor).

Definicija 1.5 *Preslikavanje*

$$m : \mathbb{R} \times V^3 \longrightarrow V^3$$

definirano s

$$m\left((\lambda, \vec{a})\right) = \lambda\vec{a} = \vec{c},$$

nazivamo množenje vektora sa sakalarom.

Uočimo:

$$(\lambda, \vec{a}) \in \mathbb{R} \times V^3 \xrightarrow{m} \lambda\vec{a} = \vec{c} \in V^3.$$

Vrijedi:

- $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ ako i samo ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$;
- ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ ($\Rightarrow |\vec{a}| \neq 0$) onda je $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} := \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$ jedinični vektor vektora $\vec{a}$.

Propozicija 1.4 Neka su $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$ proizvoljni vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari, tada vrijedi:

1. $(\lambda\mu)\,\vec{a} = \lambda\,(\mu\vec{a})$;
2. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
3. $(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
4. $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Dokaz:

Uočimo: $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

1.3 Kolinearni i komplanarni vektori

Prisjetimo se: Za dva vektora $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ kažemo da su **kolinearna** ako točke O, A, B pripadaju istom pravcu.

Alternativno: Za dva nenul vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su **kolinearna** ako imaju isti smjer. Dogovorno, nul-vektor $\vec{0}$ je je kolinearan sa svakim vektorom.

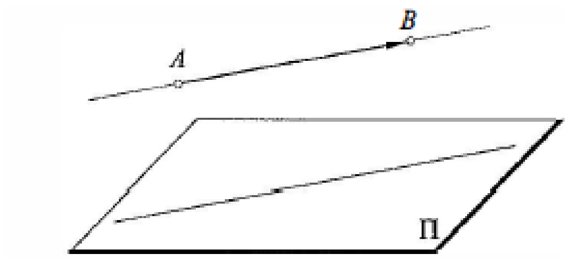
Uočimo: Vektori $\vec{a}$ i $\lambda \cdot \vec{a}$ su uvijek kolinearni za svaki izbor $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\vec{a} \in V^3$. Vrijedi i obrat:

Propozicija 1.5 Neka su $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$ kolinearni vektori i $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tada postoji i jednoznačno je određen $\lambda \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da je

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}.$$

Dokaz:

Definicija 1.6 Kažemo da je vektor $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ **paralelan s ravninom** $\mathbf{\Pi} \subset E^3$ i pišemo $\vec{a} \| \mathbf{\Pi}$ ako je mu je svaki nosač paralelan s ravninom $\mathbf{\Pi}$ (a to je ako i samo ako je pravac određen s A i B paralelan s nekim pravcem u ravnini $\mathbf{\Pi}$).



- Uočimo:
  - Očito se radi o dobro definiranom pojmu jer ne ovisi o izboru predstavnika $\overrightarrow{AB}$ vektora $\vec{a}$.
  - Ako je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ i $\vec{a} \| \mathbf{\Pi}$, tada postoji predstavnik $\overrightarrow{CD}$ vektora $\vec{a}$ takav da su $C, D \in \mathbf{\Pi}$, tj. tako da dužina $\overline{CD}$ leži u $\mathbf{\Pi}$.

Definicija 1.7 Za vektore iz V^3 kažemo da su **komplanarni** ako su paralelni s istom ravninom.

- Uočimo:
  - Kolinearni vektori su uvijek i komplanarni. Nadalje, bilo koja dva vektora iz V^3 su komplanarna;
  - Ako su vektori komplanarni tada postoje predstavnici tih vektora čiji početci i krajevi svi leže u istoj ravnini.

Propozicija 1.6 Neka su $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$ bilo koja dva vektora i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bilo koja dva skalara. Neka je

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Tada su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Dokaz:

Vrijedi i obrat:

Teorem 1.2 Neka su $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$ nekolinearni vektori, a $\vec{c} \in V^3$ bilo koji vektor s njima komplanaran. Onda postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Dokaz:

Teorem 1.3 Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c} \in V^3$ tri nekomplanarna vektora, ako je $\vec{d} \in V^3$ bilo koji vektor. Tada postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Dokaz:

1.4 Baza prostora V^3. Koordinatizacija.

Pojama baze olakšava "baratanje" s vektorima.

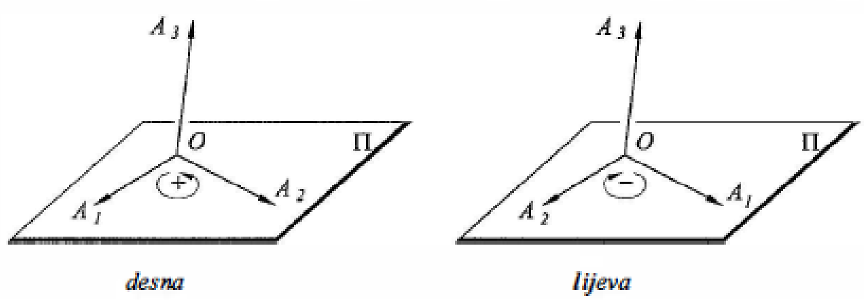
Definicija 1.8 Svaku uređenu trojku

$$B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

nekomplanarnih vektora iz V^3 nazivamo **baza prostora** V^3. Govori se također o **koordinatnoj bazi** ili **koordinatnom sustavu** za V^3. Vektore $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, 3$, iz baze nazivamo **koordinatni vektori.**

Orijentacija baze:

- Samo dva bitno različita tipa koordinatnih baza: **desno orijentirana** ili **desna baza** B i **lijevo orijentirana** ili **lijeva baza** B



- Prema Teoremu 1.3 svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ ima jedinstven prikaz oblika
$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 \tag{(1)}$$
tj . kao linearna kombinacija triju vektora iz baze $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

- Kako je prikaz (1) jednoznačan, putem koordinatne baze B dolazimo do preslikavanja definiranog s
$$k : V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
definiranog s
$$k(\vec{a}) = k(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
koje je bijekcija i kojeg nazivamo **koordinatizacija prostora** V^3 (u odnosu na bazu B).

<u>Nazivi:</u> U odnosu na danu bazu B :

- brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ su **koordinate** vektora $\vec{a}$;
- uređena trojka $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ **koordinatna trojka** ili **koordinatni slog** vektora $\vec{a}$;
- jednoznačno određeni vektori $\alpha_1 \vec{a}_1$, $\alpha_2 \vec{a}_2$, $\alpha_3 \vec{a}_3$ u prikazu (1) nazivaju se **komponentama vektora $\vec{a}$ u smjerovima koordinatnih vektora**.

Kako je preskilavanje $k : V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bijekcija identificiramo

$$\vec{a} = k(\vec{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

za zadanu bazu B.

Propozicija 1.7 Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in V^3$ bilo koja dva vektora dana svojim koordinatama u bazi B i $\lambda \in \mathbb{R}$ bilo koji skalar. Tada je u toj bazi:

1.
$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3),$$

2.
$$\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3).$$

Specijalno

$$-\vec{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3).$$

Dokaz:

Propozicija 1.8 Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori iz V^3, različiti od nulvektora, dana svojim koordinatama u bazi B. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako su im koordinate proporcionalne, tj. vrijedi

$$\beta_1 : \alpha_1 = \beta_2 : \alpha_2 = \beta_3 : \alpha_3.$$

Dokaz:

Definicija 1.9 Neka su $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ proizvoljni vektori iz V^3. Neka je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$.

<u>Kut između vektora</u> $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je (manji) kut između usmjerenih dužina $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, tj.

$$\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) := \measuredangle\left(\overline{OA}, \overline{OB}\right), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Ako je bar jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nul-vektor, pojam kuta se ne definira.

<u>Uočimo:</u>

- Pojam kuta ne ovisi o izboru predstavnika;
- Iz definicije slijedi
$$\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \measuredangle\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right)$$
- Ako je $\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \frac{\pi}{2}$, kažemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **okomiti** i pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$;
- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni onda i samo onda kad je
$$\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0 \text{ (iste su orjent.)}$$
ili
$$\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \pi \text{ (suprot. su orjent.)}.$$

Neka je $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ koordinatna baza u V^3 sa svojstvom da za koordinatne vektore vrijedi

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

i

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \;\; \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}.$$

Onda kažemo da je B jedna **ortonormirana baza** za prostor V^3. Koordinate vektora u odnosu na ortonormiranu bazu nazivamo **ortogonalne** ili **pravokutne koordinate.**

<u>Uočimo:</u>

- Kod **ortonormirane baze** koordinatni vektori su jedinični i u parovima okomiti.

Odaberemo u prostoru $\mathbf{E}^3$ (fiksnu) točku O.

- Za svaki vektor $\vec{a}$ postoji jedinstvena točka $T \in E^3$ (onda i jedinstvena usmjerena dužina $\overrightarrow{OT}$) tako da je

$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right].$$

(Propozicija 1.2). Vektor $\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT}$ nazivamo **radijus-vektor** ili **vektor položaja** točke $T \in E^3$. Označimo sa $V^3(O)$ skup svih radijus-vektora s početkom u O.

- Tada su, za odabranu (fiksnu) točku O preslikavanja

$$r : V^3 \longrightarrow V^3(O) \quad \text{i} \quad h : E^3 \longrightarrow V^3(O)$$

dana s

$$r(\vec{a}) = \overrightarrow{r_T} \quad \text{i} \quad h(T) = \overrightarrow{r_T},$$

gdje je $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right]$, su očito bijekcije, pa imamo

$$T \longleftrightarrow \overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT} \longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right]$$

- Neka je $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ baza u V^3, svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ ima jedinstven prikaz oblika
$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$
i preslikavanje
$$k : V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$k\left(\vec{a}\right) = k\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$$
je bijekcija.

- Sada za danu točku O i danu bazu B imamo
$$T \longleftrightarrow \overrightarrow{r_{_T}} = \overrightarrow{OT} \longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right] \longleftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Specijalno: Za danu točku O i ortonormiranu bazu $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, izbor
$$\Big(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\Big)$$
nazivamo **pravokutni** ili **Kartezijev koordinatni sustav** u E^3.

Bijektivno preslikavanje

$$k : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$k(T) = (x, y, z)$$

dano s

$$T \longrightarrow \overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT} \longrightarrow \overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OT}\right] = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longrightarrow (x, y, z)$$

nazivamo **koordinatizacija prostora** E^3. Jer je k bijekcija identificiramo

$$T = (x, y, z).$$