2.3 Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen s dvije različite točke.

Definicija 2.2 *Vektor* $\vec{s} \neq \vec{0}$ *je* ***vektor smjera*** *pravca* p, *ako je* p *neki nosač od* $\vec{s}$.
Drugi riječima, $\vec{s} \neq \vec{0}$ *je vektor smjera pravca* p, *ako za svaku točku* T_0 *pravca* p *postoji (točno jedna) točka* $T_1 \in p$, $T_1 \neq T_0$, *tako da je* $\vec{s} = \left[\overrightarrow{T_0T_1}\right]$.

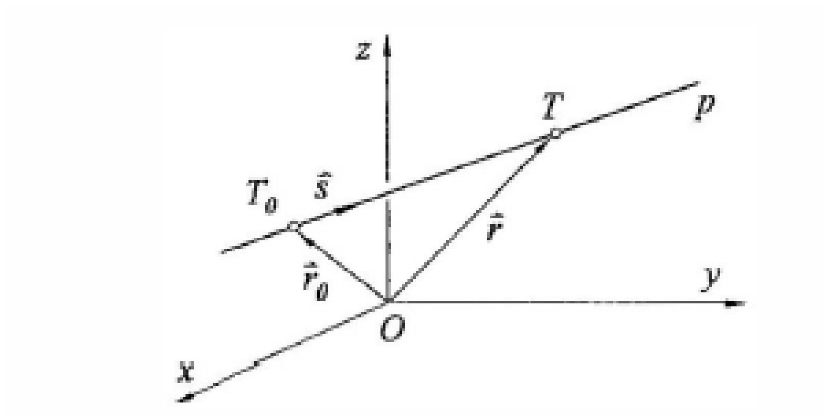
Neka je pravac p određen točkom $T_0 \in p$ i vektorom smjera $\vec{s}$ (p je jednoznačno određen s T_0 i $\vec{s} = \left[\overrightarrow{T_0T_1}\right]$).

Imamo: $T \in p$, $T \neq T_0$, ako i samo ako je vektor $\left[\overrightarrow{T_0T}\right]$ kolinearan s vektorom smjera $\vec{s}$, tj. ako postoji točno jedan $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tako da je

$$\left[\overrightarrow{T_0T}\right] = \lambda\vec{s}.$$

Dakle,

$$T \in p,\ T \neq T_0 \iff \exists!\lambda \neq 0 \ \left[\overrightarrow{T_0T}\right] = \lambda\vec{s}.$$



Budući je

$$\overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_0} = \vec{r}_T - \vec{r}_{T_0},$$

onda je

$$[\vec{r}_T] - [\vec{r}_{T_0}] = \lambda\vec{s}$$

ili

$$[\vec{r}_T] = [\vec{r}_{T_0}] + \lambda\vec{s} \tag{11}$$

što je **vektorska** jednadžba pravca p.

Neka su točke $T_0\,(x_0, y_0, z_0)$ i $T\,(x, y, z)$ dane svojim koordinatama i $\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$. Tada

$$[\vec{r}_T] = [\vec{r}_{T_0}] + \lambda\vec{s} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda l \\ y &= y_0 + \lambda m \\ z &= z_0 + \lambda n \end{aligned} \tag{12}$$

što je **parametarska** jednadžba pravca p.

Uočimo:

- Svakoj vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ odgovara točno jedna točka T na pravcu p (i obrnuto).
- Pravac se neće promijeniti ako vektoru smjera $\vec{s}$ promjenimo duljinu ili orijentaciju (svi vektori smjera su kolinearni):
$$\vec{s}_1 = \mu\vec{s},\ \mu \neq 0 \Longrightarrow$$
$$\begin{aligned} x &= x_0 + (\lambda\mu)\, l \\ y &= y_0 + (\lambda\mu)\, m \\ z &= z_0 + (\lambda\mu)\, n \end{aligned}$$
je opći oblik istog pravca p.

Kanonska jednadžba pravca. Kako je vektor $\left[\overrightarrow{T_0T}\right]$ kolinearan s vektorom smjera $\vec{s}$, tada je

$$\left[\overrightarrow{T_0T}\right] \times \vec{s} = \vec{0}$$

ili

$$\left[\overrightarrow{T_0T}\right] \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = \vec{0}, \qquad (13)$$

odakle razvojem po prvom retku i sređivanjem (sve su koordinate vektora na lijevoj strani jednake nuli!) dobivamo

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{14}$$

Ove se jednadžbe nazivaju **kanonska jednadžba pravca**.

Uočimo:

- Jednadžbe u (14) možemo dobiti ako eliminiramo parametar λ iz jednadžbi u (13). Iz prve jednadžbe dobivamo $\lambda=\frac{x-x_0}{l}$, slično za drugu i treću.
- Zapis (14) je formalan zapis budući neka od koordinata vektora smjera $\vec{s}$ može biti jednaka 0.

Primjer 7 *Nađite parametarsku i kanonsku jednadžbu pravca* p *koji prolazi točkom* $T_0\,(1,-2,5)$ *i čiji je vektor smjera* $\vec{s}=\vec{i}-4\vec{k}$.
Iz (12) slijedi

$$\begin{aligned} x &= 1+\lambda\cdot 1=1+\lambda \\ y &= -2+\lambda\cdot 0=-2 \\ z &= 5+\lambda\cdot(-4)=5-4\lambda \end{aligned}$$

Eliminacijom λ *dobivamo kanonsku jednadžbu pravca*

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-5}{-4}.$$

Ili iz (13)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y+2 & z-5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

što povlači

$$(-4\,(y+2) - 0\,(z-5))\,\vec{i} - ((-4)\,(x-1) - 1\,(z-5))\,\vec{j}$$
$$+\,(0\,(x-1) - 1\,(y+2))\,\vec{k} = \vec{0}$$

ili

$$-4\,(y+2) - 0\,(z-5) \;=\; 0 \Longrightarrow \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{-4}$$
$$(-4)\,(x-1) - 1\,(z-5) \;=\; 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{z-5}{-4}$$
$$0\,(x-1) - 1\,(y+2) \;=\; 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0}$$

iz čega slijedi kanonska jednadžba pravca.

Pravac kroz dvije točke. Neka je pravac p određen s dvije različite točke T_1, $T_2 \in p$. Tada je $\vec{s} = \left[\overrightarrow{T_1T_2}\right]$ vektor smjera tog pravca. Kako je

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = \vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1},$$

iz vektorske jednadžbe pravca dobivamo

$$[\vec{r}_T] = [\vec{r}_{T_1}] + \lambda\left([\vec{r}_{T_2}] - [\vec{r}_{T_1}]\right)$$

odnosno

$$[\vec{r}_T] = (1-\lambda)\,[\vec{r}_{T_1}] + \lambda\,[\vec{r}_{T_2}]$$

i to je **vektorska jednadžba pravca kroz dvije dane točke**.

Ako su točke zadane pomoću svojih koordinata $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ iz gornje jednadžbe dobivamo **parametarsku jednadžbe pravca kroz dvije točke**

$$\begin{aligned} x &= (1-\lambda)\,x_1 + \lambda x_2 \\ y &= (1-\lambda)\,y_1 + \lambda y_2 \\ z &= (1-\lambda)\,z_1 + \lambda z_2 \end{aligned}$$

i **kanonsku jednadžbu pravca kroz dvije točke**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Pravac kao presjek dviju ravnina.

Neka su ravnine zadane svojim općim jednadžbama

$$\Pi_1 \,...\, A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \;=\; 0$$

$$\Pi_2 \,...\, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \;=\; 0$$

Tri su mogućnosti:

1. Ravnine se podudaraju $\Pi_1 \equiv \Pi_2$

$$A_1 = \lambda A_2,\;\; B_1 = \lambda B_2,\;\; C_1 = \lambda C_2,\;\; D_1 = \lambda D_2,$$

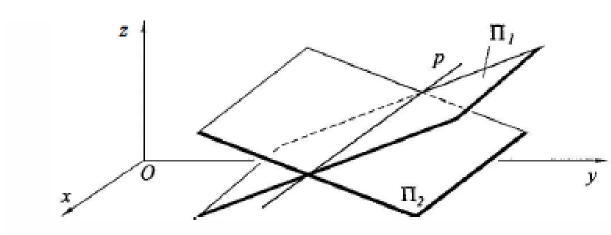
(gornji sustav ima dvoparametarsko rješenje).

2. Ravnine su različite i paralelne

$$A_1 = \lambda A_2,\;\; B_1 = \lambda B_2,\;\; C_1 = \lambda C_2,\;\; D_1 \neq \lambda D_2,$$

(gornji sustav nema rješenje).

3. Presjek ravnina je pravac p, što znači da im vektori normala nisu kolinearni (kao u prva dva slučaja). U tom slučaju gornji sustav ima jednoparametarsko rješenje iz kojeg možemo dobiti parametarsku jednadžbu pravca.



Primjer 8

Neka su dane ravnine:

a)

$$\Pi_1 \; ... \; x - y + 2z + 1 \; = \; 0$$

$$\Pi_2 \; ... \; -2x + 2y - 4z - 2 \; = \; 0$$

Imamo

$$A_1 = -2A_2, \quad B_1 = -2B_2, \quad C_1 = -2C_2, \quad D_1 = -2D_2,$$

pa je $\Pi_1 \equiv \Pi_2$. *Gornji sustav ima dvoparametarsko rješenje*

$$x = y - 2z + 1, \quad y, z \in \mathbb{R}$$

ili

$$x = \lambda - 2\mu + 1, \quad y = \lambda, \quad z = \mu, \qquad \lambda, \; \mu \in \mathbb{R}$$

što je parametarska jednadžba te ravnine.

b)

$$\Pi_1 \; ... \; x - y + 2z + 1 \; = \; 0$$

$$\Pi_2 \; ... \; -2x + 2y - 4z - 3 \; = \; 0$$

Imamo

$$A_1 = -2A_2, \quad B_1 = -2B_2, \quad C_1 = -2C_2, \quad D_1 \neq -2D_2,$$

pa su ravnine paralelne, što znači da gornji sustav nema rješenje. Naime, množenjem prve jednadžbe *s 2 i zbrajanjem s drugom dobivamo $-1 = 0$, što znači da je sustav nemoguć, tj. nema rješenje pa se ravnine ne sijeku (paralelne su).*

c)

$$\Pi_1 \dots x + y - z + 1 = 0$$

$$\Pi_2 \dots x + 2y + z + 2 = 0$$

Vektori normala nisu kolinearni, pa se ravnine sijeku u pravcu p. Ako prvu jednadžbu pomnoženu s -1 dodamo drugoj dobivamo

$$x + y - z + 1 = 0$$

$$y + 2z + 1 = 0$$

što povlači

$$y = -2z - 1$$

$$x = -y + z - 1 = 3z$$

ili

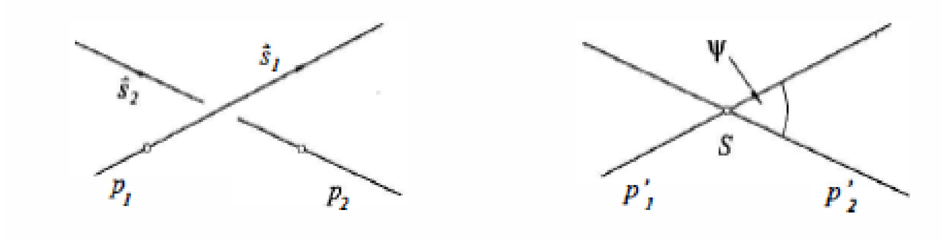
$$x = 3\lambda, \quad y = -2\lambda - 1, \quad z = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

što je parametarska jednadžba pravca čiji je kanonski oblik

$$p \dots \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Kut između pravaca.

Kut $\psi = \measuredangle(p_1, p_2)$ između dvaju pravaca p_1 i p_2 je (manji) kut koji zatvaraju pravci paralelni zadanima, a koji prolaze istom točkom ($0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$).



Ako su $\overrightarrow{s_1} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ i $\overrightarrow{s_2} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ vektori smjera od p_1 i p_2, redom. Očito je

$$\psi = \measuredangle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}), \text{ ako je } \quad 0 \le \measuredangle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}) \le \frac{\pi}{2}$$

ili

$$\psi = \pi - \measuredangle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}), \quad \text{ako je } \frac{\pi}{2} < \measuredangle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}) \le \pi.$$

U svakom slučaju imamo

$$\cos\psi = \frac{|\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}|}{|\overrightarrow{s_1}|\,|\overrightarrow{s_2}|},$$

odnosno

$$\cos\psi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Posebno ako su p_1 i p_2 okomiti, onda je

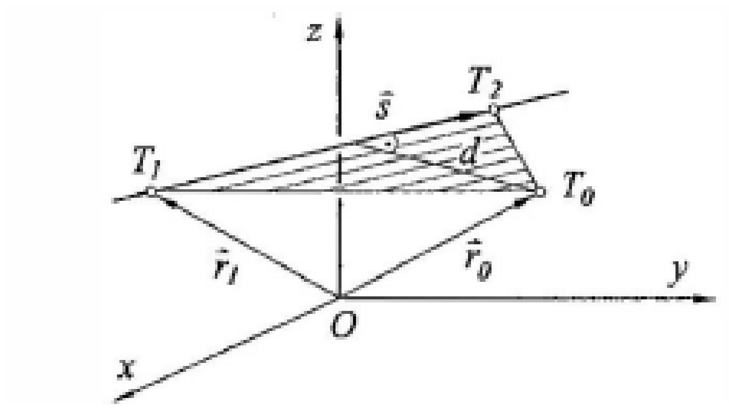
$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0 \quad \text{ili} \quad l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Ako su p_1 i p_2 paralelni (ili se podudaraju), onda je

$$\overrightarrow{s_1} = \lambda \overrightarrow{s_2} \quad \text{ili} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \ \text{(!)}$$

Udaljenost točke od pravca.

Neka je u prostoru dan pravac p i točka $T_0 \notin p$. Želimo naći udaljenost $d = d(T_0, p)$ te točke od pravca, tj. duljinu okomice na p spuštene iz T_0.



Neka je pravac p dan s

$$[\vec{r}_T] = [\vec{r}_{T_1}] + \lambda \vec{s}.$$

Neka je točka $T_2 \in p$, odabrana tako da je $[\overrightarrow{T_1 T_2}] = \vec{s}$. Tada je površina P trokuta $\triangle T_0 T_1 T_2$ jednaka

$$P = \frac{1}{2} \left| \overline{T_1 T_2} \right| d = \frac{1}{2} |\vec{s}| \, d \tag{15}$$

i

$$P = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{T_1T_0}] \times [\overrightarrow{T_1T_2}]\right| = \frac{1}{2}\left|([\overrightarrow{r_{T_0}}] - [\overrightarrow{r_{T_1}}]) \times \vec{s}\right| \qquad (16)$$

Sada iz (15) i (16) dobivamo

$$d(T_0, p) = d = \frac{|([\overrightarrow{r_{T_0}}] - [\overrightarrow{r_{T_1}}]) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

Primjer 9 *Odredimo udaljenost točke* $T_0(8, 5, 4)$ *od pravca*

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

Ovdje je

$$\begin{aligned} \vec{s} &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \\ [\overrightarrow{r_{T_0}}] &= 8\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k} \\ [\overrightarrow{r_{T_1}}] &= 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

pa je

$$([\overrightarrow{r_{T_0}}] - [\overrightarrow{r_{T_1}}]) \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8-2 & 5-1 & 4-3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

i

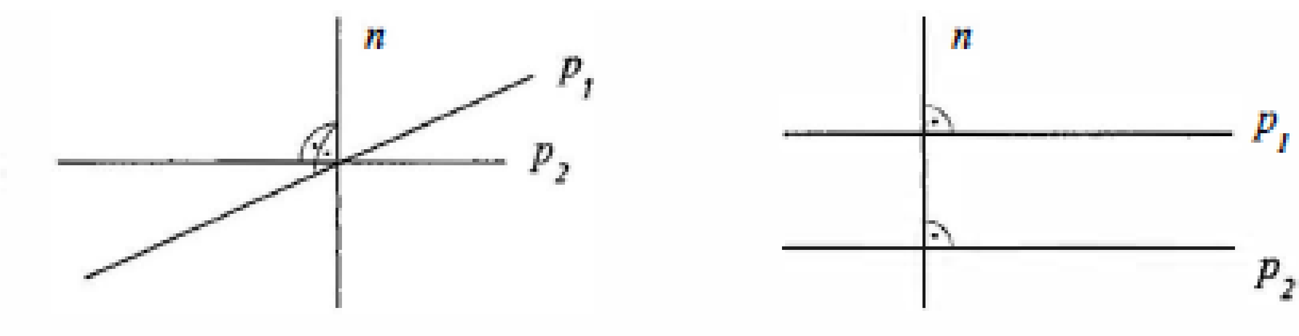
$$d(T_0,p) = \frac{|([\overrightarrow{r_{T_0}}]-[\overrightarrow{r_{T_1}}])\times\vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\left|2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}\right|}{\left|2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right|}$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 2.$$

Udaljenost dva pravaca.

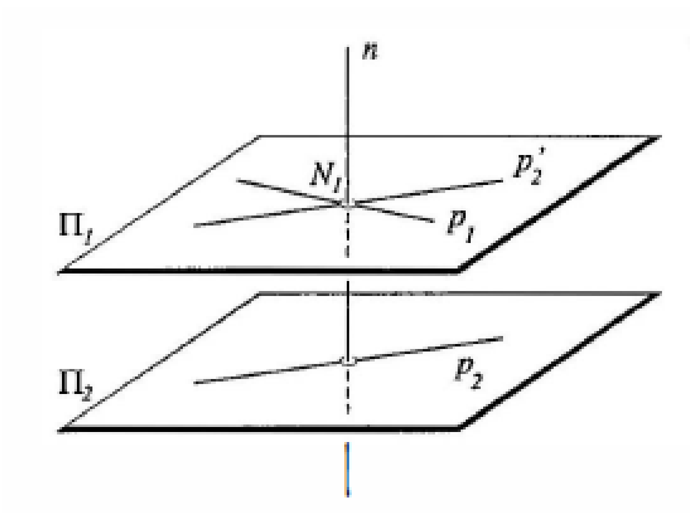
Bilo koja dva (različita) pravca p_1 i p_2 u prostoru imaju **zajedničku normalu** n, tj. pravac koji siječe oba pravca i okomit je na njih.

- Ako se p_1 i p_2 sijeku ili ako su paralelni, to je intuitivno jasno:



Uočimo: ako se p_1 i p_2 sijeku zajednička normala je jedinstvena, a ako su p_1 i p_2 paralelni postoji beskonačno zajedničkih normala.

- Ako su p_1 i p_2 mimosmjerni, onda postoji jedinstvena zajednička normala n:



  - Postoje paralelne ravnine Π_1 i Π_2 takve da je $p_1 \subset \Pi_1$ i $p_2 \subset \Pi_2$;

  - Neka je p_2' ortogonalna projekcija od p_2 na Π_1 i $\{N_1\} = p_2' \cap p_1$;

  - Onda je pravac n kroz N_1, okomit na Π_1, zajednička normala n.

  - Kad bi postojale dvije normale n_1 i n_2, bile bi paralelne, što bi značilo da su p_1 i p_2 u istoj ravnini, protivno pretpostavci.

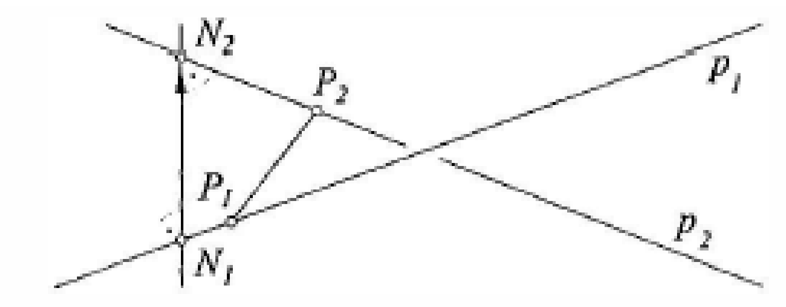
Pod **udaljenošću pravaca** p_1 i p_2 razumijevamo broj $d = d(p_1, p_2)$ definiran kao

$$d(p_1, p_2) = \min \{d(P_1, P_2) : P_1 \in p_1 \text{ i } P_2 \in p_2\}$$

Pokazuje se (knjiga - Horvatić) da je

$$d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2),$$

gdje su N_1 i N_2 točke presjeka zajedničke normale n s pravcima p_1 i p_2, redom.



Uočimo:

- Ako se p_1 i p_2 sijeku, onda je $N_1 = N_2$ pa je $d(p_1, p_2) = d(N_1, N_1) = 0$;
- Ako su p_1 i p_2 paralelni, onda je

$$d(p_1, p_2) = d(P_1, p_2) = d(p_1, P_2),$$

gdje su $P_1 \in p_1$ i $P_2 \in p_2$ proizvoljne točke na tim pravcima (udaljenost točke od pravca!).

Neka su (mimosmjerni) pravci p_1 i p_2 zadani jednadžbama

$$p_1 \text{ ... } \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \tag{17}$$

$$p_2 \text{ ... } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \tag{18}$$

Tada je $T_1 = (x_1, y_1, z_1) \in p_1$ i $T_2 = (x_2, y_2, z_2) \in p_2$, a vektori smjera pravaca p_1 i p_2 su $\vec{s}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ i $\vec{s}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$, redom.

Odredimo $d(p_1, p_2)$.

- Neka je Π_1 ravnina koja sadrži p_1 i paralelena je s p_2.

- Kako je p_2 paralelan s Π_1, svaka njegova točka $T \in p_2$ jednako je udaljena od Π_1 i neka ta udaljenost iznosi, recimo d. S druge strane, imamo

$$d = d(T, \Pi_1) = d(T, T'),$$

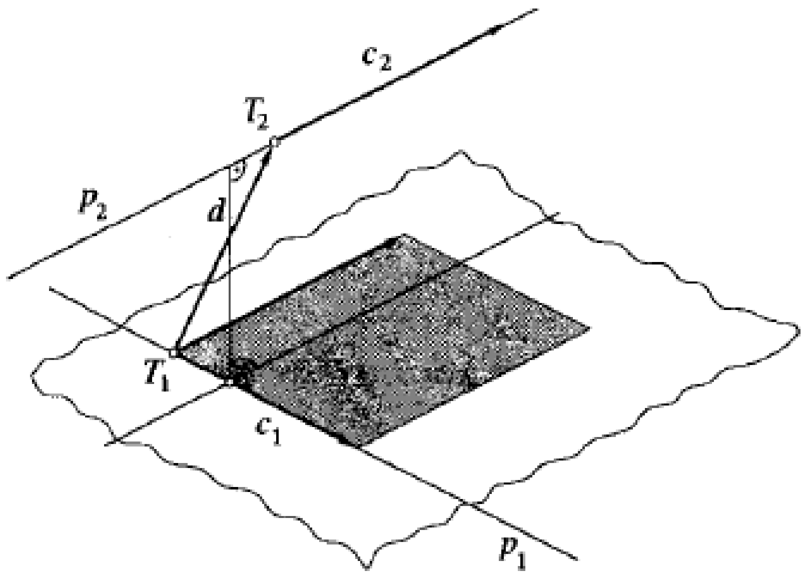
gdje je T' ortogonalna projekcija od T u Π_1. Očito je

$$d = d(N_2, \Pi_1) = d(N_2, N_1) = d(p_1, p_2),$$

jer je N_1 ortogonalna projekcija od N_2 u Π_1, a točke N_1 i N_2 su definirane kao prije.

Veličinu d najlakše je odrediti ovako:

Zamislimo paralelepiped određen vektorima: $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ i $\left[\overrightarrow{T_1T_2}\right]$:



Tada je volumen tog paralelepipeda

$$V = \pm (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \left[\overrightarrow{T_1T_2}\right] = \pm \left[\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{T_1T_2}\right]. \qquad (19)$$

Imamo dvije mogućnosti:

1. $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ i $\left[\overrightarrow{T_1T_2}\right]$ su komplanarni. Tada T_2 pripada ravnini određenoj s T_1, $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$, što znači da p_1 i p_2 leže u istoj ravnini. Dakle, p_1 i p_2 su ili paralelni ili se sijeku.

S druge strane, u ovom slučaju, je

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \left[\overrightarrow{T_1T_2}\right] = 0.$$

Budući su $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ različiti od nul vektora, imamo dvije mogućnosti da ovaj produkt bude jednak nula:

– $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ su kolinearni $\Longrightarrow$ p_1 i p_2 su paralelni

– $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nisu kolinearni $\Longrightarrow$ p_1 i p_2 se sijeku

<u>Uočimo:</u> *Pravci p_1 i p_2 dani s (17) i (18), koji nisu paraleleni, se sijeku ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

2. $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ i $\left[\overrightarrow{T_1T_2}\right]$ nisu komplanarni. Tada je volumen paralelepieda kojeg oni definiraju

$$V = P_B h = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|\, d, \tag{20}$$

budući je $d = d(T, \Pi_1)$, gdje je $T \in p_2$, visina h tog paralelepipeda.

Sada iz (19) i (20) dobivamo

$$\pm\, (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \left[\overrightarrow{T_1T_2}\right] = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|\, d \Longrightarrow$$

$$d(p_1, p_2) = d = \frac{\left|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \left[\overrightarrow{T_1T_2}\right]\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

Primjer 10 *Odredimo udaljenost pravaca*

$$p_1 \ \text{...}\ \frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-4}{5}$$

$$p_2 \ \text{...}\ \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-2}$$

Ovdje je

$$\vec{s}_1 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{s}_2 = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$T_1 = (7, -6, 4) \in p_1 \quad \text{i} \quad T_2 = (2, -3, 3) \in p_2$$

$$\Longrightarrow \left[\overrightarrow{T_1 T_2}\right] = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

Sada je

$$\left[\overrightarrow{T_1 T_2}\right](\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -9$$

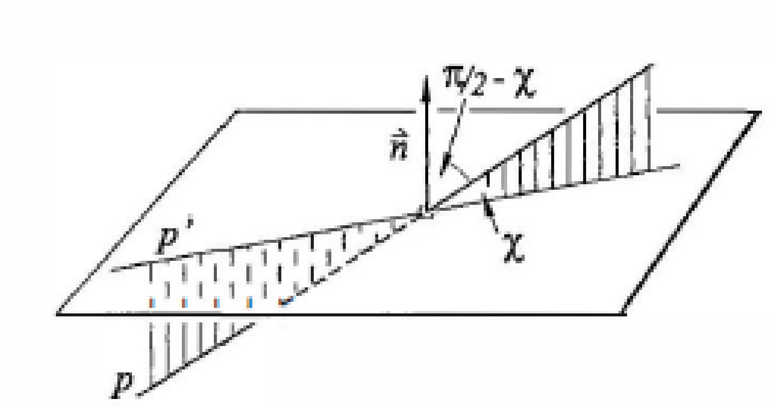
$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \Longrightarrow$$

$$|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3$$

pa je $d(p_1, p_2) = \frac{\left|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)\left[\overrightarrow{T_1 T_2}\right]\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|-9|}{3} = 3.$

2.4 Pravac i ravnina

Kut između pravca i ravnine. Neka je u prostoru dan pravac p i ravnina Π. Kut $\chi = \measuredangle(p, \Pi)$ između pravca i ravnine definiramo kao kut između pravca p i njegove ortogonalne projekcije p' na ravninu Π. Primijetimo da smo tako kut pravca i ravnine sveli na kut dvaju pravaca koji je definiran prije ($0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$).



Neka su pravac p i ravnina Π dani svojim vektorskim jednadžbama

$$p.... [\vec{r}_T] = [\vec{r}_{T_0}] + \lambda\vec{s}$$

$$\Pi.... [\vec{r}_T]\,\vec{n} - [\vec{r}_{T_1}]\,\vec{n} = 0$$

Očito je

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\overrightarrow{s}, \vec{n}), \text{ ako je } \quad 0 \leq \measuredangle(\overrightarrow{s}, \vec{n}) \leq \frac{\pi}{2}$$

ili

$$\chi = \measuredangle(\overrightarrow{s}, \vec{n}) - \frac{\pi}{2}, \text{ ako je } \frac{\pi}{2} < \measuredangle(\overrightarrow{s}, \vec{n}) \leq \pi.$$

U svakom slučaju imamo

$$\sin \chi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = |\cos \measuredangle (\overrightarrow{s}, \vec{n})| = \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{s}|\,|\vec{n}|},$$

odnosno

$$\sin \chi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

ako je $\overrightarrow{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ vektor smjera od p, a $\overrightarrow{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normala od Π.

Posebno ako je p paralelan s Π , onda je $\chi = 0$, tj.

$$\overrightarrow{s} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{ili} \quad Al + Bm + Cn = 0.$$

Ako je p okomit na Π, onda je

$$\vec{n} = \lambda \overrightarrow{s} \quad \text{ili} \quad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \ \text{(!)}$$

Presjek pravca i ravnine.

Neka su ravnina Π i p pravac zadani jednadžbama

$$\Pi \ldots Ax + By + Cz + D = 0$$

$$p \ldots \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Dvije su mogućnosti:

1. Ravnina i pravac su paralelni. Tada je

$$\overrightarrow{s} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{ili} \quad Al + Bm + Cn = 0.$$

U ovom slučaju gornji sustav ili nema rješenje (p ne leži u Π) ili je rješenje jednoparametarsko (p ne leži u Π).

2. Presjek pravca i ravnine je točka. (U ovom slučaju gornji sustav ima točno jedno rješenje).

Primjer 11

Neka su dani ravnina i pravac:

a)

$$\Pi_1 \text{ ... } x - y + 2z + 1 = 0$$

$$p \text{ ... } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$$

Imamo

$$Al + Bm + Cn = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0,$$

pa su ravnina i pravac su paralelni. *Kako točka* $T_0\,(1, 1, 2) \in p$ *ne leži u* Π_1, *onda i* p *ne leži u* Π_1.

Ili, nađemo parametarsku jednadžbu pravca

$$p \text{ ... } x = 1 - \lambda, \quad y = 1 - \lambda, \quad z = 2, \ \ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad (21)$$

i ispitujemo postoji li točka oblika (21) koja leži u Π_1 :

$$1 \cdot (1 - \lambda) - (1 - \lambda) + 2 \cdot 2 + 1 = 5 \neq 0,$$

pa p *ne leži u* Π_1.

b)

$$\Pi_2 \text{ ... } x - y + 2z - 4 = 0$$

$$p \text{ ... } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$$

Imamo

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

pa su ravnina i pravac su paralelni. Kako točka $T_0\,(1,1,2) \in p$ leži u Π_2, onda i p leži u Π_2.

Ili, koristeći parametarsku jednadžbu pravca (21), ispitujemo postoji ili točka oblika (21) koja leži u Π_2 :

$$1 \cdot (1-\lambda) - (1-\lambda) + 2 \cdot 2 - 4 = 0.$$

Dakle sve točke od p leže u Π_2, tj. p leži u Π_2.

c)

$$\Pi_3 \; ... \; x + 3y + 2z - 4 = 0$$

$$p \; ... \; \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0}$$

Imamo

$$Al + Bm + Cn \neq 0,$$

pa ravnina i pravac nisu paralelni, dakle sijeku se u točki. Koristeći parametarsku jednadžbu pravca (21), tražimo točku oblika (21) koja leži u Π_3 :

$$1 \cdot (1-\lambda) + 3\,(1-\lambda) + 2 \cdot 2 - 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$4 - 4\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1.$$

Ovo povlači

$$x = 1 - 1 = 0, \quad y = 1 - 1 = 0, \quad z = 2$$

tj. pravac p siječe ravninu Π u točki $T_0\,(0,0,2)$.