Diskretna matematika

1. **Skupovi**
2. **Matematička logika**
3. **Cijeli brojevi**
4. **Binarne relacije**
5. **Rekurzivne relacije**
6. **Kombinatorika**

Literatura:

- Darko Žubrinić, *Diskretna matematika,* Element, Zagreb 1997.
- D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001

Obveze:

- predavanja ($\geq 70\%$)
- vježbe ($\geq 70\%$)

Provjere znanja:

- *tri kolokvija:*

\- zadaci i teoretska pitanja
\- sva tri pozitivna ($\geq 50\%$).

- *ispit:*

\- zadaci i teoretska pitanja
\- tri dijela, sva tri pozitivna ($\geq 50\%$).

- "kontinuirani" (neprekinuti) skupovi (npr. $\mathbb{R}, [0,1], ..$);

- "diskretni" skupovi (npr. konačni, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, ...$);

- <u>Diskretna matematika</u>

\- temelj su diskretni skupovi i diskretne funkcije;

- <u>"Kontinuirana" matematika (matematička analiza)</u>

\- temelj su kontinuirani skupovi ($\mathbb{R}$) i kontinuirane funkcije;

Diskretna matematika obuhvaća: relacije na diskretnim skupovima, rekurzivne relacije, matematičku logiku, Booleovu algebru, kombinatoriku, algoritme, teoriju grafova, diskretne algebarske strukture[1], ...

[1] <u>Algebarskom strukturom</u> nazivamo bilo koji skup na kojem je definirana barem jedna operacija.

1. SKUPOVI

1.1 Temeljne oznake i definicije

- *Skup* je osnovni matematički pojam (ne definira se);

- Skup je svaka množina (nekih) objekata koje nazivamo *elementima* ili *članovima* skupa;

- Oznake:

- skupove - velikim slovoma $A, B, S, X, ...$;

- elemente - malim slovoma $a, b, s, x, ...$;

- činjenicu da element x pripada skupu A bilježimo sa $x \in A$;

- činjenicu da element x ne pripada skupu A bilježimo sa $x \notin A$;

- Skupove zadajemo:

- popisivanjem njegovih elemenata (ako je to moguće);

- opisno, pomoću nekog svojstva.

1.2 Odnosi (relacije) među skupovima

Definicija Za skup A kažemo da je podskup skupa B ako je A sadržan u B, tj. ako je svaki element x skupa A, element skupa B. Ili

$$(\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Pišemo $A \subseteq B$.
Ako je $A \subseteq B$ onda kažemo da je B nadskup od A (oznaka $B \supseteq A$).

$" \subseteq "$ - inkluzija (uključivanje).

Definicija Kažemo da su skupovi A i B jednaki ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Pišemo $A = B$.

Definicija Kažemo da je A pravi podskup od B ako vrijedi $A \subseteq B$ i $A \neq B$. Pišemo $A \subset B$.

Vrijedi:

- $A \subseteq A$ za svaki skup A;
- $\emptyset \subseteq A$ za svaki skup A, gdje je $\emptyset$ oznaka za prazan skup, tj. skup bez elemenata;

1.3 Operacije sa skupovima

Primjer

$B = \{x : \ x \text{ nije prirodan broj}\}$ - neprecizno definiran skup

Da bi B bio dobro definiran uvodimo pojam univerzalnog skupa U. To je skup koji je prozivoljan, ali unaprijed zadan i svi skupovi koje promatramo su podskupovi tog skupa.

Definicija Neka je A podskup univerzalnog skupa U. Skup $\{x \in U : \ x \notin A\}$ nazivamo komplement skupa A i označavamo sa $\bar{A}$ (ili A^C).

Definicija Neka su skupovi A i B (podskupovi univerzalnog skupa U).

Skup $\{x : \ x \in A$ ili $x \in B\}$ nazivamo unija skupova A i B. Oznaka: $A \cup B$.

Skup $\{x : \ x \in A$ i $x \in B\}$ nazivamo presjek skupova A i B. Oznaka: $A \cap B$.

Skup $\{x : \ x \in A$ i $x \notin B\}$ nazivamo razlika skupova A i B. Oznaka: $A \setminus B$.

Definicija Neka je X skup. Skup svih podskupova od X nazivamo partitivan skup od X i označavamo sa 2^X (ili $\mathcal{P}(X)$).

Na partitivnom skupu 2^X dobro su definirane tri osnovne operacije:

- unija $\cup : (A, B) \to A \cup B$;
- presjek $\cap : (A, B) \to A \cap B$;
- komplementiranje $^- : A \to \bar{A}$.

Operacije $\cup$ i $\cap$ su binarne operacije (dvama elementima iz 2^X pridružuju treći iz 2^X), a komplementiranje je unarna (jednom elem. iz 2^X pridružuje drugi iz 2^X).

Teorem 1 Neka su A, B, $C \in 2^X$ tada vrijedi:

1. idempotentnost unije i presjeka:

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A;$$

2. asocijativnost:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

3. komutativnost:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

4. distributivnost:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,;$$

5. De Morganove formule:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

6. $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap X = A;$

7. $A \cup X = X, \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$

8. komplementarnost:

$$A \cup \bar{A} = X, \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

9. involutivnost komplementiranja: $\overline{\overline{A}} = A.$

Napomene:

- Sva svojstva iz prethodnog teorema imaju <u>svojstvo dualnosti</u>, tj. zamjenom

$$\cup \leftrightarrow \cap \quad i \quad \emptyset \leftrightarrow X$$

  u jednom pravilu dobivamo drugo (valjano) pravilo.

- Zbog asocijativnosti opravdano je umjesto $(A \cup B) \cup C$ pisati $A \cup B \cup C$. Slično za $\cap$.

  Ako imamo (konačan ili beskonačan) niz skupova $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, onda, zbog asocijativnosti, uniju označavamo

  $A_1 \cup A_2 \cup \ ... \ \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ (za konačan niz)

  $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup \ ... = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (za beskonačan niz).

  Slično za presjek.

- Skup $\emptyset$ možemo shvatiti kao najmanji, a skup X kao najveći element skupa 2^X (u smislu relacije "biti podskup"), tj. za svaki skup $A \in 2^X$ vrijedi: $\emptyset \subseteq A \subseteq X$

1.4 Kartezijev produkt

Definicija Neka su $A_1,\ A_2, ...A_n$ neprazni skupovi, onda definiramo Kartezijev produkt

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$$

kao skup svih uređenih $n-$torki $(a_1,\ a_2, ..., a_n)$ takvih da je $a_k \in A_k$ za sve $k = 1, 2, ..., n$.

Kraća oznaka $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$. Dakle,

$$\prod_{k=1}^{n} A_k =: \{(a_1,\ a_2, ..., a_n)\ \mid a_k \in A_k,\ \forall k,\ k = 1, 2, ..., n\}.$$

Alternativna definicija

Uočimo: ako je $(a_1,\ a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, onda $n-$torku $(a_1,\ a_2, ..., a_n)$ možemo promatrati kao funkciju

$$f : \{1, 2, ..., n\} \to \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

danu sa $f(k) = a_k \in A_k$ za sve $k = 1, 2, ..., n$, tj.

$$(a_1,\ a_2, ..., a_n) \equiv (f(1),\ f(2), ..., f(n)).$$

Vrijedi i obrnuto.

Dakle, Kartezijev produkt $\prod_{k=1}^{n} A_k$ možemo definirati i kao skup svih funkcija $f : \{1, 2, ..., n\} \to \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ tako da je $f(k) = a_k \in A_k$ za sve $k = 1, 2, ..., n$, tj.

$$\prod_{k=1}^{n} A_k =: \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{c} f : \{1, 2, ..., n\} \to \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \\ f(k) = a_k \in A_k,\ \forall k,\ k = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

1.5 Ekvipotentnost skupova. Kardinani broj.

Definicija Kažemo da je skup A *ekvipotentan (jednakobrojan)* sa skupom B ako postoji bijekcija $f : A \longrightarrow B$. Oznaka $A \sim B$.

Teorem 2 Ekvipotentnost ima ova svojstva:

- refleksivnost: $A \sim A$ za svaki skup A;
- simetričnost: ako je $A \sim B$, onda je $B \sim A$;
- tranzitivnost: ako je $A \sim B$ i $B \sim C$, onda je $A \sim C$;

Dakle, ekvipotentnost je relacija ekvivalencije među skupovima.

Definicija Za skupove A i B kažemo da imaju isti *kardinalni broj* ako su ekvipotentni. Pišemo $|A| = |B|$ (ili $card\, A = card\, B$).

Definicija Za skup kažemo da je *beskonačan* ako je ekvipotentan sa svojim pravim podskupom. Za skup kažemo da je *konačan* ako nije beskonačan.

Alternativna definicija: Knjiga (Žubrinić) str. 4

Tvrdnja Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je beskonačan, a skup $\{1, 2, ..., n\}$ je konačan. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je beskonačan.

Definicija Kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ označavamo sa $\aleph_0$ (alef nula) i pišemo $card\,\mathbb{N} = \aleph_0$.

Kardinalni broj skupa $\{1, 2, ..., n\}$ označavamo sa n i pišemo $card\ \{1, 2, ..., n\} = n$.

Svaki skup S za koji je $card\,S = \aleph_0$, tj. koji je ekvipotentan sa $\mathbb{N}$ kažemo da je <u>prebrojivo beskonačan.</u>

Svaki skup S za koji je $card\,S = n$, tj. koji je ekvipotentan sa $\{1, 2, ..., n\}$ kažemo da ima <u>n elemenata</u>.

Primjer $card\,\mathbb{Z} = card\,\mathbb{Q} = \aleph_0$, tj. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ su <u>prebrojivo beskonačni</u> (sve elemente možemo poredati u beskonačni niz).

Teorem 3 Svaki beskonačan podskup prebrojivog skupa je prebrojiv.

Teorem 4 Neka je A beskonačan skup i K njegov konačan podskup, onda su skupovi A i $A \diagdown K$ ekvipotentni, tj. $card\ A = card\ (A \setminus K)$.

Teorem 5 (Cantor) Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je <u>*neprebrojiv*</u>, tj. nije ekvipotentan sa $\mathbb{N}$**.** Dakle, vrijedi $\aleph_0 < card\,\mathbb{R} = c$ (<u>*kontinum*</u>).

Dokaz: Kontradikcijom. (Cantorov dijagonalni postupak).

Pitanje: Postoji li skup S, $\mathbb{N} \subset S \subset \mathbb{R}$ koji nije ekvipotentan ni sa $\mathbb{N}$ ni sa $\mathbb{R}$, tj. tako da je $\aleph_0 < card S < c$?

Odgovor: <u>*Neodlučiv.*</u> Pokazano je da se ne može se odgovoriti na to pitanje pomoću aksioma teorije skupova (Choen 1964.). Uz pretpostavku da takav skup ne postoji (*Cantorova hipoteza kontinuma*) imamo jednu teoriju skupova, a uz pretpostavku da takav skup postoji, drugu.

Definicija Za realan broj a kažemo da je *algebarski broj* ako postoji polinom $P(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(a) = 0$.

Propozicija Skup svih algebarskih brojeva brojeva je prebrojiv.

Definicija Realni brojevi koji nisu algebarski nazivaju se *transcedentni.*

Posljedica Skup svih transcendentnih brojeva je neprebrojiv.