4. BINARNE RELACIJE

4.1 Relacije. Relacije ekvivalencije.

Definicija *Binarna relacija na skupu X* je bilo koji neprazan podskup $\rho \subseteq X \times X$. Kažemo da je x *u relaciji* ρ s y (ili x i y su u relaciji ρ) ako je $(x, y) \in \rho$. Pišemo $x\rho y$.

Napomena:

- binarna relacija - odnos između dva elementa (važno koji je prvi a koji drugi);
- x i y su *neusporedivi (po ρ)* ako nije $x\rho y$ ni $y\rho x$.

Definicija Za binarnu relaciju ρ na skupu X kažemo da je:

i) *refleksivna* ako vrijedi $(\forall x \in X)\ x\rho x$;

ii) *simetrična* ako vrijedi $(\forall x, y \in X)\ (x\rho y \Longrightarrow y\rho x)$;

iii) *antisimetrična* ako vrijedi

$$(\forall x, y \in X)\, (x\rho y \ \wedge \ y\rho x \Longrightarrow x = y)\,;$$

iv) *tranzitivna* ako vrijedi

$$(\forall x, y, z \in X)\, (x\rho y \ \wedge \ y\rho z \Longrightarrow x\rho z)\,.$$

Napomena: Za binarnu relaciju ρ na skupu X kažemo da je *funkcija* ako *za svaki* $x \in X$ postoji *točno jedan* $y \in X$ tako da je $x\rho y$, tj.

$$(\forall x \in X)\,(x\rho y_1 \ \wedge \ x\rho y_2 \Longrightarrow y_1 = y_2)$$

Oznaka: $f : X \to X$, $y = f(x)$.
Obratno, svaka funkcija $f : X \to X$ određuje relaciju ρ. Definiramo

$$x\rho y \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Definicija Za binarnu relaciju ρ na skupu X kažemo da je *relacija ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

4.2 Particija skupa. Razredi (klase) ekvivalencije.

Definicija Kažemo da obitelj podskupova $\{A_i\}_{i\in I}$ od X čini *particiju* (rastav) skupa X ako vrijedi:

i) $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, tj. obitelj skupova $\{A_i\}_{i\in I}$ je *pokrivač* od X;

ii) $A_i \cap A_j$ za sve $i, j \in I$, $i \neq j$, tj. skupovi iz $\{A_i\}_{i\in I}$ su međusobno disjunktni.

Često se particijom skupa X smatramo prikaz

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

kao disjunktne unije podskupova.

Definicija Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X. *Razred (klasa) ekvivalencije* $[x]$ elementa $x \in X$ je skup svih elemenata iz X koji su u relaciji ρ s x. Dakle,

$$[x] = \{y \in X : x \rho y\} \subseteq X.$$

Napomena:

- $x \in [x]$ jer je $x \rho x$;

- Element $y \in [x]$ se naziva *reprezentant* razreda (klase) $[x]$.

Teorem 1 Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X. Onda za sve $x, y \in X$ vrijedi ili $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$. Pritom je $x \rho y$ ako i samo ako je $[x] = [y]$.

Uočimo: Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu X, onda je obitelj svih klasa ekvivalencije $[x]$ particija od X, tj.

$$X = \bigcup_{x \in X} [x] = \bigoplus_{x \in X} [x]$$

Teorem 2 Neka je $\{A_i\}_{i \in I}$ particija skupa X. Definirajmo relaciju ρ na skupu X tako da je $x \rho y$ onda i samo onda ako je y element istog skupa iz particije kao i x. Onda je ρ relacija ekvivalencije ρ na skupu X, a klase ekvivalencije se podudaraju sa A_i.

Definicija Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X, onda skup svih klasa ekvivalencije nazivamo *kvocijentni skup* s obzirom na relaciju ρ i označavamo

$$X/\rho = \{[x]\}_{x \in X}.$$

Dakle, kvocijentni skup je particija od X s obzirom na relaciju ρ.

Propozicija 1 Kvocijentni skup na skupu svih cijelih brojeva po relaciji "biti kongruentan modulo n" ($\equiv \pmod n$) jednak je

$$\mathbb{Z}/_{\equiv} = \{[0], \ [1], ..., [n-1]\}$$

($n-$člani skup).

Taj skup se naziva *kvocijentni skup ostataka modulo* n, ili skup ostataka pri dijeljenju s n. Razredi ekvivalencije su:

$$[0] = \{qn : q \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$$

$$[1] = \{qn + 1 : q \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}{+}1$$

$$\vdots$$

$$[n-1] = \{qn + (n-1) : q \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}{+}\,(n{-}1)\,.$$

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X i H bilo koji skup. Ako je $f : X \to H$ neka funkcija, pitanje je je li funkcija

$$\hat{f} : X/\rho \to H, \quad \hat{f}\,([x]) = f\,(x)$$

dobro definirana?

Odgovor: Da bi $\hat{f}$ bila dobro definirana mora biti

$$f\,(x) = f\,(y) \quad \text{za } x\rho y,$$

tj. f mora biti na svakom razredu ekvivalencije konstantna. Tada $\hat{f}$ ne ovisi o izboru reprezentanta iz razreda ekvivalencije $[x]$.

4.3 Relacija poretka

Definicija Za binarnu relaciju ρ na skupu X kažemo da je *relacija parcijalnog (djelomočnog) poretka* ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Napomena:

- Jedina binarna relacija ρ na skupu X koja je istodobno i relacija ekvivalencije i relacija parcijalnog poretka (simetrična i antisimetrična) je relacija jednakosti $" = "$;

- Skup X na kojem je zadana relacija parcijalnog poretka, oznaka $\leq$, kraće označavamo $(X, \leq)$ i kažemo da je X parcijalno poredan skup;

- Ako je $(X, \leq)$ parcijalno poredan skup, onda definiramo, za $x, y \in X$, $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$. Tada $(X, <)$ nije parcijalno poredan skup (relacija $<$ nije ni refleksivna ni antisimetrična).

Definicija Neka je $(X, \leq)$ parcijalno poredan skup i $S \subseteq X$.

- Kažemo da je $m \in X \;\; (M \in X)$ **donja** (*gornja*) **međa skupa** S ako je

$$(\forall s \in S)\,(m \leq s) \qquad (\;(\forall s \in S)\,(s \leq M)\;)$$

- Za skup S kažemo da je **omeđen odozdol** (*odozgor*) ako ima barem jednu donju (gornju) među.

- Kažemo da je $m^* \in X \;\; (M^* \in X)$, ako postoji, **infinum** (*suprenum*) **skupa** S, i označavamo $\inf S$ ($\sup S$) ako vrijedi:
  - $m^* = \inf S$ ($M^* = \sup S$) je donja (*gornja*) međa od S;
  - za svaku donju (gornju) među m (M) vrijedi $m \leq \inf S$ ($\sup S \leq M$).

- Ako vrijedi da je $\inf S \in S$ ($\sup S \in S$) onda $\inf S$ ($\sup S$) nazivamo **minimum** (*maksimum*) **skupa** S, i označavamo $\min S$ ($\max S$).

Definicija Neka je $(X, \leq)$ parcijalno poredan skup. Za $(X, \leq)$ kažemo da je *totalno poredan skup* ako za sve $x, y \in X$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$, tj. svaka dva elementa su usporediva.

Definicija Neka je $(X, \leq)$ totalno poredan skup. Za $(X, \leq)$ kažemo da je *dobro poredan skup ili lanac*,ako svaki njegov neprazan podskup ima minimalni element.

Definicija Neka su $(X_1, \leq_1)$ i $(X_2, \leq_2)$ dva parcijalno poredana skupa. *Kartezijev produkt parcijalno poredanih skupova* definiramo kao $(X_1 \times X_2, \ \leq)$. Pritom za (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in X_1 \times X_2$, definiramo $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ ako je $a_1 \leq_1 b_1$ i $a_2 \leq_2 b_2$.

Napomena:

- Slično se definira za Kartezijev produkt više parcijalno poredanih skupova;

- Neka su $(X_1, \leq_1)$ i $(X_2, \leq_2)$ dva totalno poredana skupa, $(X_1 \times X_2, \ \leq)$ ne mora biti totalno poredan.

Definicija Neka su $(X_1, \leq_1)$ i $(X_2, \leq_2)$ dva parcijalno poredana skupa. Na Kartezijevom produktu $X_1 \times X_2$ definiramo tzv. relaciju *leksikografskog poredaka* $\leq_L$. Pritom za (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in X_1 \times X_2$, definiramo $(a_1, a_2) \leq_L (b_1, b_2)$ ako je ispunjen jedan od dva sljedeća uvjeta:

- $a_1 <_1 b_1$ (a_2, b_2 bilo kakvi);

- $a_1 = b_1$ i $a_2 <_2 b_2$.

$(X_1 \times X_2, \ \leq_L)$ je parcijalno poredan skup.

Napomena:

- Slično se definira za Kartezijev produkt više parcijalno poredanih skupova;

- Neka su $(X_1, \leq_1)$ i $(X_2, \leq_2)$ dva totalno poredana skupa, tada je $(X_1 \times X_2, \ \leq_L)$ totalno poredan.

4.4 Hasseov dijagam relacije poretka

Neka je X konačan skup i ρ relacija na X. Tada relaciju ρ možemo predočiti dijagramom kojeg nazivamo *usmjereni graf.*

- Svaki element skupa reprezentira (označena) točka koju nazivamo *čvor* ili *vrh*.

- Ako je $a\rho b$, tada dva čvora označena s a i b povežemo strelicom od a do b. Tu strelicu nazivamo *usmjereni brid*. Ako je $a\rho b$ i $b\rho a$ onda imamo dva usmjerena brida između a i b, pa, zbog jednostavnosti, a i b povezujemo jednom dvostranom strelicom.

- Ako je $a\rho a$ usmjereni brid između a i a se naziva *petlja*.

Neka je X konačan skup i ρ ($\leq$) relacija parcijalnog poretka na $X.$ Tada relaciju $\leq$ možemo predočiti jednostavnijom (zornijom) vrstom dijagrama kojeg nazivamo *Hasseov dijagam.*

- Svaki element skupa reprezentira (označena) točka koju nazivamo *čvor* ili *vrh*.

- Ispuštamo petlje, jer je relacija refleksivna.

- Ako je $a < b$ i između njih ne postoji niti jedan $c \in X$, tj. iz $a \leq c \leq b$ slijedi $a = c$ ili $b = c$, onda čvor koji pripada b satavljamo iznad čvora koji pripada a i spajamo ih crtom (a ne strelicom od a do b).

- Usmjereni brid koji je impliciran tranzitivnošću ne crtamo.

Definicija Kažemo da je parcijalno poredan skup $(X, \leq_1)$ *izomorfan* parcijalno poredanom skupu $(Y, \leq_2)$ ako postoji bijekcija $f : X \to Y$ koja čuva poredak, tj. tako da vrijedi

$$(\forall x, y \in X) \quad (x \leq_1 y \Longrightarrow f(x) \leq_2 f(y))$$

4.5 Mreže

Definicija Parcijalno poredan skup $(X, \leq)$ naziva se *mreža* ako za svaki par elemenata a, $b \in X$ postoji $\sup\{a, b\}$ i $\inf\{a, b\}$. Na taj način možemo uvesti dvije binarne operacije u parcijalno poredan skup X :

$$a + b = \sup\{a, b\}\,, \qquad a \cdot b = \inf\{a, b\}$$

Napomena: Ovo zanači da u mreži svaki dvočlan podskup ima infinum (suprenum), a to znači i svaki konačan podskup.

Definicija Parcijalno poredan skup $(X, \leq)$ naziva se *potpuna mreža* ako za svaki njegov podskup (konačan ili beskonačan) ima infinum i suprenum. Svaka potpuna mreža onda ima $\inf X$, koji nazivamo *nula* i $\sup X$ koji nazivamo *jedinica.*

Teorem 3 Za operacije $+$ i $\cdot$ na mreži $(X, \leq)$ vrijede svojstva:

1. komutativnost: $a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a;$

2. asocijativnost:

$$(a + b) + c = a + (b + c)\,,$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,;$$

3. apsortivnost ili svojstvo upijanja:

$a \cdot (a + c) = a, a + (a \cdot c) = a$

4. komutativnost: $a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a;$

5. idempotentnost zbrajanja i množenja:

$a + a = a, \qquad a \cdot a = a;$

6. $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a;$

Napomena: distributivnost općenito ne vrijedi.

Definicija Za mrežu $(X, \leq)$ kažemo da je *distributivna mreža* ako u njoj vrijedi zakon distribucije, tj. za svaki a, $b \in X$ vrijedi $a\,(b + c) = ab + ac$.

Definicija Za element $\bar{a}$ u mreži $(X, \leq)$ kažemo da je *komplement* elementa a ako je $a + \bar{a} = 1, \quad a \cdot \bar{a} = 0$. Ako svaki element ima komplement kažemo da je $(X, \leq)$ *komplementarna mreža.*

Napomena: U distributivnoj mreži komplementiranje je jednoznačno (dokaz -sami).

Napomena: Ovo znači da je distributivna i komplementarna potpuna mreža X Booleova algebra $(X, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$. Vrijedi i obrat.

4.5 Skupovni prikaz konačnih Booleovih algebri

Definicija Neka je $(B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ Booleova algebra. Za $a, b \in B$ kažemo da je $a \leq b$ ako je $ab = a$.

Propozicija 2 Neka su a, b, c, d bilo koji elementi Booleove algebre B. Relacija $\leq$ ima sljedeća svojstva:

i) $(B, \leq)$ je parcijalno poredan skup;

ii) $a \leq b$ onda i samo onda ako je $a + b = b$;

iii) ako je $a \leq b$ i $c \leq d$ onda je $ac \leq bd$;

iv) $ab = \inf \{a, b\}$, $a + b = \sup \{a, b\}$;

v) $a \leq b$ onda i samo onda ako je $\bar{b} \leq \bar{a}$.