6. KOMBINATORIKA

6.1 Produktno pravilo

Osnovni problem: Nalaženje kardinalnog broja ($|A|$) konačnih skupova zadanih na razne načine.

Pravilo zbrajanja:

- Ako su A i B konačni disjunktni skupovi, onda vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B|$;

Propozicija 1 Neka su A_1 i A_2 neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$.

Napomena: Ako se nešto može obaviti na m načina, a svaki način ima n ishoda, onda je ukupan broj mogućih ishoda jednak mn.

Teorem 1 (Produktno pravilo) Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi

$$|A_1 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_n|$$

ili $\left|\prod_{k=1}^{n} A_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$.

Skup svih funkcija $f : A \to B$, gdje su A i B neprazni konačni skupovi, označimo sa B^A.

Teorem 2 Neka su A i B neprazni konačni skupovi. Onda vrijedi $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

Napomena: Bilo koja funkcja $f : A \to B$ može vrijednost $f(a_1)$ poprimiti na $|B| = m$ načina, $f(a_2)$ isto na $|B| = m$ načina,..., $f(a_n)$ na $|B| = m$ načina, onda f možmo zadati na m^n načina.

Korolar 1 Broj uređenih $n-$torki sastavjenih od 0 i 1 (ili neka druga dva različita elmenta) jednak je 2^n.

Teorem 3 Neka je X neprazni konačan skup. Onda za partitivni skup 2^X vrijedi $\left|2^X\right| = 2^{|X|}$.

Napomena: Broj podskupova $n-$članog skupa jednak je broju uređenih $n-$torki nula i jedinica, a to je 2^n.

Propozicija 2 Neka je dan prirodan broj n. Kardinalan broj skupa svih Booleovi funkcija $F : B^n \to B$, $B = \{0, 1\}$ je jednak 2^{2^n}.

6.2 Varijacije, permutacije i kombinacije bez ponavljanja

Razlikujemo:

- Varijacije (i permutacije kao specijalan slučaj) - prebrojavamo uređene $k-$torke nekog konačnog skupa (poredak bitan);

- Kombinacije - prebrojavamo podskupove nekog konačnog skupa (poredak nije bitan);

Razlikujemo: varijacije i kombinacije bez i s ponavljanjem.

Definicija Varijacijom bez ponavljanja reda k konačnog skupa $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$, $k \leq n$, nazivamo bilo koju uređenu $k-$torku različitih elmenata iz A. Broj varijacija bez ponavljanja reda k označavamo sa P_k^n.

Varijaciju bez ponavljanja reda n nazivamo permutacija $n-$članog skupa. Broj permutacija $n-$članog skupa označavamo sa P^n.

Napomena: Svaku permutaciju skupa A_n možemo poistovjetiti s nekom bijekcijom $f : A_n \to A_n$.

Teorem 4 Broj varijacija bez ponavljanja reda $k \leq n$ skupa od n elemenata jednak je

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n\,(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)\,.$$

Broj permutacija $n-$članog skupa jednak je $n!$.

Definicija Kombinacijom bez ponavljanja reda k konačnog skupa $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$, $k \leq n$, nazivamo bilo koji $k-$člani podskup od A.

Teorem 5 Broj kombinacija bez ponavljanja reda $k \leq n$ skupa od n elemenata jednak je

$$\binom{n}{k} := \frac{n\,(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Svojstva:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Pascalov trokut

$$
\begin{array}{c||cccccc||cccccc}
n=0 & \binom{0}{0} & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & 1 & 1 & & & & \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
n=5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Propozicija 3 (Binomna formula) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom ili kombinatorički.

6.3 Varijacije, permutacije i kombinacije s ponavljanjem

Definicija Neka je zadan skup od k elemenata $A_k = \{a_1, ..., a_k\}$. Promatrajmo sve uređene $n-$torke elmenata iz A u kojima se element a_1 pojavljuje n_1 puta, element a_2 pojavljuje n_2 puta, ..., element a_k pojavljuje n_k puta, pri čemu je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Takve $n-$torke nazivamo permutacije $n-$tog reda s ponavljanjem, a njihov broj označavamo s $P^n_{n_1 n_2 ... n_k}$.

Teorem 6 Broj permutacije $n-$tog reda s ponavljanjem skupa $A_k = \{a_1, ..., a_k\}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i = 1, ..., k$, jednak je

$$P^n_{n_1 n_2 ... n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

Teorem 7 (Multinomni teorem)

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + ... + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot ... \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k},$$

gdje u gornjoj sumi zbrajamo po svim $k-$torkama cijelih brojeva $n_1, n_2, ..., n_k \geq 0$ takvim da je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Kraći zapis multinomnog teorema (pomoću **multiindeksa**)

Definirajmo:

- $\mathbf{x} := (x_1, x_2, ..., x_k)$;
- $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in \mathbb{N}_0$;
- $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k$;
- $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_k^{\alpha_k}$;
- $\binom{\mathbf{n}}{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_k!}$;

Sada po multinomnom teoremu

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot ... \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k},$$

vrijedi:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=n} \binom{\mathbf{n}}{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

Definicija Neka je zadan skup od n elemenata $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$. Promatrajmo sve uređene $k-$torke elmenata iz A, pri čemu se svaki element može i ponavljati. Takve $k-$torke nazivamo varijacije $k-$tog reda s ponavljanjem $n-$članog skupa, a njihov broj označavamo s V_n^k.

Teorem 8

$$V_n^k = n^k.$$

Definicija Neka je zadan skup od n elemenata $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$. Promatrajmo sve neuređene $k-$torke elmenata iz A_n, pri čemu se svaki element može i ponavljati. Takve neuređene $k-$torke nazivamo kombinacije $k-$tog reda s ponavljanjem $n-$članog skupa.

Teorem 9 Broj kombinacije $k-$tog reda s ponavljanjem $n-$članog skupa jedanak je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

6.4 Formula uključivanja i isključivanja

Ako su A_1 i A_2 konačni skupovi, onda je

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| .$$

Slično, za tri konačna skupa

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| -$$

$$- |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| .$$

Teorem 9 (Formula uključivanja i isključivanja ili Sylvesterova formula) Neka su $A_1, A_2, ..., A_k$ konačni skupovi. Onda vrijedi

$$|A_1 \cup ... \cup A_k| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n| .$$

Općenitiji problem:

Neka je zadan konačan skup X s N elemenata. Neka su $S(1), ..., S(n)$, neka svojstva koja imaju neki njegovi elementi. Pretpostavka je da znamo za svaki element ima li svojstvo $S(i)$ ili ne. Neki element može imati više navedenih svojstava.

Oznake:

- N_0 je broj elemenata iz X koje nemaju ni jedno od svojstava $S(1), ..., S(n)$;
- $N_{i_1 \ldots i_k}$ je broj elemenata iz X koji imaju svojstva $S(i_1), ..., S(i_k)$.

Teorem 10 (Formula uključivanja i isključivanja)

$$N_0 = N - \sum_{i=1}^{n} N_i + \sum_{i<j} N_{ij} + \sum_{i<j<k} N_{ijk} + \ldots + (-1)^n N_{12\ldots n}.$$

Napomena: Ako je $n = 2$, tj. ako imamo samo dva svojstva $S(1), S(2)$, onda je

$$N_0 = N - (N_1 + N_2) + N_{12}$$

Primjer: Koliko ima permutacija bez ponavljanja f skupa $\{1, 2, ..., n\}$ takvih da je $f(k) \neq k$ za sve $k = 1, 2, ..., n$? Takve permutacije kod kojih niti jedan element nije na svom mjestu nazivamo neredima ili deranžmanima.

6.5 Dirichletov princip

Teorem 11 (Dirichletov princip) Neka je n predmeta smješteno u m kutija i $n > m$. Onda postoji kuija s barem 2 predmeta.

Teorem 12 Neka je $f : A \to B$ funkcija gdje su A i B konačni skupovi i $|A| > |B|$. Onda f nije injekcija, tj. postoje dva različita elementa $a_1, a_2 \in A$ takva da je $f(a_1) = f(a_2)$.

Teorem 13 (poopćeni Dirichletov princip) Neka je n predmeta smješteno u m kutija.Onda postoji kutija s barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ predmeta.

Teorem 14 Neka je $f : A \to B$ funkcija gdje su A i B konačni skupovi i $|A| = n, |B| = m$. Onda postoji element $b \in A$ koji je slika barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ elemenata iz A.