LINEARNA ALGEBRA

0. Ponavljanje

Borka Jadrijević

Sadržaj:

1. Linearni operatori
2. Matrice i determinante
3. Invarijante linearnog operatora
4. Sustavi linearnih jednadžbi
5. Unitarni prostori
6. Operatori na unitarnom prostoru

Literatura:

Udžbenici:

1. K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004. ;
2. S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
3. N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2001.

Zbirke zadataka:

1. N. Bakić, A. Milas, *Zbirka zadataka iz linearne algebre s rješenjima,* PMF–Matematički odjel, HMD, Zagreb, 1995.;
2. N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2001.

Obveze:

- predavanja ($\geq$ 70%)
- vježbe ($\geq$ 70%)

Provjere znanja:

- *dva kolokvija:*
  - oba pozitivna
  - zadaci ($\geq$ 50%)
- *ispit:*
  - pismeni i usmeni.

Prisjetimo se:

Definicija

Uređeni par $(G, *)$, *koji se sastoji od* G *neprazanog skupa* G *i binarne operacije* $* : G \times G \longrightarrow G$ *nazivamo* **grupa** *ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

i) *(Asocijativnost) Za sve* $a, b, c \in G$ *vrijedi*

$$(a * b) * c = a * (b * c)\,;$$

ii) *(Postojanje jediničnog elementa) Postoji (jedinstven)* $e \in G$ *sa svojstvom*

$$e * a = a * e = a, \text{ za sve } a \in G;$$

iii) *(Postojanje inverza) Za svaki* $a \in G$ *postoji (jedinstven)* $a^{-1} \in G$, *tako da vrijedi da*

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Grupa $(G, *)$ *je komutativna ili Abelova grupa ako dodatno vrijedi:* $a * b = b * a$ *za svaki izbor* $a, b \in G$.

Napomena

- *Obično pišemo:*
$$a * b \equiv a \cdot b \equiv ab,$$
- *Apstraktnu grupu* $(G, \cdot)$ *(neprecizno) nazivamo "multiplikativna" grupa, binarnu operaciju* $\cdot$ *"množenje" i neutralni element često označavamo sa* 1 *i nazivamo* **jedinica** *;*
- *U Abelovoj grupi binarnu operaciju obično zapisujemo aditivno, tj. ako grupu zadamo sa* $(G, +)$ *onda je nazivamo "aditivna" grupa i podrazumijevamo da je Abelova. Neutralni element aditivne grupe nazivamo* **nula** *(i označavamo sa* 0*), a inverzni element od* a *označavamo s* $-a$ *(umjesto* a^{-1}*) i nazivamo* **suprotni element**.

Definicija

Uređenu trojku $(P, +, \cdot)$ *koja se sastoji od nepraznog skupa* P *i dvije binarne operacije "+" i "·" nazivamo* **prstenom** *ako je ispunjeno:*

i) $(P, +)$ *je Abelova grupa;*

ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, *za svaki izbor* $a, b, c \in P$ *(asocijativnost);*

iii) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, *za svaki izbor* $a, b, c \in P$ *(lijeva distributivnost);*

iv) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, *za svaki izbor* $a, b, c \in P$ *(desna distributivnost);*

Prsten $(P, +, \cdot)$ *je* **komutativan** *ako dodatno vrijedi:*

v) $a \cdot b = b \cdot a$, *za svaki izbor* $a, b \in P$.

$(P, +, \cdot)$ *je* **prsten s jedinicom** *ako postoji element* $1 \in P$ *takav da vrijedi* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, *za svaki izbor* $a \in P$.

Definicija

Prsten $(P, +, \cdot)$ *u kojem je* $(P \setminus \{0\}, \cdot)$ *Abelova grupa naziva se* **polje .**

Po ovoj definiciji polje ima barem dva elementa, i vrijedi $0 \neq 1$;

Definicija

Neka je $V = (V, +)$ *Abelova grupa i* $F = (F, +, \cdot)$ *polje. Nadalje, neka je*

$$h : F \times V \to V$$

preslikavanje kojeg nazivamo vanjsko ili hibridno množenje, i kratko označujemo sa $h(\alpha, a) = \alpha a$, *koje ima ova svojstva:*

i) *kvaziasocijativnost, tj.*

$$\alpha (\beta a) = (\alpha \beta) a, \quad \forall \alpha, \beta \in F, \ \forall a \in V;$$

ii) *posjedovanje jedinice, tj.*

$$1 \cdot a = a, \quad 1 \in F \ \ i \ \forall a \in V;$$

Definicija (- nastavak)

iii) *distributivnost u odnosu na zbrajanje u F, tj.*

$$(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in F, \ \forall a \in V;$$

iv) *distributivnost u odnosu na zbrajanje u V, tj.*

$$\alpha\, (a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad \forall \alpha \in F, \forall a, b \in V.$$

Tada uređenu trojku (V, F, h) nazivamo **linearni** *ili* **vektorski prostor** .

Napomena

U svakom vektorskom prostoru vrijedi:

- $\alpha a = \Theta$ *ako i samo ako je* $a = \Theta$ *ili* $\alpha = 0$.